16 Séance 16

Exercice 16.1. Déterminer pour quelles conditions initiales (t_0, x_0) (ou $(t_0, (x_0, y_0))$ ou (t_0, y_0, y_1),...) on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz aux problèmes de Cauchy suivants.

1.
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \sin(x^2+t^2) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

2.
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \arccos(x) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

3.
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \dfrac{t}{x-1} \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

4.
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \dfrac{t}{y-1} \\ y' & = & \sqrt{|x|} \\ x(t_0) & = & x_0 \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

5.
$$\left\{\begin{array}{rcl} y^{(18)} + \arctan(y^{(15)})y'e^{y''} & = & 3\cos(y^{(11)}) \\ \forall 0 \leq i \leq 17,\ y^{(i)}(t_0) & = & y_i \end{array}\right.$$

6.
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \cos(\sqrt{|x|}) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

Exercice 16.2. On s'intéresse ici à l'équation différentielle suivante (qui représente l'évolution de la hauteur d'une cuve trouée au cours du temps)

$$(E)\ y' = -\sqrt{|y|}.$$

1. Peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à cette équation ? Pourquoi ?
2. Montrer qu'il n'y a pas unicité des solutions au problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} y' = -\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{array}\right. .$$

Exercice d'entraînement 16.1. Déterminer pour quelles conditions initiales (t_0, x_0) (ou $(t_0, (x_0, y_0))$ ou (t_0, y_0, y_1)) on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz aux problèmes de Cauchy suivants.

1.
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \arctan(tx) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

2.
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & |x| \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

3.
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \frac{x}{t} \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

4.
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & ty \\ y' & = & xy \\ x(t_0) & = & x_0 \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

5.
$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + \arctan(t)(y')^2 & = & y^2 \\ y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t_0) & = & y_1 \end{array}\right.$$

17 Séance 17

Exercice 17.1. Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E)\ y' = ty^2.$$

1. Montrer que toute solution de (E) distincte de la fonction nulle ne s'annule jamais.
2. Déterminer la solution maximale de (E) qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice 17.2. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle

$$t\ln(t)y' = y^2 + 1.$$

Exercice d'entraînement 17.1. Soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la solution maximale de l'équation (E) de l'exercice 17.1 qui vérifie $y(t_0) = y_0$ en fonction de t_0 et y_0.

Exercice d'entraînement 17.2. On considère l'équation différentielle

$$(1 + t)y' = y^2.$$

1. Peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à cette équation ? Pourquoi ?
2. Déterminer les solutions maximales de cette équation définies sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice fait en amphi 17.1. Soit $d \geq 1$ un entier et

$$f : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^d \\ (t,x) & \mapsto & f(t,x) \end{array}$$

une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$. On suppose que f est continue sur U et localement lipschitzienne par rapport à la variable de phase x. On fixe $(t_0, x_0) \in U$. On note

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & f(t,x) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right. .$$

Soient $\varphi_1 : I \to \mathbb{R}^d$ et $\varphi_2 : J \to \mathbb{R}^d$ deux solutions de (PC).

1. Notons
$$A = \{t \in I \cap J,\ \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}.$$
Montrer que l'ensemble A est ouvert et fermé dans $I \cap J$.
2. En déduire que $\varphi_{1|I\cap J} = \varphi_{2|I\cap J}$.

Exercice supplémentaire 17.1. Déterminer une méthode pour résoudre les équations de la forme $x' = f\left(\dfrac{x}{t}\right)$, où f est une fonction continue sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Indication : on pourra changer de fonction inconnue.

Application : résoudre l'équation différentielle suivante pour $t > 0$

$$tx' = x - \sqrt{t^2 + x^2}.$$

On pourra utiliser la fonction sinus hyperbolique et sa réciproque.

18 Séance 18

Exercice 18.1. On fixe des paramètres $\alpha > 0$ et $l > 0$. On souhaite étudier l'équation différentielle

$$(E)\ y' = \alpha y(l - y).$$

Cette équation est utilisée comme modèle de croissance de populations.

1. Sans calculer les solutions de (E), tracer le portrait de phase de (E).
2. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution non-constante de (E). Montrer que
   (a) soit, pour tout $t \in I$, $\varphi(t) < 0$.
   (b) soit, pour tout $t \in I$, $0 < \varphi(t) < l$.
   (c) soit, pour tout $t \in I$, $l < \varphi(t)$.
3. Déterminer les solutions maximales de (E).

Exercice d'entraînement 18.1. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle

$$y' = (1 - y^2)t.$$

On commencera par démontrer que les solutions non-constantes φ vérifient soit $\varphi < -1$, soit $-1 < \varphi < 1$, soit $\varphi > 1$.

Exercice fait en amphi 18.1. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur des intervalles ouverts I et J de $\mathbb{R}$. On suppose que g est à valeurs strictement positives. On fixe $t_0 \in I$ et $y_0 \in J$. Pour $y \in J$, on note,

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(u)} du$$

et, pour $t \in I$, on note

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s) ds.$$

1. Question préliminaire : montrer que G réalise une bijection de l'intervalle J sur un intervalle J'.
2. Déterminer la solution maximale du problème de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' &= f(t)g(y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

en fonction des données du problème.

19 Séance 19

Exercice 19.1. On étudie dans cette question l'équation différentielle

$$y' = 2e^{-t^2}y^3 + ty.$$

1. Montrer que les solutions de cette équation distinctes de la fonction nulle ne s'annulent jamais.
2. Soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ Déterminer la solution maximale de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale $y(t_0) = y_0$ en fonction de t_0 et y_0.

Exercice d'entraînement 19.1. Tracer le portrait de phase puis tenter de déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation différentielle $y' = 3y^3 + y$ de deux manières différentes :

1. en l'interprétant comme une équation de Bernoulli.
2. en l'interprétant comme une équation à variables séparables.

Exercice supplémentaire 19.1. Déterminer des solutions de l'équation différentielle

$$y = ty' - (y')^2.$$

On pourra commencer par chercher les solutions deux fois dérivables et remarquer que certaines solutions s'obtiennent par recollement.

20 Séance 20

Exercice 20.1. On considère l'équation différentielle

$$(E)\ y' = -y^2 + \frac{1}{t}y - \frac{1}{t^2}.$$

1. Montrer que la fonction inverse est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E).
2. En déduire l'ensemble des solutions maximales de (E) définies sur un intervalle contenu dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice d'entraînement 20.1. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle

$$y' = y^2 + y - 2$$

1. en l'interprétant comme une équation de Riccati (on trouvera préalablement une solution évidente de l'équation différentielle).
2. en l'interprétant comme une équation à variables séparables.