21 Séance 21

Exercice 21.1. Que peut on dire de l'intervalle d'existence des solutions maximales des équations différentielles ci-dessous ?

$$\begin{array}{ll} (E_1) & y' = \dfrac{y-1}{y^2+6y+11} \\ (E_2) & y' = \cos(y)t^2 + \arctan(y). \end{array}$$

Exercice 21.2. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ avec $\|x\| \geq R$, on a $f(x) = 0$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' = f(y)$ sont bornées. Qu'en déduit-on sur l'intervalle de définition des solutions maximales ?

Exercice d'entraînement 21.1. Que peut on dire de l'intervalle d'existence des solutions maximales des équations différentielles ci-dessous ?

$$\begin{array}{ll} (E_1) & y' = \cos(e^t y) \\ (E_2) & y' = \dfrac{\ln(y^2+1)}{e^y + y^2 - y + 1} e^t + \ln(t^2+1). \end{array}$$

Exercice fait en amphi 21.1 (Démonstration de la version faible du théorème des bouts)**.** Soit A une partie compacte de U, soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^d$ une solution de (S) et $t_0 \in]\alpha, \beta[$. Supposons que

$$\forall t \in]t_0, \beta[, \ (t, \varphi(t)) \in A.$$

1. Démontrer que $\beta < +\infty$ et qu'il existe $l \in \mathbb{R}^d$ et une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres de $]t_0, \beta[$ telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = \beta$ et
$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(t_n) = l.$$
2. On définit $\tilde{\varphi} :]\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ par
$$\begin{cases} \forall t \in]\alpha, \beta[, \ \tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) \\ \tilde{\varphi}(\beta) = l \end{cases}.$$
Démontrer que $\tilde{\varphi}$ est solution de (S).

Exercice supplémentaire 21.1. Soit $d \geq 1$ un entier et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application de classe C^1. On s'intéresse à la solution maximale φ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= f(x) \\ x(0) &= 0. \end{cases}$$

On suppose que, pour tout vecteur x unitaire de $\mathbb{R}^d$

$$< f(x), x >< 0.$$

Montrer que φ est définie sur un voisinage de $+\infty$.

22 Séance 22

Exercice 22.1. On considère l'équation différentielle

$$(E)\ x'' + x + x^3 = 0.$$

1. Déterminer une application $\mathcal{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour toute solution $t \mapsto x(t)$ de (E), l'application $t \mapsto \mathcal{E}(x(t), x'(t))$ est constante. (Indication : on pourra multiplier l'équation par $x'(t)$ et intégrer.)
2. En utilisant $\mathcal{E}$, montrer que les solutions maximales de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant la fonction $\mathcal{E}$ déterminée lors de la première question, montrer que les solutions maximales de l'équation différentielle suivante sont définies sur un voisinage de $+\infty$.

$$x'' + x' + x + x^3 = 0.$$

Exercice 22.2. Dans cet exercice, on étudie le problème de Cauchy

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x^2 + t^2 \\ x(0) & = & 0. \end{array} \right.$$

1. Montrer que (PC) a une unique solution maximale $\varphi : I \to \mathbb{R}$ qui est strictement croissante.
2. Montrer que l'intervalle I est symétrique par rapport à l'origine et que φ est une fonction impaire.
3. Montrer que l'intervalle I est borné.

Exercice d'entraînement 22.1.

1. Montrer que les solutions maximales du système différentiel suivant sont définies sur $\mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = xy^2 \\ y' = -yx^2 \end{array} \right.$$

2. Montrer que les solutions maximales du système différentiel suivant sont définies sur un voisinage de $+\infty$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -xy^2 \\ y' = -yx^2 \end{array} \right.$$

Indication : dans les deux cas, on pourra étudier la norme au carré d'une solution maximale.

23 Séance 23

Exercice 23.1. On fixe des nombres réels t_0, x_0 et y_0. On note (PC) le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= -(x^5+y^2x) \\ y' &= -2(y^3+x^4y) \\ x(t_0) &= x_0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}.$$

On note $t \mapsto (x(t), y(t))$ la solution maximale de (PC) définie sur $]\alpha, \beta[$ et on pose $f(t) = x(t)^4 + y(t)^2$.

1. Justifier pourquoi le problème (PC) admet une unique solution maximale.
2. Déterminer une équation différentielle (E) vérifiée par f.
3. On fixe un nombre réel η_0. Déterminer la solution maximale φ de (E) telle que $\varphi(t_0) = \eta_0$.
4. En déduire les valeurs de α et de β.

Exercice d'entraînement 23.1. On fixe $t_0 \in \mathbb{R}$,et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On note (PC) le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= x^3+y^2x \\ y' &= y^3+yx^2 \\ x(t_0) &= x_0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}.$$

On fixe une solution maximale $t \mapsto (x(t), y(t))$ de (PC) définie sur $]\alpha, \beta[$ et on pose $f(t) = x(t)^2 + y(t)^2$. Le but de l'exercice est de déterminer α et β.

1. Justifier pourquoi le problème (PC) admet une unique solution maximale.
2. Déterminer une équation différentielle (E) vérifiée par f.
3. On fixe un nombre réel η_0. Déterminer la solution maximale φ de (E) telle que $\varphi(t_0) = \eta_0$.
4. En déduire les valeurs de α et de β.

Exercice fait en amphi 23.1 (Démonstration du lemme de Gronwall)**.**

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. On fixe $t_0 \in I$. On suppose qu'il existe $A > 0$ et $B \geq 0$ tels que

$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[,\ f'(t) \leq Af(t) + B.$$

Démontrer que

$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[,\ f(t) \leq f(t_0)e^{|t-t_0|A} + \frac{B}{A}(e^{|t-t_0|A} - 1).$$

2. Soit $d \geq 1$ et $\psi : I \to \mathbb{R}^d$ une application dérivable telle que

$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[,\ \|\psi'(t)\| \leq A\|\psi(t)\| + B,$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

En appliquant la question précédente à $f(t) = \|\psi(t)\|$, démontrer que

$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[,\ \|\psi(t)\| \leq \|\psi(t_0)\| e^{(t-t_0)A} + \frac{B}{A}(e^{(t-t_0)A} - 1).$$

On pourra commencer par traiter le cas particulier où

$$\forall t \in [t_0, +\infty[\cap I,\ \|\psi(t)\| > 0.$$

24 Séance 24

Exercice 24.1. Étudier l'intervalle d'existence des solutions maximales du système différentiel suivant.

$$(S)\ \left\{\begin{array}{l} x' = -3x + 2e^{-x^2}y + \frac{1}{1+y^2} \\ y' = -\cos(ty)x + \frac{y}{1+x+x^2} + \arctan(t) \end{array}\right. .$$

Exercice 24.2 (Lemme de Gronwall intégral)**.** Soient $C \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ des fonctions continues. On suppose que

$$\forall t \geq t_0, f(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} f(s)g(s)ds.$$

1. Pour $t \geq t_0$, on pose $W(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)g(s)ds$. Montrer que W est dérivable sur $[t_0, +\infty[$ et déterminer une inégalité vérifiée par $W'(t)$ pour $t \geq t_0$.
2. En déduire que, pour tout nombre réel $t \geq t_0$,

$$W(t) \leq ae^{\int_{t_0}^{t} g(s)ds}.$$

Exercice d'entraînement 24.1. Étudier l'intervalle d'existence des solutions maximales du système différentiel suivant.

$$(S)\ \left\{\begin{array}{l} x' = \arctan(y)x + 2y + \cos(t) \\ y' = \sin(y)x \end{array}\right.$$

Exercice fait en amphi 24.1 (Systèmes différentiels linéaires)**.** Soient $A : I \to M_d(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^d$ des applications continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On s'intéresse au système différentiel linéaire

$$(S_l)\ x' = A(t)x + B(t).$$

1. Démontrer que le système (S_l) vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz non-linéaire.
2. Montrer que les solutions maximales de (S_l) sont définies sur I.

Exercice supplémentaire 24.1. Soit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto & f(t, x) \end{array}$$

une application continue. Soient $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications dérivables sur $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout nombre réel t de $\mathbb{R}$,

$$\varphi_1'(t) < f(t, \varphi_1(t))$$

et

$$\varphi_2'(t) = f(t, \varphi_2(t)).$$

1. Montrer que, si $\varphi_1(0) \leq \varphi_2(0)$, alors, pour tout $t > 0$,

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t).$$

2. Que peut-on dire (dans le passé) si $\varphi_1(0) \geq \varphi_2(0)$?