TD d'équations différentielles

1 Séance 1

Exercice 1.1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ des systèmes suivants

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 1.2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + y = \cos(t)e^t.$$

Exercice 1.3. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $]-2, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y' + \frac{1+t}{(2+t)(3+t)}y = \frac{1+t}{(2+t)(3+t)}.$$

Exercice 1.4. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système

$$\begin{cases} y' + 3y = \dfrac{e^{-3t}}{t^2+2t+3} \\ y(-1) = 3 \end{cases}.$$

Exercice d'entraînement 1.1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système

$$\begin{cases} y' + 3y = \sin(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Exercice d'entraînement 1.2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + ty = t.$$

Exercice d'entraînement 1.3. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + 2y = \frac{e^{-2t}}{t^2 - 4t + 6}.$$

Exercice supplémentaire 1.1. Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications continues. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) \leq a(t)\varphi(t) + b(t).$$

Que peut-on dire de φ ?

2 Séance 2

Exercice 2.1. Soit α un nombre réel. Déterminer en fonction de α l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_\alpha)\ (t+1)y' - \alpha y = \alpha.$$

Exercice d'entraînement 2.1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$ty' + 2y = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Exercice d'entraînement 2.2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\sin(t)^3 y' - 2\cos(t) y = 0.$$

Exercice fait en amphi 2.1. On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur I. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur I de l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = b(t).$$

Exercice fait en amphi 2.2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur I. On note (E) l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = b(t)$$

et (E_h) l'équation homogène qui lui est associée. On note φ_0 une solution de (E) qui est définie sur I. Montrer que l'ensemble des solutions définies sur I de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions de la forme $\varphi_0 + \varphi_h$, où φ_h est une solution définie sur I de l'équation différentielle (E_h).

3 Séance 3

Exercice 3.1. Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles des systèmes différentiels suivants en décomposant une solution dans une base adaptée.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' &=& x &+& y &-& 2z \\ y' &=& -x &-& y &+& 2z \\ z' &=& -x &+& y && \end{array}\right.$$

$$(S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x' &=& x &+& y &-& 2z &+& e^t \\ y' &=& -x &-& y &+& 2z && \\ z' &=& -x &+& y &&&-& e^t \end{array}\right.$$

Exercice d'entraînement 3.1. Résoudre les systèmes différentiels suivants

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' &=& 3x &+& 3y &-& 2z \\ y' &=& x &+& y &+& 2z \\ z' &=& x &+& 3y && \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x' &=& 3x &+& 3y &-& 2z &+& 2e^t \\ y' &=& x &+& y &+& 2z && \\ z' &=& x &+& 3y &&&+& 2e^{-t} \end{array}\right.$$

Exercice supplémentaire 3.1. Soit A une matrice carrée à coefficient réels. À quelle(s) condition(s) sur les valeurs propres de A et la décomposition de Dunford de A peut-on dire que le système différentiel $X' = AX$

1. est asymptotiquement stable ?
2. est stable ?

4 Séance 4

Exercice 4.1. Pour chacun des systèmes différentiels suivants, déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel proposé, tracer le portrait de phase associé à ce système différentiel et étudier la stabilité de l'origine.

1. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 3y \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = 2x - 7y \end{cases}$

Exercice d'entraînement 4.1. Pour chacun des systèmes différentiels suivants, déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel proposé, tracer le portrait de phase associé à ce système différentiel et étudier la stabilité de l'origine.

1. $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = x - y \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = -6x + 8y \\ y' = -4x + 6y \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$

Exercice fait en amphi 4.1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice à coefficients réels. On note (S) le système différentiel

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

On suppose que A est diagonalisable à valeurs propres réelles non-nulles. On note (u_1, u_2) une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A, λ_1 la valeur propre associée au vecteur propre u_1 et λ_2 la valeur propre associée au vecteur propre u_2. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) et donner l'allure du portrait de phase de (S) en fonction des valeurs de λ_1 et λ_2.

5 Séance 5

Exercice 5.1. Pour chacun des systèmes différentiels suivants, déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel proposé, tracer le portrait de phase associé à ce système différentiel et étudier la stabilité de l'origine.

1. $\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& -y \\ y' &=& x \end{array}\right.$ 2. $\left\{\begin{array}{lcccc} x' &=& x &-& 2y \\ y' &=& 2x &+& y \end{array}\right.$ 3. $\left\{\begin{array}{lcccc} x' &=& -4x &+& 5y \\ y' &=& -2x &+& 2y \end{array}\right.$

Exercice d'entraînement 5.1. Pour chacun des systèmes différentiels suivants, déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel proposé, tracer le portrait de phase associé à ce système différentiel et étudier la stabilité de l'origine.

1. $\left\{\begin{array}{lcccc} x' &=& -x &+& y \\ y' &=& -x &-& y \end{array}\right.$ 2. $\left\{\begin{array}{lcccc} x' &=& 6x &-& 10y \\ y' &=& 4x &-& 6y \end{array}\right.$ 3. $\left\{\begin{array}{lcccc} x' &=& -3x &+& 13y \\ y' &=& -2x &+& 7y \end{array}\right.$

Exercice fait en amphi 5.1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice à coefficients réels. On note (S) le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcccc} x' &=& ax &+& by \\ y' &=& cx &+& dy \end{array}\right.$$

On suppose que A a une valeur propre complexe $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. Déterminer une base (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $Au_1 = \alpha u_1 - \beta u_2$ et $Au_2 = \beta u_1 + \alpha u_2$.
2. En décomposant une solution suivant la base précédente, déterminer l'ensemble des solutions de (S) et donner l'allure du portrait de phase de (S) en fonction des valeurs de α et β.

Exercice supplémentaire 5.1. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel suivant et tracer le portrait de phase associé à ce système différentiel.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& -4x + 5y - 6 \\ y' &=& -2x + 2y - 2 \end{array}\right.$$

6 Séance 6

Exercice 6.1. Pour chacun des systèmes différentiels suivants, déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel proposé, tracer le portrait de phase associé à ce système différentiel et étudier la stabilité de l'origine.

1. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & 2y \\ y' & = & -x & - & 2y \end{array}\right.$ 2. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & -x & + & 2y \\ y' & = & & & -y \end{array}\right.$ 3. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & -x & + & 4y \\ y' & = & -x & + & 3y \end{array}\right.$

Exercice d'entraînement 6.1. Pour chacun des systèmes différentiels suivants, déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel proposé, tracer le portrait de phase associé à ce système différentiel et étudier la stabilité de l'origine.

1. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & 2y \\ y' & = & -2x & - & 3y \end{array}\right.$ 2. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & x & - & y \\ y' & = & 2x & - & 2y \end{array}\right.$ 3. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & -x & & \\ y' & = & x & - & y \end{array}\right.$

Exercice fait en amphi 6.1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice à coefficients réels. On note (S) le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & ax & + & by \\ y' & = & cx & + & dy \end{array}\right.$$

On suppose que A n'est pas diagonalisable et que $\det(A) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que $(A - \lambda I_2)^2 = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base (u, v) de $\mathbb{R}^2$ telle que $Au = \lambda u$ et $Av = u + \lambda v$.
3. En décomposant une solution suivant la base précédente, déterminer l'ensemble des solutions de (S) et donner l'allure du portrait de phase de (S) en fonction des valeurs de λ.