5. Rappels sur les séries de fonctions

Exercice 5.1 Convergence simple Déterminer sur quels ensembles les séries de fonctions suivantes convergent simplement.

1. La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{n^x} \end{array}$.
2. La série entière $\sum z^n$.
3. Une série entière quelconque $\sum a_n z^n$.

Exercice 5.2. Convergence normale

1. Montrer que la première série de l'exercice 5.1 converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout réel $a > 1$. Cette série converge-t-elle normalement sur $]1, +\infty[$?
2. Montrer que la deuxième série de l'exercice 5.1 converge normalement sur le disque de centre 0 et de rayon a pour tout $a < 1$. Cette série converge-t-elle normalement sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 ?
3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que cette série entière converge normalement sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon a avec $a < R$.

Exercice 5.3 Convergence simple et normale Étudier la convergence simple et normale sur $\mathbb{R}_+$ des séries de fonctions suivantes. 1.$\sum \frac{1+\sqrt{n}}{n^2+1+x}$ 2.$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

Exercice 5.4 Calcul de limite Montrer l'existence et calculer

$$\lim_{u\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u+1}{n^2+(-1)^n u}.$$

Exercice 5.5 Étude de fonction définie par une somme Montrer que la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

est bien définie continue et dérivable sur $]1, +\infty[$. Calculer la dérivée de cette fonction. Quel est son signe ?

Démonstration des propriétés du cours

Exercice 5.6 Convergence simple et convergence normale. Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui converge normalement sur $A \subset \mathbb{C}$. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur A. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5.7 Convergence normale et continuité Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions définies sur $A \subset \mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui converge normalement su A. On suppose que, pour tout entier n, la fonction f_n est continue sur A. En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer que la somme $S_{|A}$ sur A de cette série de fonctions est continue.

Exercice 5.8 Convergence normale et primitivation/dérivation On note $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions continues définies sur un intervalle borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On fixe $x_0 \in [a, b]$.

1. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$. Montrer que la série de fonctions

$$\sum x \mapsto \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$$

converge normalement sur $[a, b]$.

2. Montrer que, sous la même hypothèse que la question précédente, on a
$$\forall x \in [a,b],\ \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt.$$
3. On suppose maintenant que, pour tout entier n, la fonction f_n est de classe C^1 sur $[a,b]$. On suppose aussi que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,b]$ et que la série numérique $\sum f_n(x_0)$ converge. Montrer que la fonction
$$S: \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array}$$
est bien définie sur $[a,b]$, dérivable sur $[a,b]$ de dérivée définie sur $[a,b]$ par $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

Pour aller plus loin

Exercice 5.9 Théorème de Borel Montrer que, pour toute suite de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ telle que, pour tout entier n : $f^{(n)}(0) = a_n$. On admettra l'existence d'une fonction $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ qui vaut 1 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et qui vaut 0 en dehors de $[-1,1]$ (une fonction plateau). On cherchera la fonction f comme somme d'une série de fonctions de la forme $\sum a_n \frac{x^n}{n!}\chi(\frac{x}{b_n})$.