11 Séance 11

Exercice 11.1 (Équations d'Euler)**.** On cherche dans cet exercice à déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E) suivante

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 2.$$

1. On pose $z(t) = y(e^t)$. Calculer z' et z'' en fonction des dérivées de y. Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E') que l'on déterminera.
2. Résoudre l'équation (E') et en déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation (E).

Exercice 11.2 (Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre ≥ 2)**.** Soit $(a_i)_{0\leq i\leq k-1}$ une suite (finie) d'applications continues $I \to \mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Soient b une fonction continue $I \to \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $(y_i)_{0\leq i\leq k-1}$ une suite finie de réels.

1. Montrer que le problème

$$\begin{cases} y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + a_{k-2}(t)y^{(k-2)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = b(t) \\ \forall 0 \leq i \leq k-1, y^{(i)}(t_0) = y_i \end{cases}$$

   admet une unique solution définie sur I en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes linéaires d'ordre 1.
2. En déduire que l'ensemble des solutions définies sur I de l'équation différentielle (E_0) suivante

$$y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + a_{k-2}(t)y^{(k-2)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = 0$$

   est un espace vectoriel de dimension k.
3. Soit m un entier dans $[0, k]$. Quelle est la dimension de l'espace des solutions φ de (E_0) telles que, pour tout entier i dans $[0, m]$, $\varphi^{(i)}(t_0) = 0$?

Exercice d'entraînement 11.1.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ l'équation différentielle (E) suivante

$$x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0.$$

   On pourra poser $x = -e^t$ sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. En déduire l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E).

Exercice fait en amphi 11.1. On note $A : I \to M_d(\mathbb{R})$ une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note (S) le système différentiel d'inconnue $X : I \to \mathbb{R}^d$

$$X' = A(t)X + B(t)$$

et (S_0) le système homogène associé.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_0$ des solutions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de (S_0) forme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^d)$ des applications de I dans $\mathbb{R}^d$.
2. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ? Justifier votre réponse.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de (S) forme un sous-espace affine de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^d)$ de direction $\mathcal{E}_0$.

Exercice supplémentaire 11.1. Soient a et b des nombres réels. Déterminer en fonction des paramètres a et b l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0.$$

12 Séance 12

Exercice 12.1. Soit $A : \mathbb{R} \to M_d(\mathbb{R})$ une application continue telle que, pour tous nombres réels t et s, $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. On s'intéresse à l'équation différentielle d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$

$$(S)\ X' = A(t)X.$$

1. En utilisant la définition de l'exponentielle de matrice, montrer que l'exponentielle de matrice $M_d(\mathbb{R}) \to M_d(\mathbb{R})$ est différentiable en la matrice nulle et que, pour toute matrice H de $M_d(\mathbb{R})$

$$d(\exp)(0).H = H.$$

2. En déduire qu'une matrice fondamentale de (S) est l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{R} & \to & M_d(\mathbb{R}) \\ & t & \mapsto & e^{\int_0^t A(s)ds} \end{array}.$$

3. Application : déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & \cos(t)x & - & \sin(t)y \\ y' & = & \sin(t)x & + & \cos(t)y \end{array} \right.$$

Exercice d'entraînement 12.1. En utilisant l'exercice précédent, déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} (1+t^2)x' & = & tx & + & y \\ (1+t^2)y' & = & -x & + & ty \end{array} \right.$$

Exercice fait en amphi 12.1. Soit $A : \mathbb{R} \to M_d(\mathbb{R})$ une application continue. On s'intéresse au système différentiel d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$

$$(S_0)\ X' = A(t)X.$$

On note $M : \mathbb{R} \to M_d(\mathbb{R})$ une application.

1. Montrer que M est une matrice fondamentale pour le système (S_0) si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées
   (a) l'application M est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) pout tout nombre réel t, $M'(t) = A(t)M(t)$.
   (c) pour tout nombre réel t, la matrice $M(t)$ est inversible.
2. Exprimer l'ensemble des solutions du système (S_0) à l'aide de la matrice fondamentale de(S_0).

13 Séance 13

Exercice 13.1. Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications continues. On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle

$$(E)\ y'' + a(t)y' + b(t)y = 0.$$

On fixe un système (φ_1, φ_2) fondamental de solutions de (E). On note W le wronskien de ce système fondamental de solutions.

1. Rappeler l'équation différentielle vérifiée par W.
2. Redémontrer que W vérifie cette équation différentielle à l'aide d'un calcul élémentaire.

Exercice 13.2. On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle

$$(E)\ x'' - tx' - (2 + 2t^2)x = 0.$$

1. Vérifier que la fonction
$$f_1 : t \mapsto e^{t^2}$$
est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.
2. En utilisant le wronskien d'un système fondamental de solutions de (E), déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E).

Exercice d'entraînement 13.1. On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle

$$(E)\ tx'' + (1 - 2t)x' + (t - 1)x = 0.$$

1. Vérifier que la fonction exponentielle est solution de cette équation différentielle.
2. En utilisant le wronskien d'un système fondamental de solutions de (E), déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E).

14 Séance 14

Exercice 14.1. Rechercher des solutions de l'équation différentielle

$$y''(t) + 2ty'(t) + 2y(t) = 0$$

qui sont développables en série entière au voisinage de 0. En déduire l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de cette équation.

Exercice d'entraînement 14.1. Rechercher des solutions de l'équation différentielle

$$(t - t^2)y''(t) + (1 - 3t)y'(t) - y(t) = 0$$

qui sont développables en série entière au voisinage de 0. En déduire l'ensemble des solutions définies sur $]0, 1[$ de cette équation.

Exercice supplémentaire 14.1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $t(1 - t)y'' + (1 - 3t)y' - y = 0$ définies sur $\mathbb{R}$.

15 Séance 15

Exercice 15.1. Montrer que a fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$ est développable en série entière au voisinage de 0. On commencera par déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont f est solution et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles.

Exercice d'entraînement 15.1. À l'aide de la méthode de l'équation différentielle, démontrer que la fonction exponentielle (définie comme l'application réciproque du logarithme népérien) est développable en série entière et déterminer son développement en série entière.

Exercice d'entraînement 15.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f : t \mapsto (1 + t)^\alpha$ est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle (E) $y'(t) = \frac{\alpha}{1+t} y(t)$. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0.