7. La fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques

Exercice 7.1 Formule du binôme de Newton Pour des entiers naturels n et k, on rappelle que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

1. Montrer que, pour tous entiers naturels $n \geq 1$ et $n-1 \geq k \geq 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
2. Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq 1,\ \forall a, b \in \mathbb{C},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exercice 7.2 Définition et dérivée de la fonction exponentielle et des fonctions trigonométriques Pour une nombre complexe z, on pose :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},\ \cos(z) = \frac{exp(iz) + exp(-iz)}{2},\ \sin(z) = \frac{exp(iz) - exp(-iz)}{2i}.$$

1. Montrer que les applications exp, cos et sin sont bien définies et continues sur $\mathbb{C}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre complexe z, $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$.
3. Écrire les fonctions cos et sin en tant que somme de séries entières.
4. Montrer que $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $\cos(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $\sin(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
5. Montrer que les fonctions exp, cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées.
6. Déterminer le signe de exp sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire les variations de la fonction exp sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7.3 Propriété de morphisme et conséquences

1. Montrer que, pour tous nombres complexes z et z', on a $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.
2. En déduire que, pour tout nombre complexe z, $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$.
3. En déduire que exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et les variations de la fonction exp sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que, pour tout nombre complexe z, $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ et $|\exp(z)| = \exp(\mathcal{R}e(z))$.

Exercice 7.4 Formules de trigonométrie Dans cet exercice, on fixe des réels θ et θ'.

1. Vérifier que $\cos(\theta) = \mathcal{R}e(\exp(i\theta))$ et $\sin(\theta) = \mathcal{I}m(\exp(i\theta))$.
2. Montrer que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.
3. Calculer $\cos(\theta+\theta')$ et $\sin(\theta+\theta')$ en fonction de $\cos(\theta)$, $\cos(\theta')$, $\sin(\theta)$ et $\sin(\theta')$.
4. Calculer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
5. Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \cos(t)^4$.

Exercice 7.5 Étude des fonctions cos **et** sin

1. On veut démontrer que l'application cos s'annule en au moins un point sur $[0, +\infty[$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que l'application cos ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$.
   (a) En déduire que sin est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et donc strictement positive sur $]0, +\infty[$.
   (b) En utilisant le théorème des accroissements finis, en déduire que $\lim_{t\to+\infty} \cos(t) = -\infty$ et aboutir à une contradiction.
2. On note $\frac{\pi}{2} = \inf\{t > 0, cos(t) = 0\}$. Montrer que $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
3. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $\cos(t+\frac{\pi}{2})$, $\sin(t+\frac{\pi}{2})$, $\cos(t+\pi)$, $\sin(t+\pi)$, $\cos(t+3\frac{\pi}{2})$, $\sin(t+3\frac{\pi}{2})$, $\cos(t+2\pi)$, $\sin(t+2\pi)$.

4. Donner le tableau de variations de cos et sin sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et expliquer comment en déduire le tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.6 Sommes trigonométriques Soient θ un réel et n un entier. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta).$$

Pour aller plus loin

Exercice 7.7 Exponentielle d'un quaternion Définir l'exponentielle d'un quaternion quelconque comme somme d'une série (et vérifier que la somme de la série en question a un sens !). En déduire que, pour tout quaternion unitaire u et tout réel θ, $\exp(\theta u) = \cos(\theta) + \sin(\theta) u$. Montrer que la formule $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$ n'est plus vraie dans ce cadre.