4. Séries entières : rayon de convergence

Exercice 4.1 Utilisation de la définition du rayon de convergence Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} z^n$, $\sum_{n\geq 0} z^{2n}$, $\sum_{n\geq 0} 18^n z^n$ et des polynômes vus comme séries entières.

Exercice 4.2. Utilisation du critère de d'Alembert Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes. 1. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$. 2. $\sum_{n\geq 0} n^3 z^n$. 3. $\sum_{n\geq 0} P(n) z^n$, où P est un polynôme à coefficients complexes. 4. $\sum_{n\geq 0} P(n)\alpha^n z^n$, où P est un polynôme à coefficients complexes et $\alpha > 0$. 5. $\sum_{n\geq 0} \sqrt{n} z^n$.

Exercice 4.3 Utilisation du critère de d'Alembert pour les séries numériques Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} 2^n n z^{2n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n} \frac{1}{2^n} z^{3n}$.

Exercice 4.4 Détermination de rayons de convergence par comparaison Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ dans les cas suivants.

1. Pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = \frac{10+2\times(-1)^n+3\cos(n)}{n\ln(n)}$.
2. Pour tout entier $n \geq 1$, a_n est le nombre de diviseurs positifs de n.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 4.5 Rayon de convergence et somme Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}(3^n + 2^n) z^n$.

Exercice 4.6 Utilisation du produit de Cauchy Montrer que l'application définie sur le disque unité ouvert par $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}$ s'écrit comme (restriction au disque unité ouvert) d'une somme de série entière.

Démonstration des propriétés du cours

Exercice 4.7 Lemme d'Abel Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et $\rho > 0$. Supposons que la suite $(a_n \rho^n)_{n\geq 0}$ soit bornée. Montrer que, pour tout nombre complexe z avec $|z| < \rho$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

Exercice 4.8 Rayon de convergence Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. On note

$$R = \sup\{r \geq 0, \text{la suite } (a_n r^n)_{n\geq 0} \text{ est bornee}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

le rayon de convergence de cette série entière. Montrer que :

1. Si $|z| < R$, alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge et la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Si $|z| > R$, alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non-bornée. la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge et la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Exercice 4.9 Critère de d'Alembert pour les séries entières. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Supposons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non-lacunaire. Supposons aussi que la suite $(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|})_n$ ait une limite $L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Montrer alors que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est $\frac{1}{L}$ (avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Exercice 4.10 Comparaison de rayons de convergence
Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Supposons que :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, |a_n| \leq |b_n| .$$

Montrer que $R_a \geq R_b$.

Exercice 4.11 Rayon de convergence d'une somme Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Montrer que :

1. Si l'on note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n$, alors $R \geq \min(R_a, R_b)$.
2. Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.
3. L'égalité $R = \min(R_a, R_b)$ n'est pas toujours vraie si $R_a = R_b$.

Exercice 4.12 Rayon de convergence d'un produit de Cauchy Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Notons R le rayon de convergence du produit de Cauchy de ces deux séries entières. Montrer que $R \geq \min(R_a, R_b)$.

Pour aller plus loin

Exercice 4.13 Formule générale Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On note $L = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|}$ (pourquoi cette limite existe-t-elle ?). Montrer que $R = \frac{1}{L}$.