6. Propriétés de la somme d'une série entière

Exercice 6.1 Étude de la somme d'une série entière 1

1. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccl} S: &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \end{array}$$
est bien définie, continue.
2. Montrer que l'application S est dérivable. Calculer l'application dérivée S' et déterminer les variations de S sur $]-1,1[$ (On utilisera le théorème des séries alternées sur $]-1,0[$).
3. Montrer que $\lim_{x\to 1} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ et que $\lim_{x\to -1} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n+1}}$.

Exercice 6.2. Étude de la somme d'une série entière 2

1. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccl} S: &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n \end{array}$$
est bien définie et continue.
2. Montrer que cette application est dérivable et calculer S'.
3. Calculer $\lim_{x\to 1}(1-x)S(x)$.

Exercice 6.3 Une méthode pour calculer des sommes Soit $\sum a_n t^n$ une série entière d'une variable réelle à coefficients réels de rayon de convergence R. On note S la restriction à $]-R,R[$ de la somme de cette série entière. Le but de cette exercice est de trouver une méthode pour calculer les somme de séries entières de la forme $\sum P(n)a_n t^n$, où P est un polynôme à coefficients réels.

1. Montrer que l'application $t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}t^n$ est bien définie sur $]-R,R[$ et calculer sa somme en fonction de S. Mêmes questions pour $t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_n t^n$ et pour $t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n$ et $t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)a_n t^n$.
2. En déduire une expression des sommes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n t^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^3 a_n t^n$ en fonction de S et de ses dérivées successives.
3. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2 t^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^3 t^n$ pour tout réel $t \in]-1,1[$.

Exercice 6.4 Calcul de somme. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non-nulle et périodique de période $T > 0$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
2. On pose $P(X) = \sum_{n=0}^{T-1} a_n X^n$. Calculer la somme S de la série entière $\sum a_n z^n$ en fonction de P.

Démonstration des propriétés du cours

Exercice 6.5 Dérivée d'une série entière. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Montrer que, pour tout polynôme $P \neq 0$ à coefficients complexes, le rayon de convergence de la série entière $\sum P(n) a_n z^n$ vaut R.
2. En déduire que le rayon de convergence de la série dérivée $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ vaut R.
3. Montrer que la somme S de la série entière $\sum a_n z^n$ est dérivable sur l'intervalle $]-R, R[\subset \mathbb{R}$ et que sa dérivée S' s'écrit sous forme de somme d'une série entière que l'on précisera.

Pour aller plus loin

Exercice 6.6 Formule de Cauchy Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f la somme de cette série entière.

1. Montrer que, pour tout réel $r \in]0, R[$, on a $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$. C'est (un cas particulier de) la formule de Cauchy, base de la théorie des fonctions holomorphes qui sera vue en L3.
2. On suppose dans cette question que $R = +\infty$. On suppose qu'il existe un polynôme P de degré d tel que
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq |P(z)|.$$
Montrer que f est un polynôme de degré d.