7 Séance 7

Exercice 7.1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A.
2. En déduire l'ensemble des solutions à valeurs réelles du système différentiel

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x' & = & 3x & + & 2y & + & z \\ y' & = & & & y & - & z \\ z' & = & & & y & + & z \end{array} \right.$$

   en utilisant deux méthodes distinctes :
   (a) en déterminant les solutions à valeurs complexes de (S), que l'on obtiendra en décomposant les solutions suivant une base de vecteurs propres.
   (b) en calculant les matrices $\exp(tA)$ pour tout nombre réel t.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (S) telles que $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.

Exercice d'entraînement 7.1. Soit θ un nombre réel non-nul. Notons A et B les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$e^{A+B} \neq e^A e^B.$$

Exercice fait en amphi 7.1 (Calcul de l'exponentielle d'une matrice)**.** Soit $d \geq 1$ un entier naturel. Pour toute famille $(\lambda_i)_{1\leq i\leq d}$ de nombres complexes, on note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ la matrice diagonale de $M_d(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position (i, i) vaut λ_i pour tout indice i entre 1 et d.

1. Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq d}$ une famille de nombres complexes. Déterminer les coefficients de la matrice

$$\exp(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)).$$

2. En déduire une méthode pour calculer les coefficients de l'exponentielle d'une matrice carrée diagonalisable.
3. Si N est une matrice nilpotente d'ordre ν, au sens où $N^{\nu-1} \neq 0$ et $N^\nu = 0$, calculer $\exp(N)$.
4. En utilisant la décomposition de Dunford, expliquer comment on peut calculer les coefficients de l'exponentielle d'une matrice quelconque.

Exercice supplémentaire 7.1. Soient A et B deux matrices. Est-il vrai que, si $e^A e^B = e^B e^A$, alors $AB = BA$? Qu'en est-il si l'on suppose que, pour tout nombre réel t, $e^{tA} e^{tB} = e^{tB} e^{tA}$?

8 Séance 8

Exercice 8.1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $A(A-I_3)^2 = 0$. Déterminer l'ensemble des applications $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dérivables telles que

$$X' = AX$$

suivant deux méthodes différentes :

1. en calculant une exponentielle de matrice (on remarquera qu'il n'est pas nécessaire de calculer d'inverse de matrice pour déterminer l'ensemble des solutions).
2. en décomposant une solution dans une base adaptée.

Exercice d'entraînement 8.1. Mêmes questions avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en remarquant que $(A+2I_3)^3 = 0$

Exercice fait en amphi 8.1. Soit $d \geq 1$, $B : I \to \mathbb{R}$ une application continue et A une matrice dans $M_d(\mathbb{R})$. Déterminer l'ensemble des applications $X : I \to \mathbb{R}^d$ solutions sur I de l'équation différentielle

$$X' = AX + B(t).$$

9 Séance 9

Exercice 9.1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système différentiel

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x'' & - & 5x' & - & 2y' & - & 2y & = & 0 \\ y'' & + & 3x' & - & y & - & 3x & = & 0 \end{array}\right. .$$

Exercice d'entraînement 9.1. On note (E_0) l'équation différentielle

$$y^{(3)} - 3y^{(2)} + 3y' - y = 0.$$

1. Écrire un système différentiel (S) d'ordre 1 dont la résolution est équivalente à la résolution de (E_0).
2. En étudiant le système (S), retrouver l'ensemble des solutions à valeurs complexes de (E_0).

Exercice fait en amphi 9.1. On note $d \geq 1$ une entier et $(a_i)_{0 \leq i < d}$ une famille de nombres réels. On note (E_0) l'équation différentielle

$$y^{(d)} + \sum_{i=0}^{d-1} a_i y^{(i)} = 0.$$

On note $\dfrac{d}{dt}$ l'endomorphime du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui, à un élément de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ associe sa dérivée.

1. Déterminer un polynôme P unitaire de degré minimal telle que la propriété suivante est vérifiée. Une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ est solution de (E_0) si et seulement si
$$\varphi \in \operatorname{Ker}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right)\right).$$
2. On note $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines de P et $m_1, m_2, \ldots, m_n$ leurs multiplicités respectives. Montrer que
$$\operatorname{Ker}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right)\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\left(\left(\frac{d}{dt} - r_i\right)^{m_i}\right).$$
3. Pour tout entier i de $[1, n]$ et tout entier λ entre 0 et $m_i - 1$, on note
$$\varphi_{i,\lambda} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t^\lambda e^{r_i t} \end{array} .$$
Montrer que, pour tout indice i entre 1 et n et tout indice λ entre 0 et $m_i - 1$
$$\varphi_{i,\lambda} \in \operatorname{Ker}\left(\left(\frac{d}{dt} - r_i\right)^{m_i}\right).$$
4. Montrer que, pour tout indice i entre 1 et n, la famille $(\varphi_{i,\lambda})_{0 \leq \lambda < m_i}$ est libre.
5. En déduire que la famille $(\varphi_{i,\lambda})_{1 \leq i \leq n 0 \leq \lambda < m_i}$ constitue une base de l'espace des solutions à valeurs complexes de (E_0).
6. Déduire de la question précédente une base de l'espace des solutions à valeurs réelles de (E_0).

Exercice supplémentaire 9.1. Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y).$$

10 Séance 10

Exercice 10.1. Déterminer l'ensemble des solutions (définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles) des équations différentielles suivantes.

$$(E_1)\ y'' - y' - 2y = 0.$$

$$(E_2) \begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(E_3)\ y'' - 4y' + 4y = 0 \quad (E_4)\ y^{(3)} - 2y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (E_5)\ y^{(5)} - 4y^{(4)} + 4y^{(3)} = 0.$$

Exercice 10.2 (Technique de l'abaissement de l'ordre)**.** Soient a et b des nombres réels et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E)\ y'' + ay' + by = c(t).$$

On suppose que le polynôme $P(X) = X^2 + aX + b$ a deux racines réelles r_0 et r_1 distinctes.

1. Déterminer une solution φ de (E) de la forme $\varphi(t) = \lambda(t)e^{r_0 t}$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
3. Application : donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2t}.$$

Exercice d'entraînement 10.1. Déterminer l'ensemble des solutions (définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles) des équations différentielles suivantes.

$$(E_1) \begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(E_2)\ y'' - 2y' + 10y = 0.$$

$$(E_3) \begin{cases} y'' - 3y' = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

$$(E_4)\ y^{(3)} - 2y'' - 7y' - 4y = 0 \quad (E_5)\ y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \quad (E_6)\ y^{(4)} - y^{(3)} + 4y'' - 4y' = 0.$$

Exercice supplémentaire 10.1. Soit $d \geq 0$ un entier. On note $(a_i)_{0 \leq i < d}$ une famille de d nombres réels et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. En s'inspirant de l'exercice 10.2, donner une méthode pour calculer une solution particulière de l'équation différentielle

$$y^{(d)} + a_{d-1}y^{(i)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = c(t).$$