9. Systèmes différentiels linéaires

Exercice 9.1 Systèmes différentiels triangulaires supérieurs Résoudre le système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$ (*i.e.* déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de ce système différentiel) pour chacune des matrices A suivantes.

$$\text{a. } A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b. } A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c. } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d. } A(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-t^2} \\ 0 & 2t \end{pmatrix}$$

Exercice 9.2 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants Résoudre les systèmes différentiels suivants.

1. $$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(t) + 2y(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) + y(t) \end{array} \right.$$

2. $$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & -2y(t) + z(t) \\ y'(t) & = & -2y(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) + 2y(t) - 3z(t) \end{array} \right.$$

Exercice 9.3 Système différentiel linéaire à coefficients constants avec second membre Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t) + B(t)$ où

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.4 Résolution d'équations différentielles d'ordre ≥ 2 Résoudre les équations différentielles suivantes.

$$\text{a. } \left\{ \begin{array}{l} y^{(3)}(t) - y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{array} \right. \qquad \text{b. } \left\{ \begin{array}{l} y^{(3)}(t) - y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 5 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{array} \right.$$

Démonstration des propriétés du cours

Exercice 9.5 Solution générale = solution particulière+ solution générale du système homogène associé Soient $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ des applications continues. On note $Y_0 : I \to \mathbb{R}^n$ une solution (sur I) du système différentiel

$$(S)\ Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t).$$

Montrer que l'ensemble des solutions sur I du système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)+B(t)$ est l'ensemble des fonctions de la forme $Y_0 + Y_h$, où Y_h est solution sur I du système différentiel homogène associé à (S).

Exercice 9.6 Structure de l'ensemble des solutions d'un système différentiel homogène Soit $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ une application continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Démontrer que l'ensemble des solutions sur I du système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$ est un espace vectoriel. Montrer que cet espace vectoriel est de dimension n.

Exercice 9.7 Technique de résolution des équations différentielles d'ordre ≥ 2 à coefficients constants On fixe des fonctions continues $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ et b définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $y_0 : I \to \mathbb{R}$ une solution sur I de l'équation différentielle

$$(E)\ y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = b(t).$$

   Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} Y_0 : & I & \to & \mathbb{R}^k \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_0'(t) \\ \vdots \\ y_0^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

   est solution sur I d'un système différentiel $(S)\ Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$, où $A : I \to M_k(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^k$ sont des applications à déterminer.
2. Soit $Y_0 : I \to \mathbb{R}^k$ une solution du système différentiel (S). Montrer que la première coordonnée de Y est solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire une bijection « naturelle » entre l'ensemble des solutions sur I de (S) et l'ensemble des solutions sur I de (E). Montrer que cette bijection est un isomorphisme linéaire lorsque b est la fonction nulle.

Exercice 9.8 Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre ≥ 2 Soit $(a_i)_{0\leq i\leq k-1}$ une suite (finie) d'applications continues $I \to \mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Soient b une fonction continue $I \to \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $(y_i)_{0\leq i\leq k-1}$ une suite finie de réels.

1. Montrer que le problème

$$\begin{cases} y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + a_{k-2}(t)y^{(k-2)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = b(t) \\ \forall 0 \leq i \leq k-1, y^{(i)}(t_0) = y_i \end{cases}$$

   admet une unique solution.
2. En déduire que l'ensemble des solutions sur I de l'équation

$$y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + a_{k-2}(t)y^{(k-2)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = 0$$

   est un espace vectoriel de dimension k.

Pour aller plus loin

Exercice 9.9 Portraits de phase dans le plan

1. Déterminer les solutions à valeurs réelles du système différentiel $X' = AX$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Représenter les trajectoires des solutions de ce système dans le plan : on obtient un foyer instable.
2. On prend maintenant une matrice A quelconque à coefficients réels dont les deux valeurs propres sont distinctes. Déterminer dans les différents cas les solutions du système $X' = AX$. Représenter dans chaque cas les trajectoires solutions dans le plan.
3. On suppose maintenant que la matrice A (à coefficients réels) a une seule valeur propre. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

   où a et b sont des réels. En déduire l'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$ dans les différents cas et représenter dans chaque cas les trajectoires solutions du système.