10. Séries entières et équations différentielles

Exercice 10.1 Application des séries entières à la recherche de solutions d'équations différentielles
Rechercher des solutions de l'équation différentielle $y''(t) + 2ty'(t) + 2y(t) = 0$ qui sont développables en série entière. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation.

Exercice 10.2 Application des équations différentielles au développement en série entière des fonctions 1
Dans cet exercice, on définit la fonction exponentielle comme comme l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$ qui vérifie $y(0) = 1$. À l'aide de la méthode de l'équation différentielle, démontrer que la fonction exponentielle est développable en série entière et déterminer son développement en série entière.

Exercice 10.3 Application des équations différentielles au développement en série entière des fonctions 2
Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f : t \mapsto (1+t)^\alpha$ est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle (E) $y'(t) = \frac{\alpha}{1+t} y(t)$. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 10.4 Application des équations différentielles au développement en série entière des fonctions 3
En utilisant la même méthode que dans les deux exercices précédents, montrer que a fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$ est développable en série entière au voisinage de 0. On commencera par déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont f est solution et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles.

Pour aller plus loin

Exercice 10.5 Un autre exemple de résolution d'équation différentielle Déterminer les solutions de l'équation différentielle $t(1-t)y'' + (1-3t)y' - y = 0$. En particulier, cette équation admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?