8. Développement en série entière

Exercice 8.1 Premiers exemples de développements en série entière Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière au voisinage de 0 et, dans chaque cas, calculer leur développement en série entière au voisinage de 0.

1. $x \mapsto \frac{2}{1-x} + \exp(x)$.
2. $x \mapsto \frac{1}{1+3x}$, $x \mapsto \frac{1}{4+2x^2}$.
3. $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$, $x \mapsto \frac{\exp(x)}{(1-x)^2}$, $x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x-2)}$.

Exercice 8.2 Développement en série entière de $(1+x)^n$ Montrer que les fonctions $x \mapsto (1+x)^n$, pour $n \in \mathbb{Z}$, sont développables en série entière au voisinage de 0 et calculer leurs développements en série entière au voisinage de 0. On effectuera une récurrence pour $n < 0$.

Exercice 8.3 Développements en série entière par dérivée/primitive Rappeler les fonctions dérivées des fonctions suivantes. En déduire que ces fonctions sont développables en série entière au voisinage de 0 et calculer leur développement en série entière au voisinage de 0.

1. $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. arctan.

Exercice 8.4 Développement en série entière au voisinage d'un autre point que 0 Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière au voisinage de 1 et au voisinage de 2 et calculer leur développement en série entière au voisinage de ces deux points.

1. $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. exp.
3. ln.

Démonstration des propriétés du cours

Exercice 8.5 Unicité du développement en série entière Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0 dont un développement en série entière de f au voisinage de 0 s'écrit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

1. La fonction f est de classe C^n sur un intervalle ouvert contenant 0.
2. $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$.

En déduire que le développement en série entière de f au voisinage de 0 est unique.

Exercice 8.6 Exemples de fonctions C^∞ **qui ne sont pas développables en série entière au voisinage de** 0

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \\ \forall x \leq 0, f(x) = 0. \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la fonction f est de classe C^n et que la dérivée n-ième de f vérifie :

$$\begin{cases} \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} \\ \forall x \leq 0, f^{(n)}(x) = 0 \end{cases},$$

où P_n est un polynôme à coefficients réels.

3. Montrer que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0. Montrer aussi que, si g est une fonction développable en série entière au voisinage de 0, alors $f+g$ n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Pour aller plus loin

Exercice 8.7 Principe des zéros isolés Soient $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ des fonctions analytiques (*i.e.* s'écrivent comme somme de série entière d'une variable complexe au voisinage de chaque point de $\mathbb{C}$). On suppose qu'il existe un ensemble fermé borné infini K tel que $f_{|K} = g_{|K}$. Montrer que $f = g$.