3. Exercices sur les séries numériques

Exercice 3.1 Convergence des suites et convergence des séries
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Montrer que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 3.2 Séries géométriques
Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que la série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.

Exercice 3.3 Séries à termes positifs
Étudier la convergence des séries à termes positifs suivantes. 1. $\sum_{n\geq 1} exp(\frac{1}{n})$; 2. $\sum \sin(\frac{1}{2^n})$; 3. $\sum ln(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}})$; 4. $\sum \frac{4n+3}{n^3+4n^2+1}$; 5. $\sum_{n\geq 1} \frac{2+(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 3.4 Séries de Riemann
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On veut étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

1. Dans quels cas cette série diverge-t-elle grossièrement ?
2. On suppose dans cette question que $\alpha > 0$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,
$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$
3. En déduire que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 3.5 Séries de Bertrand
Dans cette exercice, on souhaite étudier les séries de la forme $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha ln(n)^\beta}$.

1. En comparant le terme général de cette série avec le terme général d'une série de Riemann, montrer que cette série converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.
2. En utilisant la même méthode que dans l'exercice 3.4, montrer que la série diverge si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$ et converge si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 3.6 Séries de complexes
Parmi les séries numériques suivantes, lesquelles convergent absolument ? Lesquelles convergent ?
1. $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2}$; 2. $\sum e^{in}(0,5)^n$; 3. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Démonstration des propriétés du cours

Exercice 3.7 Généralités sur la convergence des séries
Soit $\sum a_n$ une série de complexes.

1. On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
2. Soit $\sum b_n$ une série de complexes telle que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq b_n\}$ est fini. Montrer que la série $\sum a_n$ converge si et seulement si la série $\sum b_n$ converge.

Exercice 3.8 Séries à termes positifs

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres réels. Montrer que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge vers $s = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
2. Montrer que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Soit $\sum a_n$ une série de réels positifs. Montrer que la série $\sum a_n$ converge si et seulement si la suite $(\sum_{n=0}^N a_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est majorée. Dans le cas contraire, montrer que $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^N a_n = +\infty$

Exercice 3.9 Comparaison de séries à termes positifs
Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries de réels positifs telles que, pour tout entier n, $a_n \leq b_n$.

1. Montrer que, si la série $\sum b_n$ converge, alors la série $\sum a_n$ converge.
2. Montrer que, si la série $\sum a_n$ diverge, alors la série $\sum b_n$ diverge.

Exercice 3.10 Critère de d'Alembert pour les séries numériques Soit $\sum a_n$ une série de réels positifs. On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non lacunaire et que la suite $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite $L \in [0, +\infty]$. Montrer que, si $L > 1$, alors la série $\sum a_n$ diverge grossièrement et que, si $L < 1$, alors la série $\sum a_n$ converge absolument.

Exercice 3.11 Convergence absolue

1. Soit $\sum a_n$ une suite de réels qui converge absolument. On note, pour tout entier n, $a_n^+ = \max(a_n, 0)$ et $a_n^- = \min(a_n, 0)$. Montrer que les séries $\sum a_n^+$ et $\sum a_n^-$ convergent. En déduire que la série $\sum a_n$ converge.
2. Soit $\sum u_n$ une série de complexes qui converge absolument. Montrer que les séries $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ convergent. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

Pour aller plus loin

Exercice 3.12 Produit de Cauchy de séries numériques le produit de Cauchy des séries de nombres complexes $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est la série de nombres complexes $\sum c_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

1. On suppose que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries de réels positifs. Montrer que la suite des sommes partielles de leur produit de Cauchy est majorée.
2. On suppose désormais que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries de complexes. Montrer que, si ces deux séries convergent absolument, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ converge absolument et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n).$$