Correction des exercices d'entrainement

Dans le texte qui suit, on a indiqué en italique tous les commentaires qui ne font pas partie de la correction de l'exercice à proprement parler.

1 Séance 1

Exercice d'entraînement 1.1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système

$$\begin{cases} y' + 3y = \sin(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Correction : Méthode 1 : *Pour résoudre un tel système différentiel, on commence par trouver l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + 3y = \sin(t)$. On injectera ensuite la condition initiale. Pour trouver l'ensemble des solutions de cette équation différentielle, on utilise le résultat selon lequel les solutions sont les sommes d'une solution particulière de l'équation et d'une solution quelconque de l'équation homogène associée.*

L'équation homogène associée à l'équation différentielle $y' + 3y = \sin(t)$ est l'équation différentielle $y' + 3y = 0$. L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de cette équation homogène est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ce^{-3t} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

On a ici appliqué le théorème du cours qui nous donne l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.

Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle $y' + 3y = \sin(t)$ sous la forme

$$\varphi_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda(t)e^{-3t} \end{array},$$

où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour que φ_0 soit solution de l'équation différentielle, il suffit que, pour tout nombre réel t,

$$\lambda'(t)e^{-3t} - 3\lambda(t)e^{-3t} + 3\lambda(t)e^{-3t} = \sin(t)$$

(Noter que c'est l'implication réciproque qui nous inéresse ici : il s'aagit de démontrer que, si φ_0 est égale à une fonction que l'on va déterminer, alors φ est solution de l'équation), c'est-à-dire que, pour tout nombre réel t,

$$\lambda'(t) = \sin(t)e^{3t}$$

ou encore que λ est une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \sin(t)e^{3t}$. Déterminons une telle primitive. Pour tout nombre réel t,

$$\sin(t)e^{3t} = \mathcal{I}m(e^{it}e^{3t}) = \mathcal{I}m(e^{(3+i)t})$$

donc une primitive de cette fonction est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} F(t) &= \mathcal{I}m\left(\frac{1}{3+i}e^{(3+i)t}\right) \\ &= \mathcal{I}m\left(\frac{3-i}{10}e^{3t}(\cos(t)+i\sin(t))\right) \\ &= \frac{1}{10}(-\cos(t)+3\sin(t))e^{3t}. \end{aligned}$$

Ainsi, une solution de l'équation différentielle $y'+3y=\sin(t)$ est

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{10}(-\cos(t)+3\sin(t))e^{3t}e^{-3t} = \frac{1}{10}(-\cos(t)+3\sin(t)) \end{array}.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'+3y=\sin(t)$ est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ce^{-3t}+\frac{1}{10}(-\cos(t)+3\sin(t)) \end{array} \mid C\in\mathbb{R}\right\}.$$

Une telle solution $\varphi : t \mapsto Ce^{-3t}+\frac{1}{10}(-\cos(t)+3\sin(t))$, avec $C\in\mathbb{R}$, vérifie $\varphi(0)=1$ si et seulement si $C-\frac{1}{10}=1$, c'est-à-dire $C=\frac{11}{10}$. L'ensemble des solutions du problème proposé est donc le singleton

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{11}{10}e^{-3t}+\frac{1}{10}(-\cos(t)+3\sin(t)) \end{array} \right\}.$$

Méthode 2 : *on transforme directement le membre de gauche de l'équation, comme dans le cours.* Soit $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, une fonction dérivable. La fonction φ est solution du problème proposé si et seulement si, pour tout nombre réel t,

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)e^{3t}) = \sin(t)e^{3t}$$

et $\varphi(0)=1$. Comme on l'a vu lors de la première méthode, une primitive de $t\mapsto\sin(t)e^{3t}$ est

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{10}(-\cos(t)+3\sin(t))e^{3t} \end{array}.$$

Ainsi, en intégrant entre 0 et t, φ est solution du problème proposé si et seulement si, pour tout nombre réel t,

$$\varphi(t)e^{3t}-\varphi(0)e^{0} = \varphi(t)e^{3t}-1 = \frac{1}{10}(-\cos(t)+3\sin(t))e^{3t}+\frac{1}{10},$$

c'est-à-dire que, pour tout nombre réel t,

$$\varphi(t) = \frac{11}{10}+\frac{1}{10}(-\cos(t)+3\sin(t)).$$

On retrouve comme ensemble de solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème proposé le singleton

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{11}{10}e^{-3t}+\frac{1}{10}(-\cos(t)+3\sin(t)) \end{array} \right\}.$$

Exercice d'entraînement 1.2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'+ty=t.$$

Correction : On remarque que la fonction constante égale à 1 est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle proposée. *Il convient de vérifier rapidement en général si des fonctions constantes sont solutions de l'équation différentielle.*

L'équation différentielle homogène associée à l'équation différentielle proposée est

$$y' + ty = 0.$$

L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle homogène est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ce^{-\frac{t^2}{2}} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle proposée est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 + Ce^{-\frac{t^2}{2}} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice d'entraînement 1.3. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + 2y = \frac{e^{-2t}}{t^2 - 4t + 6}.$$

Correction : *Dans cet exercice, les deux méthodes présentées dans la correction de l'exercice d'entrainement 1.1 permettent de le résoudre. Comme on aura l'occasion de revenir ultérieurement sur la deuxième méthode, on va utiliser ici la première méthode.*

L'équation différentielle homogène associée à l'équation différentielle proposée est $y' + 2y = 0$, dont l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ce^{-2t} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle proposée sous la forme

$$\varphi_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda(t)e^{-2t} \end{array},$$

où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour que φ_0 soit solution de l'équation différentielle, il suffit que, pour tout nombre réel t,

$$\lambda'(t)e^{-2t} - 2\lambda(t)e^{-2t} + 2\lambda(t)e^{-2t} = \frac{e^{-2t}}{t^2 - 4t + 6}$$

que l'on peut réécrire

$$\lambda'(t) = \frac{1}{t^2 - 4t + 6}.$$

Déterminons donc une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2-4t+6}$. Pour tout nombre réel t,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{t^2-4t+6} &= \tfrac{1}{(t-2)^2+2} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(\frac{t-2}{\sqrt{2}})^2+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2-4t+6}$ est $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}.\arctan(\frac{t-2}{\sqrt{2}})$ et une solution particulière de l'équation proposée est l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\arctan\left(\frac{t-2}{\sqrt{2}}\right)e^{-2t}.$$

L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle proposée est donc

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2}}.\arctan(\frac{t-2}{\sqrt{2}})e^{-2t} + Ce^{-2t} \end{array} |C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2 Séance 2

Exercice d'entraînement 2.1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$ty' + 2y = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Correction : *En divisant par t, on va pouvoir déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ de cette équation. On va ensuite étudier les raccordements dérivables possibles en 0 pour déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de cette équation.*

Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation se réécrit

$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{t}{1+t^2}.$$

L'équation homogène associée à cette équation différentielle est $y' + \frac{2}{t}y = 0$. L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de cette équation homogène est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ce^{-2\ln(t)} = \frac{C}{t^2} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Déterminons une solution particulière définie sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation avec second membre à l'aide de la méthode de la variation de la constante. Posons

$$\varphi_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\lambda(t)}{t^2} \end{array},$$

où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour que φ_0 soit solution de l'équation différentielle, il suffit que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\lambda'(t)}{t^2} - \frac{2}{t^3}\lambda(t) + \frac{2}{t^3}\lambda(t) = \frac{t}{1+t^2}$$

que l'on peut réécrire

$$\lambda'(t) = \frac{t^3}{1+t^2}.$$

Il s'agit donc de déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{t^3}{1+t^2}$.

Comme le numérateur est de degré plus grand que le dénominateur dans cette fraction rationnelle, on a besoin d'effectuer au numérateur la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

Pour tout $t > 0$,

$$\begin{array}{rcl} \frac{t^3}{1+t^2} & = & \frac{t(1+t^2)-t}{1+t^2} \\ & = & t - \frac{t}{1+t^2} \\ & = & t - \frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}. \end{array}$$

Par conséquent, on peut prendre λ défini sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\lambda(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$

et une solution particulière de l'équation est l'application φ_0 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}\ln(1+t^2).$$

Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle avec second membre est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{C}{t^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}\ln(1+t^2) \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

De même, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation différentielle est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{C}{t^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}\ln(1+t^2) \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Déterminons maintenant l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

On va ici raisonner par analyse/synthèse. On va supposer que l'on dispose d'une telle solution et on va essayer de trouver une expression de celle-ci. On vérifie ensuite que, réciproquement, les expressions trouvées fournissent bien des solutions de l'équation.

Soit φ une solution définie sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

On se souviendra que, par définition de la notion de solution d'équation différentielle, φ est dérivable en tout point où elle est définie, en particulier en 0.

Alors les restrictions $\varphi_{|\mathbb{R}_+^*}$ et $\varphi_{|\mathbb{R}_-^*}$ sont des solutions respectives sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ de cette équation. Ainsi, il existe des constantes réelles C_1 et C_2 telles que

$$\forall t > 0,\ \varphi(t) = \frac{C_1}{t^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}\ln(1+t^2)$$

et

$$\forall t < 0,\ \varphi(t) = \frac{C_2}{t^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}\ln(1+t^2).$$

Remarquons que, comme ln est dérivable en 1 de dérivée 1,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\ln(1+t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{(1+t^2)-1}(\ln(1+t^2) - \ln(1)) = \ln'(1) = 1.$$

Ainsi, si $C_1 \neq 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} |\varphi(t)| = +\infty$ et, si $C_2 \neq 0$, $\lim\limits_{t\to 0^-} |\varphi(t)| = +\infty$, ce qui n'est pas possible puisque φ est continue en 0. Ainsi, $C_1 = C_2 = 0$. Maintenant, comme φ est dérivable en 0,

$$\begin{array}{rcl} \varphi'(0) & = & \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} \\ & = & \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t}\dfrac{1}{2t^2}\ln(1+t^2) \\ & = & \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t} = +\infty, \end{array}$$

ce qui n'est pas possible. Ainsi, l'équation proposée n'a aucune solution définie sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble recherché est l'ensemble vide.

Exercice d'entraînement 2.2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\sin(t)^3 y' - 2\cos(t) y = 0.$$

Correction : Fixons un entier relatif k et notons $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$. Sur l'intervalle I_k, l'équation différentielle se réécrit

$$y' - 2\frac{\cos(t)}{\sin(t)^3}y = 0.$$

Une primitive définie sur I_k de $t \mapsto 2\frac{\cos(t)}{\sin(t)^3}$ est $t \mapsto \frac{-1}{\sin(t)^2}$. Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur I_k de l'équation différentielle est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ce^{-\frac{1}{\sin(t)^2}} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Déterminons maintenant l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle. Soit φ, une telle solution. Comme, pour tout entier relatif k, la restriction $\varphi_{|I_k}$ est solution de l'équation, alors, pour tout entier k, il existe une constante réelle C_k telle que, pour tout $t \in I_k$,

$$\varphi(t) = C_k e^{\frac{-1}{\sin(t)^2}}.$$

De plus, par continuité de φ, pour tout entier k,

$$\varphi(k\pi) = \lim_{t \to (k\pi)^+} C_k e^{\frac{-1}{\sin(t)^2}} = C_k \lim_{y \to -\infty} e^y = 0.$$

On peut aussi montrer qu'une telle fonction est nécessairement dérivable en les $k\pi$ de dérivée 0 en ces points. Mais ceci n'ajoute pas de contrainte sur les constantes C_k donc on passe tout de suite à la réciproque.

Réciproquement, fixons une suite $(C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels et notons

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t \in I_k & \mapsto & C_k e^{-\frac{1}{\sin(t)^2}} \\ k\pi & \mapsto & 0. \end{array}$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi_{|I_k}$ est solution de l'équation différentielle, d'après ce qui précède. Ainsi, la fonction φ est dérivable sur $\bigcup_k I_k$ et, pour tout $t \in \bigcup_k I_k$,

$$\sin(t)^3\varphi'(t) - 2\cos(t)\varphi(t) = 0.$$

Fixons maintenant $k \in \mathbb{Z}$. On a, pour $t \in I_k$

$$\begin{array}{rcl} \frac{\varphi(t)-\varphi(k\pi)}{t-k\pi} & = & \frac{C_k}{t-k\pi} e^{\frac{-1}{\sin(t)^2}} \\ & = & \frac{C_k(\sin(t)^2 - \sin(k\pi)^2)}{t-k\pi} \frac{e^{\frac{-1}{\sin(t)^2}}}{\sin(t)^2}. \end{array}.$$

Comme la fonction $\sin^2$ est dérivable en $k\pi$ de nombre dérivé $2\cos(k\pi)\sin(k\pi) = 0$, alors

$$\lim_{t \to k\pi} \frac{\sin(t)^2 - \sin(k\pi)^2}{t - k\pi} = 0$$

donc

$$\lim_{t \to (k\pi)^+} \frac{\varphi(t) - \varphi(k\pi)}{t - k\pi} = C_k.0. \lim_{x \to -\infty} -xe^x = 0.$$

De même, on montre que
$$\lim_{t\to(k\pi)^-}\frac{\varphi(t)-\varphi(k\pi)}{t-k\pi}=0$$
donc φ est dérivable en $k\pi$ de dérivée nulle en ce point. Enfin
$$\sin(k\pi)^3\varphi'(k\pi)-2\cos(k\pi)\varphi(k\pi)=0.$$
Ainsi φ est solution de l'équation proposée. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle proposée est donc
$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ t\in I_k & \mapsto & C_k e^{-\frac{1}{\sin(t)^2}}\\ k\pi & \mapsto & 0\end{array}\ \Big|\ (C_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\right\}.$$

Noter que l'on trouve ici un espace de solutions de dimension infinie.

3 Séance 3

Exercice d'entraînement 3.1. Résoudre les systèmes différentiels suivants
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 3x & + & 3y & - & 2z\\ y' & = & x & + & y & + & 2z\\ z' & = & x & + & 3y & & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x' & = & 3x & + & 3y & - & 2z & + & 2e^t\\ y' & = & x & + & y & + & 2z & & \\ z' & = & x & + & 3y & & & + & 2e^{-t}\end{array}\right.$$

Correction : *On suit ici la méthode décrite dans la section 2.1 du polycopié. Il s'agit tout d'abord de réduire la matrice du système différentiel.*

On note (S_0) le premier système différentiel et (S) le deuxième système différentiel. On remarque que le système (S_0) est le système homogène associé à (S). On note
$$A=\begin{pmatrix}3&3&-2\\1&1&2\\1&3&0\end{pmatrix}.$$
Réduisons la matrice A. Le polynôme caractéristique de A est, en développant par rapport à la première colonne,
$$\begin{array}{rcl}\chi_A(X) & = & \begin{vmatrix}X-3 & -3 & 2\\ -1 & X-1 & -2\\ -1 & -3 & X\end{vmatrix}\\ & = & (X-3)\begin{vmatrix}X-1 & -2\\ -3 & X\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -3 & X\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-3 & 2\\ X-1 & -2\end{vmatrix}\\ & = & (X-3)(X(X-1)-6)+(-3X+6)-(6-2(X-1))\\ & = & X^3-4X^2-4X+16\\ & = & (X-2)(X^2-2X-8)\\ & = & (X-2)((X-1)^2-9)\\ & = & (X-2)(X-1-3)(X-1+3)=(X-4)(X-2)(X+2).\end{array}$$

Déterminons les sous-espaces propres associés à A. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - 4I_3) \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \begin{array}{rcl} L_2 & \leftarrow & L_2 + L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_1 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & 6y & - & 6z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - 2I_3) \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \begin{array}{rcl} L_2 & \leftarrow & L_2 - L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - L_1 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ & & -4y & + & 4z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & z \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-2I_3) \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \begin{array}{rcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - 5L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - L_3 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & -12y & - & 12z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -z \\ x & = & z \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment des bases respectives des espaces propres associés à 4, à 2 et à -2. Comme ces espaces propres sont en somme directe, la famille (u, v, w) est libre. Comme elle est constituée de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Résolvons donc le système différentiel (S_0). Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une application dérivable. Comme (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut poser, pour tout nombre réel t,

$$\Phi(t) = \varphi_1(t)u_1 + \varphi_2(t)u_2 + \varphi_3(t)u_3.$$

L'application Φ est solution de (S_0) si et seulement si

$$(*)\ \forall t \in \mathbb{R},\ \Phi'(t) = A\Phi(t).$$

On a

$$\begin{aligned}
(*) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_1'(t)u_1 + \varphi_2'(t)u_2 + \varphi_3'(t)u_3 = \varphi_1(t)Au_1 + \varphi_2(t)Au_2 + \varphi_3(t)Au_3 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_1'(t)u_1 + \varphi_2'(t)u_2 + \varphi_3'(t)u_3 = \varphi_1(t).(4u_1) + \varphi_2(t)(2u_2) + \varphi_3(t)(-2u_3).
\end{aligned}$$

Comme (u_1, u_2, u_3) est une famille libre, on a

$$\begin{aligned}
(*) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} \varphi_1'(t) & = & 4\varphi_1(t) \\ \varphi_2'(t) & = & 2\varphi_2(t) \\ \varphi_3'(t) & = & -2\varphi_3(t) \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} \varphi_1(t) & = & C_1e^{4t} \\ \varphi_2(t) & = & C_2e^{2t} \\ \varphi_3(t) & = & C_3e^{-2t} \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(t) = C_1e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système (S_0) est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} C_1e^{4t} - C_2e^{2t} + C_3e^{-2t} \\ C_1e^{4t} + C_2e^{2t} - C_3e^{-2t} \\ C_1e^{4t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t} \end{pmatrix} \end{array} \mid (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Déterminons une solution de (S).

Comme on connaît déjà l'ensemble des solutions du système homogène associé, il suffit de trouver une solution particulière de (S) pour en déduire l'ensemble des solutions de (S_0). Pour ce faire, on va réécrire le système différentiel dans la base (u_1, u_2, u_3). On pourrait aussi intuiter la forme d'une solution particulière, mais cette deuxième méthode ne marche pas à tout les coups, contrairement à la réécriture dans une base adaptée.

Fixons $t \in \mathbb{R}$. Déterminons les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$ dans la base (u_1, u_2, u_3). Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2e^t \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2e^{-t} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccc} L_2 & \leftarrow & L_2 - L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2e^t \\ & & 2\lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & -2e^t \\ & & 2\lambda_2 & & & = & 2e^{-t} - 2e^t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccl} \lambda_1 & = & 2e^t + \lambda_2 - \lambda_3 = e^t \\ \lambda_3 & = & \lambda_2 + e^t = e^{-t} \\ \lambda_2 & = & e^{-t} - e^t \end{array} \right.$$

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. On note, pour tout nombre réel t,

$$\Phi(t) = \varphi_1(t) u_1 + \varphi_2(t) u_2 + \varphi_3(t) u_3.$$

L'application Φ est solution de (S) si et seulement si, pour tout nombre réel t,

$$\Phi'(t) = A\phi(t) + \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

ce que l'on peut réécrire, en décomposant dans la base (u_1, u_2, u_3),

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_1'(t) u_1 + \varphi_2'(t) u_2 + \varphi_3'(t) u_3 = (4\varphi_1(t) + e^t) u_1 + (2\varphi_2(t) + e^{-t} - e^t) u_2 + (-2\varphi_3(t) + e^{-t}) u_3$$

ou encore

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{ccl} \varphi_1'(t) & = & 4\varphi_1(t) + e^t \\ \varphi_2'(t) & = & 2\varphi_2(t) + e^{-t} - e^t \\ \varphi_3'(t) & = & -2\varphi_3(t) + e^{-t} \end{array} \right.$$

ou encore

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{ccl} \frac{d}{dt}(\varphi_1(t) e^{-4t}) & = & e^{-3t} \\ \frac{d}{dt}(\varphi_2(t) e^{-2t}) & = & e^{-3t} - e^{-t} \\ \frac{d}{dt}(\varphi_3(t) e^{2t}) & = & e^t \end{array} \right. .$$

Il suffit donc de prendre Φ de sorte que, pour tout nombre réel t, $\varphi_1(t) e^{-4t} = \frac{-1}{3} e^{-3t}$, $\varphi_2(t) e^{-2t} = \frac{-1}{3} e^{-3t} + e^{-t}$ et $\varphi_3(t) e^{2t} = e^t$. Une solution particulière de (S) est donc l'application Φ définie sur

$\mathbb{R}$ par

$$\Phi(t) = -\frac{1}{3}e^t u_1 + (-\frac{1}{3}e^{-t} + e^t)u_2 + e^{-t}u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}e^t + \frac{4}{3}e^{-t} \\ \frac{2}{3}e^t - \frac{4}{3}e^{-t} \\ \frac{2}{3}(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système (S) est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}e^t + \frac{4}{3}e^{-t} + C_1 e^{4t} - C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} \\ \frac{2}{3}e^t - \frac{4}{3}e^{-t} + C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} - C_3 e^{-2t} \\ \frac{2}{3}(e^t + e^{-t}) + C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} \end{pmatrix} \end{array} \mid (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

4 Séance 4

Exercice d'entraînement 4.1. Pour chacun des systèmes différentiels suivants, déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel proposé, tracer le portrait de phase associé à ce système différentiel et étudier la stabilité de l'origine.

1. $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = x - y \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = -6x + 8y \\ y' = -4x + 6y \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$

Correction : 1. *Comme le système différentiel est triangulaire supérieur, il n'y a pas besoin de réduire la matrice du système.*

Soit

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

une application dérivable.

L'application Φ est solution du système différentiel proposé si et seulement si

$$(*)\ \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \varphi_1'(t) = -2\varphi_1(t) \\ \varphi_2'(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \end{cases}$$

On résout alors la première ligne puis la deuxième ligne.

On a

$$\begin{aligned} (*) &\iff \exists C_1 \in \mathbb{R},\quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \varphi_1(t) = C_1 e^{-2t} \\ \varphi_2'(t) = C_1 e^{-2t} - \varphi_2(t) \end{cases} \\ &\iff \exists C_1 \in \mathbb{R},\quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \varphi_1(t) = C_1 e^{-2t} \\ \frac{d}{dt}(\varphi_2(t)e^t) = \varphi_2'(t)e^t + \varphi_2(t)e^t = C_1 e^{-t} \end{cases} \\ &\iff \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \varphi_1(t) = C_1 e^{-2t} \\ \varphi_2(t)e^t = -C_1 e^{-t} + C_2 \end{cases} \\ &\iff \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \varphi_1(t) = C_1 e^{-2t} \\ \varphi_2(t) = -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système proposé est donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} \\ -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} \end{pmatrix} \end{array} \middle| \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Si l'on pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on peut réécrire cet ensemble sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & C_1 e^{-2t} u + C_2 e^{-t} v \end{array} \middle| \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Pour toute solution Φ de ce système différentiel, on a $\lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = 0$ donc l'origine est asymptotiquement stable.

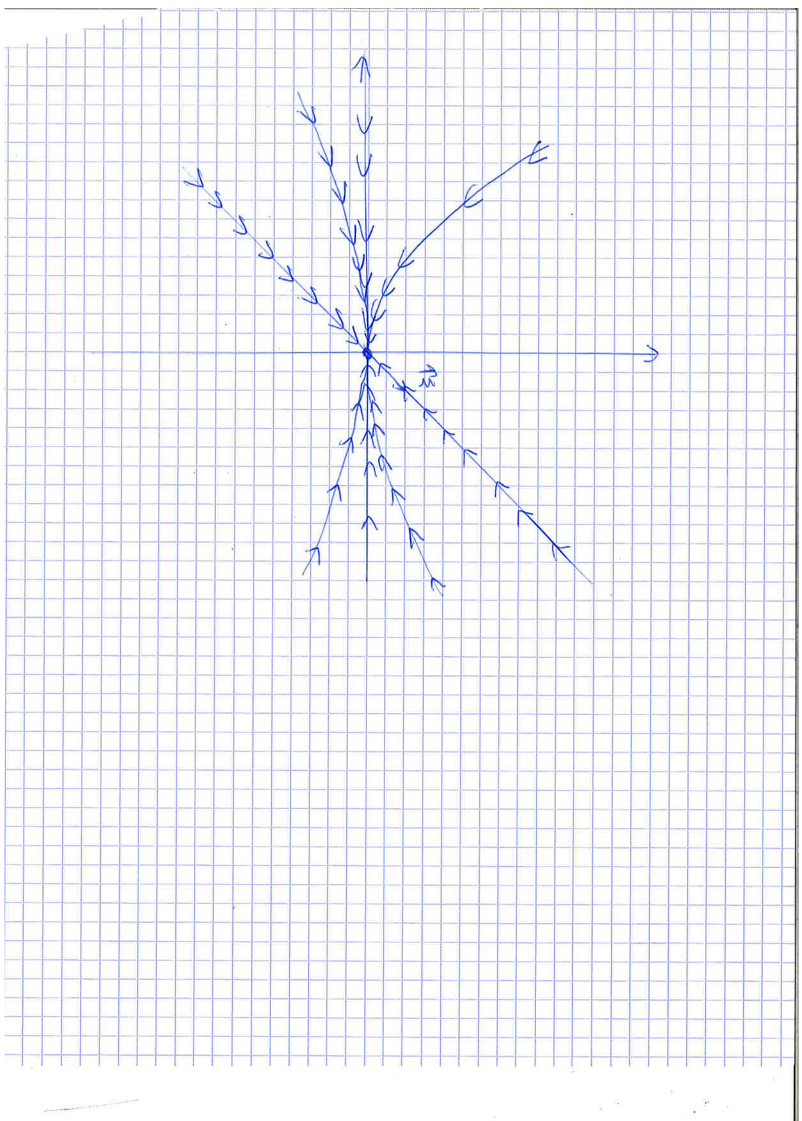
Portrait de phase : On note $(\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2)$ les coordonnées d'une solution Φ dans la base (u, v) (cette famille a déterminant $1 \neq 0$ donc forme une base de $\mathbb{R}^2$). On reprend les notations précédentes.

Si $C_2 = 0$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) = C_1 e^{-2t} u$.

Si $C_1 = 0$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) = C_2 e^{-t} v$.

Si $C_1 \neq 0$ et $C_2 \neq 0$, on remarque que $\widetilde{\varphi}_1 = \text{constante}.\widetilde{\varphi}_2^2$ donc les trajectoires sont incluses dans les courbes d'équations $\tilde{x} = \text{Constante}.\tilde{y}^2$, où $(\tilde{x}, \tilde{y})$ sont les coordonnées dans la base (u, v).

On obtient donc le portrait de phase suivant.



2. Notons

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

et réduisons la matrice A. Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X+6 & -8 \\ 4 & X-6 \end{vmatrix} \\ &= (X+6)(X-6) + 8.4 \\ &= X^2 - 4 = (X-2)(X+2). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc -2 et 2. Déterminons les sous-espaces propres associés.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A+2I_2) & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -4x & + & 8y & = & 0 \\ -4x & + & 8y & = & 0 \end{array} \right. \\ & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 & \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -4x & + & 8y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & x = 2y \\ & \iff & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(u) \end{array}$$

avec $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. De même

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A-2I_2) & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -8x & + & 8y & = & 0 \\ -4x & + & 4y & = & 0 \end{array} \right. \\ & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 & \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -8x & + & 8y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & x = y \\ & \iff & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(v) \end{array}$$

avec $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs u et v forment chacun une base d'un sous-espace propre de A. Comme les sous-espaces propres de A sont en somme directe, alors (u, v) est une famille libre donc, comme elle est constituée de $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application dérivable. On décompose Φ suivant la base (u, v) : pour tout nombre réel t,

$$\Phi(t) = \varphi_1(t)u + \varphi_2(t)v.$$

L'application Φ est solution du système proposé si et seulement si

$$(*)\ \forall t \in \mathbb{R},\ \Phi'(t) = A\Phi(t).$$

On décompose alors dans la base (u, v).

$$\begin{array}{rcl} (*) & \iff & \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_1'(t)u + \varphi_2'(t)v = \varphi_1(t)Au + \varphi_2(t)Av \\ & \iff & \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_1'(t)u + \varphi_2'(t)v = -2\varphi_1(t)u + 2\varphi_2(t)v \\ & \iff & \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1'(t) & = & -2\varphi_1(t) \\ \varphi_2'(t) & = & 2\varphi_2(t) \end{array} \right. \\ & \iff & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1(t) & = & C_1 e^{-2t} \\ \varphi_2(t) & = & C_2 e^{2t} \end{array} \right. \end{array}$$

L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système proposé est donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & C_1 e^{-2t}u + C_2 e^{2t}v \end{array} \,\middle|\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

que l'on peut réécrire

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} 2C_1e^{-2t} + C_2e^{2t} \\ C_1e^{-2t} + C_2e^{2t} \end{pmatrix} \end{array} \;\middle|\; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Si $C_1 = 0$ et $C_2 = 1$, on voit que

$$\lim_{t \to +\infty} \|\Phi(t)\| = +\infty$$

donc l'origine n'est pas stable.

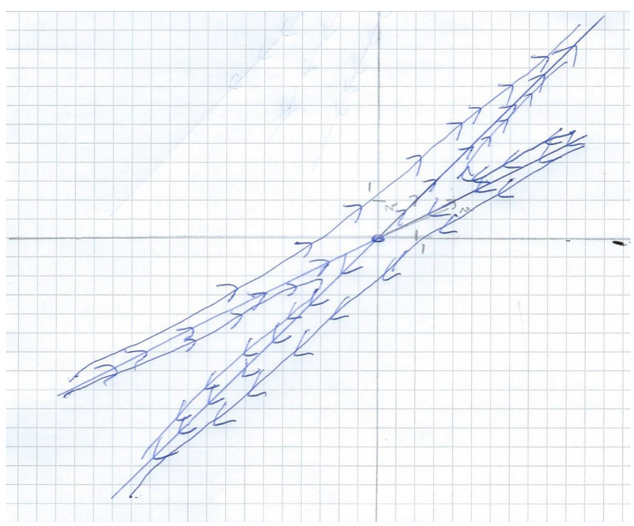
Portrait de phase : On note Φ une solution du système et on reprend les notations précédentes.

Si $C_2 = 0$, alors, pour tout réel t, $\Phi(t) = C_1 e^{-2t} u$.

Si $C_1 = 0$, alors, pour tout réel t, $\Phi(t) = C_2 e^{2t} v$.

Si $C_1 \neq 0$ et $C_2 \neq 0$, alors $\varphi_2(t) = \frac{\text{constante}}{\varphi_1(t)}$ donc les trajectoires sont incluses dans les courbes d'équations $\tilde{y} = \frac{\text{constante}}{\tilde{x}}$, où $(\tilde{x}, \tilde{y})$ sont les coordonnées dans la base (u, v).

On en déduit le portrait de phase de ce système différentiel.



3. Notons

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

et réduisons la matrice A. Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{array}{rcl} \chi_A(X) & = & \begin{vmatrix} X+1 & 2 \\ -4 & X-5 \end{vmatrix} \\ & = & (X+1)(X-5) + 4.2 \\ & = & X^2 - 4X + 3 \\ & = & (X-2)^2 - 1 \\ & = & (X-2-1)(X-2+1) = (X-3)(X-1) \end{array}$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et 3. Déterminons les sous-espaces propres associés.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{rcl}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A - I_2) & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcl} -2x & - & 2y & = & 0 \\ 4x & + & 4y & = & 0 \end{array}\right. \\
& L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 & \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcl} -2x & - & 2y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff & y = -x \\
& \iff & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(u)
\end{array}$$

avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. De même

$$\begin{array}{rcl}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A - 2I_2) & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcl} -4x & - & 2y & = & 0 \\ 4x & + & 2y & = & 0 \end{array}\right. \\
& L_2 \leftarrow L_2 + L_1 & \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcl} -4x & - & 2y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff & y = -2x \\
& \iff & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(v)
\end{array}$$

avec $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs u et v forment chacun une base d'un sous-espace propre de A. Comme les sous-espaces propres de A sont en somme directe, alors (u, v) est une famille libre donc, comme elle est constituée de $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application dérivable. On décompose Φ suivant la base (u, v) : pour tout nombre réel t,

$$\Phi(t) = \varphi_1(t)u + \varphi_2(t)v.$$

L'application Φ est solution du système proposé si et seulement si

$$(*)\ \forall t \in \mathbb{R},\ \Phi'(t) = A\Phi(t).$$

On décompose alors dans la base (u, v).

$$\begin{array}{rcl}
(*) & \iff & \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_1'(t)u + \varphi_2'(t)v = \varphi_1(t)Au + \varphi_2(t)Av \\
& \iff & \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_1'(t)u + \varphi_2'(t)v = \varphi_1(t)u + 3\varphi_2(t)v \\
& \iff & \forall t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} \varphi_1'(t) & = & \varphi_1(t) \\ \varphi_2'(t) & = & 3\varphi_2(t) \end{array}\right. \\
& \iff & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} \varphi_1(t) & = & C_1 e^t \\ \varphi_2(t) & = & C_2 e^{3t} \end{array}\right.
\end{array}$$

L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système proposé est donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & C_1 e^t u + C_2 e^{3t} v \end{array} \;\middle|\; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

que l'on peut réécrire

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} C_1e^t + C_2e^{3t} \\ -C_1e^t - 2C_2e^{3t} \end{pmatrix} \end{array} \middle| \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Si $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$, on voit que

$$\lim_{t \to +\infty} \|\Phi(t)\| = +\infty$$

donc l'origine n'est pas stable.

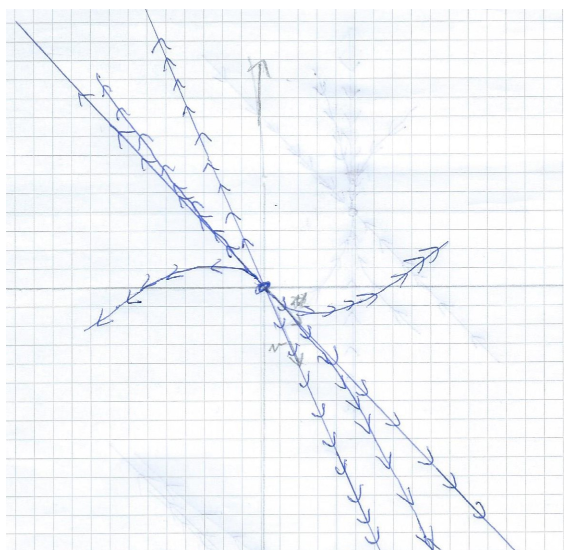
Portrait de phase : On note Φ une solution du système et on reprend les notations précédentes.

Si $C_2 = 0$, alors, pour tout réel t, $\Phi(t) = C_1e^tu$.

Si $C_1 = 0$, alors, pour tout réel t, $\Phi(t) = C_2e^{3t}v$.

Si $C_1 \neq 0$ et $C_2 \neq 0$, alors $\varphi_2(t) = constante.\varphi_1(t)^3$ donc les trajectoires sont incluses dans les courbes d'équations $\tilde{y} = constante.\tilde{x}^3$, où $(\tilde{x}, \tilde{y})$ sont les coordonnées dans la base (u, v).

On en déduit le portrait de phase de ce système différentiel.



5 Séance 5

Exercice d'entraînement 5.1. Pour chacun des systèmes différentiels suivants, déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel proposé, tracer le portrait de phase associé à ce système différentiel et étudier la stabilité de l'origine.

$$1. \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & -x & + & y \\ y' & = & -x & - & y \end{array} \right. \quad 2. \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & 6x & - & 10y \\ y' & = & 4x & - & 6y \end{array} \right. \quad 3. \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & -3x & + & 13y \\ y' & = & -2x & + & 7y \end{array} \right.$$

Correction : 1. *Ce premier système est de la forme*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & ax & - & by \\ y' & = & bx & + & ay \end{array} \right. .$$

On peut donc utiliser la méthode décrite dans la section 2.1.3 du polycopié pour résoudre ce type de système : on pose $z = x + iy$ et on trouve une équation différentielle vérifiée par z.

Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

une application dérivable. On pose, pour tout nombre réel t, $z(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$. L'application Φ est solution du système différentiel proposé si et seulement si, pour tout nombre réel t,

$$\varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t) = (-\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) + i(-\varphi_1(t) - \varphi_2(t)),$$

c'est-à-dire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$z'(t) = (-1 - i)z(t).$$

Ceci équivaut à dire qu'il existe $C = C_1 + iC_2 \in \mathbb{C}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = Ce^{(-1-i)t}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système proposé est

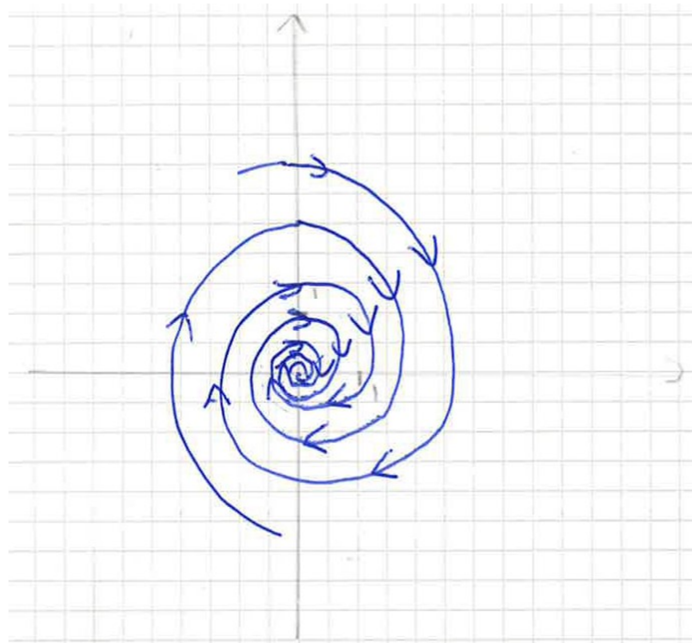
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & e^{-t} \begin{pmatrix} C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) \\ -C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) \end{pmatrix} \end{array} \;\middle|\; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On remarque que, pour toute solution Φ du système,

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = 0$$

donc l'origine est asymptotiquement stable.

Portrait de phase : Comme précédemment, on note z l'affixe d'une solution du système. Remarquons que, pour tout nombre réel t, $|z(t)| = e^{-t}$ donc le module est décroissant et converge vers 0 en $+\infty$. De même, pour nombre réel t, $arg(z(t)) = arg(C) - t$ donc la solution tourne dans le sens indirect.



2. *Ici, on va réduire la matrice pour se ramener à un système de la forme de la question précédente.*

On pose $A = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = (X-6)(X+6) + 40 = X^2 + 4 = X^2 - (2i)^2 = (X-2i)(X+2i).$$

Ici, comme la matrice A est à coefficients réels, si l'on conjugue un vecteur propre pour $2i$, on obtient un vecteur propre pour $-2i$. La connaissance d'un seul espace propre suffit donc.

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $2i$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A - 2iI_2) & \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} (6-2i)x & - & 10y & = & 0 \\ 4x & - & (6+2i)y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{6-2i}{4} L_2 = L_1 - \frac{3-i}{2} L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{ccccc} & & 0 & = & 0 \\ 4x & - & (6+2i)y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff x = \frac{3+i}{2} y \\
& \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(u)
\end{aligned}$$

avec $u = \begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \end{pmatrix}$. On pose alors $u_1 = \mathcal{R}e(u) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \mathcal{I}m(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme la famille (u_1, u_2) a pour déterminant $-2 \neq 0$ dans la base canonique, la famille (u_1, u_2) constitue une base de $\mathbb{R}^2$. En prenant les parties réelles et imaginaires de la relation $Au = 2iu$, on trouve que $Au_1 = -2u_2$ et $Au_2 = 2u_1$.

Le système écrit dans la base (u_1, u_2) sera alors de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x' & = & ax & - & by \\ y' & = & bx & + & ay \end{array} \right. ,$$

ce qui permet d'appliquer la même méthode que dans la question précédente.

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application dérivable. On décompose Φ dans la base (u_1, u_2) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(t) = \varphi_1(t)u_1 + \varphi_2(t)u_2.$$

On pose, pour tout nombre réel t, $z(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$. L'application Φ est solution du système proposé si et seulement si

$$(*)\ \forall t \in \mathbb{R},\ \Phi'(t) = A\Phi(t).$$

On a

$$\begin{array}{rcl} (*) & \iff & \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_1'(t)u_1 + \varphi_2'(t)u_2 = -2\varphi_1(t)u_2 + 2\varphi_2(t)u_1 \\ & \iff & \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1'(t) & = & 2\varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) & = & -2\varphi_1(t) \end{array} \right. \\ & \iff & \forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = (-2i)z(t) \\ & \iff & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = (C_1 + iC_2)e^{-2it} \\ & \iff & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1(t) & = & \mathcal{R}e(z(t)) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) \\ \varphi_2(t) & = & \mathcal{I}m(z(t)) = -C_1\sin(2t) + C_2\cos(2t) \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système proposé est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} (3C_1 + C_2)\cos(2t) + (3C_2 - C_1)\sin(2t) \\ 2(C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)) \end{pmatrix} \end{array} \middle| \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Toute solution Φ du système différentiel est bornée donc l'origine est stable. Par contre, comme le module de l'affixe z de Φ dans la base (u_1, u_2) est constant, l'origine n'est pas asymptotiquement stable.

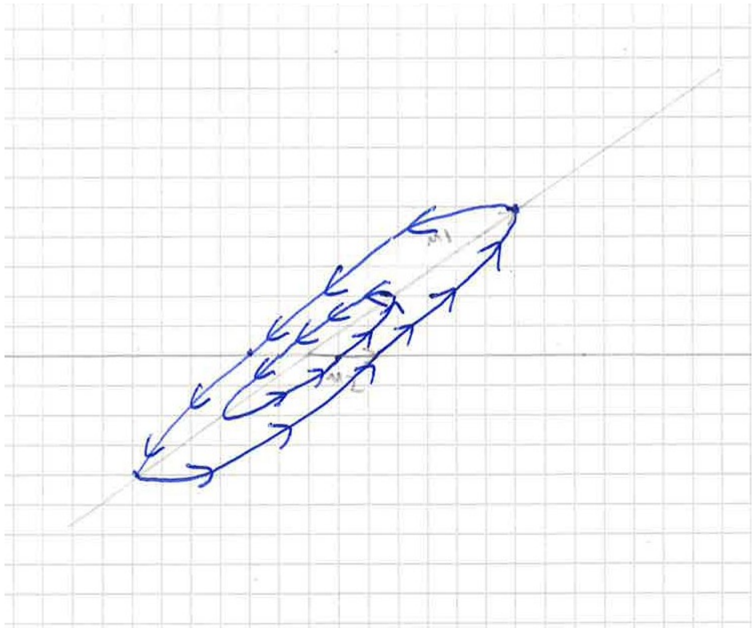
Portrait de phase : on reprend les notations précédentes. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|z(t)| = |C_1 + iC_2|$$

. Le module est constant. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$arg(z(t)) = arg(C_1 + iC_2) - 2t$$

donc l'argument est décroissant : les trajectoires solutions tournent dans le sens opposé du sens donné par l'orientation de la base (u_1, u_2). Comme la base (u_1, u_2) est indirecte, les trajectoires tournent donc dans le sens direct.



3. On pose $A = \begin{pmatrix} -3 & 13 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

$\chi_A(X) = (X+3)(X-7)+26 = X^2-4X+5+(X-2)^2+1 = (X-2)^2-i^2 = (X-2-i)(X-2+i)$.

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $2+i$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A-(2+i)I_2) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} (-5-i)x & + & 13y & = & 0 \\ -2x & + & (5-i)y & = & 0 \end{array}\right. \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{5+i}{2}L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} & & 0 & = & 0 \\ -2x & + & (5-i)y & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff x = \tfrac{5-i}{2}y \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(u)
\end{aligned}$$

avec $u = \begin{pmatrix} 5-i \\ 2 \end{pmatrix}$. On pose alors $u_1 = \mathcal{R}e(u) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \mathcal{I}m(u) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme la famille (u_1, u_2) a pour déterminant $2 \neq 0$ dans la base canonique, la famille (u_1, u_2) constitue une base de $\mathbb{R}^2$. En prenant les parties réelles et imaginaires de la relation $Au = (2+i)u$, on trouve que $Au_1 = 2u_1 - u_2$ et $Au_2 = u_1 + 2u_2$.

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application dérivable. On décompose Φ dans la base (u_1, u_2) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(t) = \varphi_1(t)u_1 + \varphi_2(t)u_2.$$

On pose, pour tout nombre réel t, $z(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$. L'application Φ est solution du système proposé si et seulement si

$$(*)\ \forall t \in \mathbb{R},\ \Phi'(t) = A\Phi(t).$$

On a

$$
\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_1'(t)u_1 + \varphi_2'(t)u_2 = \varphi_1(t)(2u_1 - u_2) + \varphi_2(t)(u_1 + 2u_2) \\
&\iff \quad \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{lcl} \varphi_1'(t) & = & 2\varphi_1(t) + \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) & = & -\varphi_1(t) + 2\varphi_2(t) \end{array} \right. \\
&\iff \quad \forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = (2-i)z(t) \\
&\iff \quad \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = (C_1 + iC_2)e^{(2-i)t} \\
&\iff \quad \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{lcl} \varphi_1(t) & = & \mathcal{R}e(z(t)) = e^{2t}(C_1\cos(t) + C_2\sin(t)) \\ \varphi_2(t) & = & \mathcal{I}m(z(t)) = e^{2t}(-C_1\sin(t) + C_2\cos(t)) \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système proposé est

$$
\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & e^{2t}\begin{pmatrix} (5C_1 - C_2)\cos(t) + (5C_2 + C_1)\sin(2t) \\ 2(C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)) \end{pmatrix} \end{array} \ \middle|\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.
$$

Prenons $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$. Alors $\lim\limits_{t \to +\infty} |z(t)| = +\infty$ donc

$$
\lim_{t \to +\infty} \|\Phi(t)\| = +\infty.
$$

L'origine n'est donc pas stable.

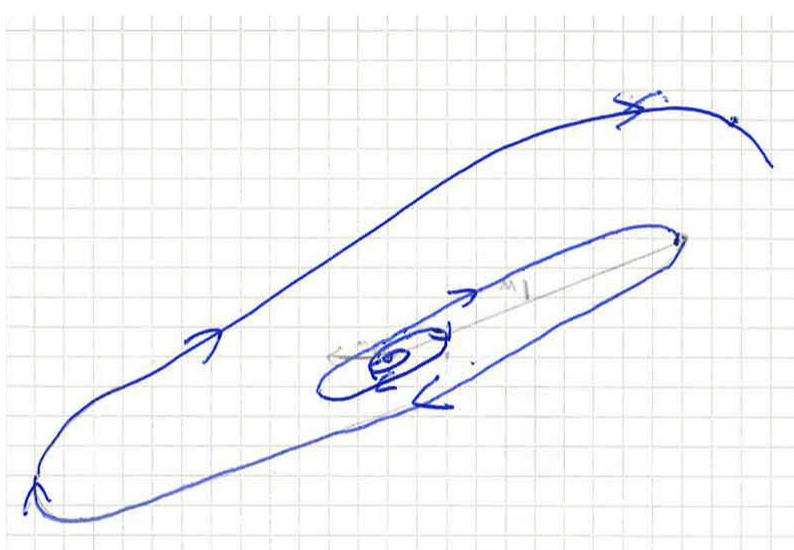
Portrait de phase : on reprend les notations précédentes. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$
|z(t)| = |C_1 + iC_2|e^{2t}
$$

. Le module est croissant et tend vers 0 lorsque $t \to -\infty$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$
arg(z(t)) = arg(C_1 + iC_2) - t
$$

donc l'argument est décroissant : les trajectoires solutions tournent dans le sens opposé du sens donné par l'orientation de la base (u_1, u_2), donc dans le sens indirect.



6 Séance 6

Exercice d'entraînement 6.1. Pour chacun des systèmes différentiels suivants, déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel proposé, tracer le portrait de phase associé à ce système différentiel et étudier la stabilité de l'origine.

1. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & 2y \\ y' & = & -2x & - & 3y \end{array}\right.$ 2. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & x & - & y \\ y' & = & 2x & - & 2y \end{array}\right.$ 3. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & -x & & \\ y' & = & x & - & y \end{array}\right.$

Correction : 1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = (X-1)(X+3) + 4 = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2.$$

A admet une unique valeur propre : -1.

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre -1. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A + I_2) & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 2y & = & 0 \\ -2x & - & 2y & = & 0 \end{array}\right. \\ & \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 2y = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\ & \iff & y = -x \\ & \iff & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Posons $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \ker(A+I_2)$ et $u = (A+I_2)v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $Au = -u$ et $Av = u - v$. De plus le déterminant de la famille (u, v) dans la base canonique est $1 \neq 0$ donc (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application dérivable. On décompose Φ dans la base (u, v) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(t) = \varphi_1(t)u + \varphi_2(t)v.$$

L'application Φ est solution du système proposé si et seulement si

$$(*)\ \forall t \in \mathbb{R},\ \Phi'(t) = A\Phi(t).$$

On a

$$\begin{array}{rcl} (*) & \iff & \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_1'(t)u + \varphi_2'(t)v = \varphi_1(t)(-u) + \varphi_2(t)(u - v) \\ & \iff & \forall t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} \varphi_1'(t) & = & -\varphi_1(t) + \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) & = & -\varphi_2(t) \end{array}\right. \\ & \iff & \exists C_2 \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} \varphi_1'(t) & = & -\varphi_1(t) + C_2 e^{-t} \\ \varphi_2(t) & = & C_2 e^{-t} \end{array}\right. \\ & \iff & \exists C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\left(e^t \varphi_1(t)\right) & = & C_2 \\ \varphi_2(t) & = & C_2 e^{-t} \end{array}\right. \\ & \iff & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\varphi_1(t) & = & (C_1 + C_2 t)e^{-t} \\ \varphi_2(t) & = & C_2 e^{-t} \end{array}\right. \end{array}$$

L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système différentiel est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-t}\begin{pmatrix} 2C_1 + 2C_2 t + C_2 \\ -2C_1 - 2C_2 t \end{pmatrix} \end{array} \;\middle|\; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Pour toute solution Φ du système proposé, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi(t) = 0$ donc l'origine est asymptotiquement stable.

Portrait de phase : Si $C_2 = 0$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) = C_1 e^{-t} u$.

Si $C_2 \neq 0$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_1'(t) = (C_2 - C_1 - C_2 t)e^{-t}$. On en déduit les tableaux de variations suivants.

Si $C_2 > 0$

	$-\infty$		$\frac{C_2-C_1}{C_2}$		$+\infty$
signe de $\varphi_1'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ_1	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi_1(\frac{C_2-C_1}{C_2})$	$\searrow$	0
Variations de φ_2	$+\infty$		$\searrow$		0

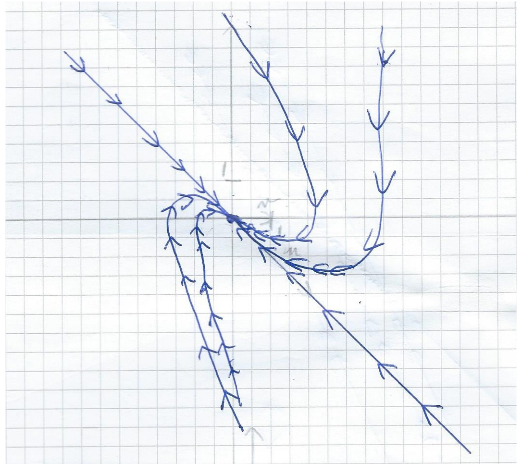
Si $C_2 < 0$

	$-\infty$		$\frac{C_2-C_1}{C_2}$		$+\infty$
signe de $\varphi_1'(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de φ_1	$+\infty$	$\searrow$	$\varphi_1(\frac{C_2-C_1}{C_2})$	$\nearrow$	0
Variations de φ_2	$-\infty$		$\nearrow$		0

Enfin

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} = 0$$

donc les trajectoires sont tangentes en l'origine à la droite dirigée par le vecteur u.



2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = (X-1)(X+2) + 2 = X^2 + X = X(X+1).$$

A admet 0 et -1 pour valeurs propres.

Déterminons les espaces propres de A. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A) \quad & \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ 2x & - & 2y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff \quad y = x \\
& \iff \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(u).
\end{aligned}$$

avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A + I_2) \quad & \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 0 \\ 2x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & y = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff \quad y = 2x \\
& \iff \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(v).
\end{aligned}$$

avec $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Comme les vecteurs u et v appartiennent à des sous-espaces propres distincts, la famille (u, v) est libre. Comme elle est constituée de $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ vecteurs, cette famille constitue une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application dérivable. On pose :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(t) = \varphi_1(t)u + \varphi_2(t)v.$$

L'application Φ est solution du système proposé si et seulement si

$$(*)\ \forall t \in \mathbb{R},\ \Phi'(t) = A\Phi(t).$$

On a

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_1'(t)u + \varphi_2'(t)v = \varphi_2(t)(-v) \\
&\iff \quad \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1'(t) & = & 0 \\ \varphi_2'(t) & = & -\varphi_2(t) \end{array} \right. \\
&\iff \quad \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1(t) & = & C_1 \\ \varphi_2(t) & = & C_2 e^{-t} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système différentiel est donc

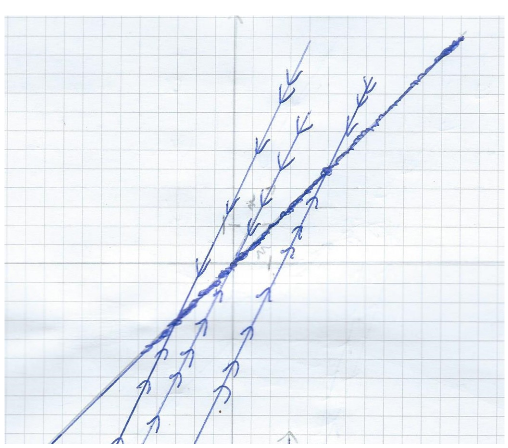
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} C_1 + C_2 e^{-t} \\ C_1 + 2C_2 e^{-t} \end{pmatrix} \end{array} \ \middle|\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Soit $\Phi : t \mapsto C_1 u + C_2 e^{-t} v$ une solution définie sur $\mathbb{R}$ du système différentiel. Pour tout $t \geq 0$

$$\|\Phi(t)\| \leq |C_1|\,\|u\| + |C_2| e^{-t}\,\|v\| \leq |C_1|\,\|u\| + |C_2|\,\|v\|$$

donc l'origine est stable. Néanmoins, si l'on prend $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) \neq 0$ donc l'origine n'est pas asymptotiquement stable.

Portrait de phase : Notons $(\tilde{x}, \tilde{y})$ les coordonnées dans la base (u, v). La première coordonnée φ_1 des trajectoires est constante donc les trajectoires sont incluses dans les droites d'équations $\tilde{x} = constante$. Par ailleurs, la deuxième coordonnée φ_2 des trajectoires est monotone et tend vers 0 en $+\infty$.



3. *On a ici un système triangulaire inférieur donc il n'y a nul besoin de réduire la matrice du système.*

Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

une application dérivable.

L'application Φ est solution du système différentiel proposé si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1'(t) & = & -\varphi_1(t) \\ \varphi_2'(t) & = & \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \end{array} \right. ,$$

ce qui équivaut à

$$\exists C_1 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1(t) & = & C_1 e^{-t} \\ \varphi_2'(t) & = & -\varphi_2(t) + C_1 e^{-t} \end{array} \right. ,$$

que l'on peut réécrire

$$\exists C_1 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1(t) & = & C_1 e^{-t} \\ \frac{d}{dt}(e^t \varphi_2(t)) & = & C_1 \end{array} \right. ,$$

ce qui est équivalent à

$$\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1(t) & = & C_1 e^{-t} \\ \varphi_2(t) & = & (C_1 t + C_2) e^{-t} \end{array} \right. .$$

L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système proposé est donc

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} \\ (C_1 t + C_2) e^{-t} \end{pmatrix} \end{array} \ \middle|\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Ainsi, pour toute solution Φ de ce système différentiel, on a

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = 0.$$

L'origine est donc asymptotiquement stable.

Portrait de phase : Si $C_1 = 0$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) = C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $C_1 \neq 0$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_2'(t) = (C_1 - C_2 - C_1 t)e^{-t}$. On en déduit les tableaux de variations suivants.

Si $C_1 > 0$

	$-\infty$		$\frac{C_1 - C_2}{C_1}$		$+\infty$
signe de $\varphi_2'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ_2	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi_2(\frac{C_1 - C_2}{C_1})$	$\searrow$	0
Variations de φ_1	$+\infty$		$\searrow$		0

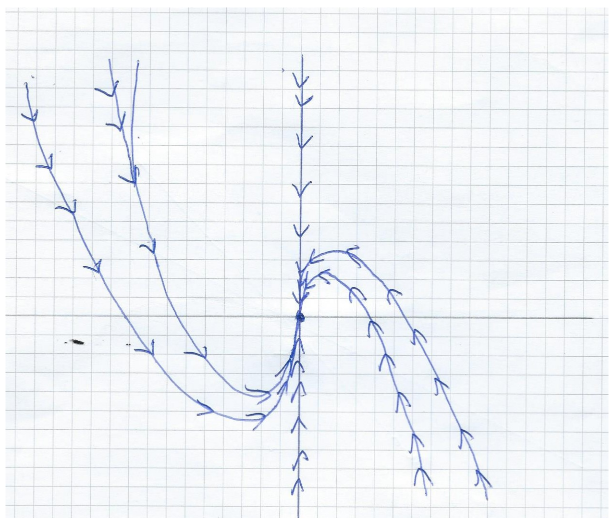
Si $C_1 < 0$

	$-\infty$		$\frac{C_1-C_2}{C_1}$		$+\infty$
signe de $\varphi_2'(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de φ_2	$+\infty$	$\searrow$	$\varphi_2(\frac{C_1-C_2}{C_1})$	$\nearrow$	0
Variations de φ_1	$-\infty$		$\nearrow$		0

Enfin

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} = 0$$

donc les trajectoires sont tangentes en l'origine à l'axe des ordonnées.



7 Séance 7

Exercice d'entraînement 7.1. Soit θ un nombre réel non-nul. Notons A et B les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$e^{A+B} \neq e^A e^B.$$

Correction : Remarquons que les matrices A^2 et B^2 sont nulles donc

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$e^B = I_2 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $C = A + B$ et calculons e^{A+B}.

Le polynôme caractéristique de C est

$$\chi_C(X) = X^2 + \theta^2 = X^2 - (i\theta)^2 = (X - i\theta)(X + i\theta).$$

Calculons le sous-espace propre de C associé à la valeur propre $i\theta$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A - i\theta I_2) \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -i\theta x - \theta y & = & 0 \\ \theta x - i\theta y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 + iL_2}{\Leftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ \theta x - i\theta y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad x = iy \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(u),
\end{aligned}$$

avec $u = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. Posons $v = \overline{u} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$. En conjuguant la relation $Au = i\theta u$, comme la matrice A est à coefficients réels, on obtient que $Av = -i\theta v$. Comme u et v sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes, alors la famille (u, v) est libre. Comme elle est constituée de $2 = \dim(\mathbb{C}^2)$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{C}^2$. La matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v) est

$$P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, par changement de base, $C = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}$ et

$$e^C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} C^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} PD^nP^{-1} = Pe^DP^{-1}.$$

Or

$$e^D = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} D^n = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-i\theta)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} t_{com(P)} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

d'où, après calcul des produits matriciels,

$$e^C = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) & -e^{i\theta} + e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} & i(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Or $e^A e^B = \begin{pmatrix} 1-\theta^2 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$. Si l'on avait $e^C = e^A e^B$, en regardant le coefficient en bas à droite, on voit que $\cos(\theta) = 1$ donc $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En regardant le coefficient en haut à droite, ceci implique que $\theta = 0$, en contradiction avec l'hypothèse faite sur θ. Ainsi, $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Dans le cas particulier de cet exercice, on pouvait aussi calculer e^C directement en utilisant la définition de e^C et en reconnaissant les développements en série entière du sinus et du cosinus.

8 Séance 8

Exercice d'entraînement 8.1. Mêmes questions avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en remarquant que $(A + 2I_3)^3 = 0$

Correction : Comme le polynôme $(X+2)^3$ est un polynôme annulateur de A, alors A admet -2 comme unique valeur propre. Déterminons le sous-espace propre associé. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{rcl}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A+2I_3) & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
L_2 \leftarrow L_2 + L_3 & & \\
L_1 \leftarrow L_1 - L_3 & & \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & -2y & + & 2z & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & & \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & 0 & = & 0 \\ & & -2y & + & 2z & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & z \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(u).
\end{array}$$

avec $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons maintenant un vecteur v non-nul de sorte que $Av = u - 2v$. *Le système linéaire à résoudre aura le même membre de gauche que le système ci-dessus, ce qui rend le calcul plus simple.*

$$(A+2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=u \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -1\\ -x & - & 2y & + & z & = & 1\\ x & & & + & z & = & 1\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} L_2 & \leftarrow & L_2+L_3\\ L_1 & \leftarrow & L_1-L_3\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & - & 2z & = & -2\\ & & -2y & + & 2z & = & 2\\ x & & & + & z & = & 1\end{array}\right.$$

$$L_1 \leftarrow L_1+L_2$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & & & 0 & = & 0\\ & & -2y & + & 2z & = & 2\\ x & & & + & z & = & 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-z\\ y & = & -1+z\end{array}\right.$$

Il suffit de prendre $v=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et on aura $Av=u-2v$. Pour terminer la réduction de la matrice A, il nous reste à déterminer un vecteur w non-nul tel que $Aw=-2w+v$. On a

$$(A+2I_2)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=v \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1\\ -x & - & 2y & + & z & = & -1\\ x & & & + & z & = & 0\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} L_2 & \leftarrow & L_2+L_3\\ L_1 & \leftarrow & L_1-L_3\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & - & 2z & = & 1\\ & & -2y & + & 2z & = & -1\\ x & & & + & z & = & 0\end{array}\right.$$

$$L_1 \leftarrow L_1+L_2$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & & & 0 & = & 0\\ & & -2y & + & 2z & = & -1\\ x & & & + & z & = & 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z\\ y & = & 1/2+z\end{array}\right.$$

On peut prendre $w=\begin{pmatrix}0\\1/2\\0\end{pmatrix}$.

Montrons que la famille (u,v,w) est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ et supposons que $\lambda_1u+\lambda_2v+\lambda_3w=0$. Alors

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0\\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 1/2\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & & & & & = & 0\end{array}\right.$$

donc $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Comme la famille (u,v,w) est libre et constituée de $3=\dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs, cette famille constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

1. *Pour cette première méthode, il s'agit d'appliquer le théorème 2.12. du polycopié. Pour ce faire, on cherche à calculer* e^{tA}*, pour tout nombre réel* t*.*

La matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v, w) est

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a $A = PTP^{-1}$, avec

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout nombre réel t, comme $tA = PtTP^{-1}$, alors $e^{tA} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P(tT)^n P^{-1} = Pe^{tT}P^{-1}$.

Remarquons que les matrices $D = -2I_3$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tT} = e^{t(D+N)} = e^{tD}e^{tN}$. Or, comme $N^3 = 0$, alors

$$e^{tN} = I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus

$$e^{tD} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(tD)^n = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$e^{tT} = e^{tN}e^{tD} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$Pe^{tT} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 & 1-t & t - \frac{t^2}{2} \\ 1 & t-1 & \frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2} \\ 1 & t & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système proposé est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & e^{tA}X \end{array} \;\middle|\; X \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & Pe^{tT}P^{-1}X \end{array} \;\middle|\; X \in \mathbb{R}^3 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & Pe^{tT}Y \end{array} \;\middle|\; Y \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

car l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & P^{-1}X \end{array}$$

est bijective. Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & e^{-2t}\begin{pmatrix} -y_1+(1-t)y_2+(t-\frac{t^2}{2})y_3 \\ y_1+(t-1)y_2+(1/2-t+\frac{t^2}{2})y_3 \\ y_1+ty_2+\frac{t^2}{2}y_3 \end{pmatrix} \end{array} \ \middle|\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

2. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. On décompose Φ dans la base (u, v, w) : $\Phi = \varphi_1 u + \varphi_2 v + \varphi_3 w$.

L'application Φ est solution du système différentiel proposé si et seulement si

$$(*)\ \forall t \in \mathbb{R},\ \Phi'(t) = A\Phi(t).$$

On a

$$\begin{array}{cll} (*) & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_1'(t)u + \varphi_2'(t)v + \varphi_1'(t)w = -2\varphi_1(t)u + \varphi_2(t)(u-2v) + \varphi_3(t)(v-2w) \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1'(t) & = & -2\varphi_1(t) + \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) & = & -2\varphi_2(t) + \varphi_3(t) \\ \varphi_3'(t) & = & -2\varphi_3(t) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \exists C_3 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}(\varphi_1(t)e^{2t}) & = & \varphi_2(t)e^{2t} \\ \frac{d}{dt}(\varphi_2(t)e^{2t}) & = & C_3 \\ \varphi_3(t) & = & C_3 e^{-2t} \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \exists (C_2, C_3) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}(\varphi_1(t)e^{2t}) & = & C_2 + C_3 t \\ \varphi_2(t) & = & (C_2 + C_3 t)e^{-2t} \\ \varphi_3(t) & = & C_3 e^{-2t} \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1(t) & = & (C_1 + C_2 t + C_3\frac{t^2}{2})e^{-2t} \\ \varphi_2(t) & = & (C_2 + C_3 t)e^{-2t} \\ \varphi_3(t) & = & C_3 e^{-2t} \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système différentiel proposé est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (C_1 + C_2 t + C_3\frac{t^2}{2})e^{-2t}u + (C_2 + C_3 t)e^{-2t}v + C_3 e^{-2t}w \end{array} \ \middle|\ (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

que l'on peut réécrire

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & e^{-2t}\begin{pmatrix} C_2 - C_1 + (C_3 - C_2)t - C_3\frac{t^2}{2} \\ C_1 - C_2 + C_3/2 + (C_2 - C_3)t + C_3\frac{t^2}{2} \\ C_1 + C_2 t + C_3\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \end{array} \ \middle|\ (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

On trouve bien le même ensemble de solution qu'à la question précédente. Noter que l'on aurait pu trouver un ensemble écrit différemment si l'on avait choisi différemment les vecteurs v et w.

9 Séance 9

Exercice d'entraînement 9.1. On note (E_0) l'équation différentielle

$$y^{(3)} - 3y^{(2)} + 3y' - y = 0.$$

1. Écrire un système différentiel (S) d'ordre 1 dont la résolution est équivalente à la résolution de (E_0).
2. En étudiant le système (S), retrouver l'ensemble des solutions à valeurs complexes de (E_0).

Correction : 1. Pour résoudre l'équation différentielle (E_0), il suffit de résoudre le système différentiel

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} y_0' & = & y_1 \\ y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & 3y_2 - 3y_1 + y_0 \end{array}\right.$$

En effet si φ est solution de (E_0), alors $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \varphi^{(2)}(t) \end{pmatrix}$ est solution de (S) et, réciproquement, si $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$ est solution de (S), alors $\varphi_1 = \varphi_0'$, $\varphi_2 = \varphi_0''$ et φ_0 est solution de (E_0).

2. Résolvons donc le système (S). La première composante des solutions de (S) nous donnera ensuite les solutions de (E).

Pour ce faire, nous allons réduire la matrice A. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{array}{rcl} \chi_A(X) & = & \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 3 & X-3 \end{vmatrix} \\ & = & X \begin{vmatrix} X & -1 \\ 3 & X-3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} \\ & = & X(X(X-3)+3)+1 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 \\ & = & (X-1)^3. \end{array}$$

A n'admet qu'une valeur propre : 1. Déterminons le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I_3) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & & & = & 0 \\ & & -y & + & z & = & 0 \\ & & -2y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & & & = & 0 \\ & & -y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}(u).$$

avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons un vecteur $v \in \mathbb{C}^3$ non-nul tel que $Av = u + v$. On a

$$(A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & & & = & 1 \\ & - & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right.$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & & & = & 1 \\ & & -y & + & z & = & 1 \\ & & -2y & + & 2z & = & 2 \end{array} \right.$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & & & = & 1 \\ & & -y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + y \\ z & = & 1 + y \end{array} \right.$$

On peut prendre $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour terminer la réduction de A, déterminons un vecteur w de $\mathbb{C}^3$ tel que $Aw = v + w$. On a

$$(A-I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=v \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & & & = & -1\\ & - & y & + & z & = & 0\\ x & - & 3y & + & 2z & = & 1\end{array}\right.$$

$$L_3 \leftarrow L_3+L_1$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & & & = & -1\\ & & -y & + & z & = & 0\\ & & -2y & + & 2z & = & 0\end{array}\right.$$

$$L_3 \leftarrow L_3-2L_2$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & & & = & -1\\ & & -y & + & z & = & 0\\ & & & & 0 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+y\\ z & = & y\end{array}\right.$$

On peut prendre $w=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Le déterminant de la famille (u,v,w) dans la base canonique vaut $\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{vmatrix}=1$ donc la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{C}^3$.

Soit $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^3$, une application dérivable. On pose, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\Phi(t)=\varphi_1(t)u+\varphi_2(t)v+\varphi_3(t)w.$$

L'application Φ est solution du système différentiel (S) si et seulement si

$$(*)\ \forall t\in\mathbb{R}, \Phi'(t)=A\Phi(t).$$

On a

$$\begin{array}{rl}
(*) \Leftrightarrow & \forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_1'(t)u+\varphi_2'(t)v+\varphi_3'(t)w=\varphi_1(t)u+\varphi_2(t)(u+v)+\varphi_3(t)(v+w)\\
\Leftrightarrow & \forall t\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl}\varphi_1'(t) & = & \varphi_1(t)+\varphi_2(t)\\ \varphi_2'(t) & = & \varphi_2(t)+\varphi_3(t)\\ \varphi_3'(t) & = & \varphi_3(t)\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow & \exists C_3\in\mathbb{C},\ \forall t\in\mathbb{R},\left\{\begin{array}{rcl}\frac{d}{dt}(\varphi_1(t)e^{-t}) & = & \varphi_2(t)e^{-t}\\ \frac{d}{dt}(\varphi_2(t)e^{-t}) & = & C_3\\ \varphi_3(t) & = & C_3e^t\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow & \exists (C_2,C_3)\in\mathbb{C}^2,\ \forall t\in\mathbb{R},\left\{\begin{array}{rcl}\frac{d}{dt}(\varphi_1(t)e^{-t}) & = & C_2+C_3t\\ \varphi_2(t) & = & (C_2+C_3t)e^t\\ \varphi_3(t) & = & C_3e^t\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow & \exists (C_1,C_2,C_3)\in\mathbb{C}^3,\ \forall t\in\mathbb{R},\left\{\begin{array}{rcl}\varphi_1(t) & = & (C_1+C_2t+C_3\frac{t^2}{2})e^t\\ \varphi_2(t) & = & (C_2+C_3t)e^t\\ \varphi_3(t) & = & C_3e^t\end{array}\right.
\end{array}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes de (S) est

$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C}^3\\ t & \mapsto & (C_1+C_2t+C_3\frac{t^2}{2})e^tu+(C_2+C_3t)e^tv+C_3e^tw\end{array}\ \middle|\ (C_1,C_2,C_3)\in\mathbb{C}^3\right\}.$$

En prenant la première composante dans la base canonique des solutions ci-dessus, on détermine l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes de l'équation différentielle (E_0) qui est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (C_1 + C_2 t + C_3 \frac{t^2}{2})e^t - (C_2 + C_3 t)e^t + C_3 e^t \end{array} \,\middle|\, (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{C}^3 \right\}$$

que l'on peut réécrire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & ((C_1 - C_2 + C_3) + (C_2 - C_3)t + C_3 \frac{t^2}{2})e^t \end{array} \,\middle|\, (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{C}^3 \right\}.$$

Comme l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ (C_1, C_2, C_3) & \mapsto & (C_1 - C_2 + C_3, C_2 - C_3, \frac{C_3}{2}) \end{array}$$

a pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}1 \end{pmatrix}$ qui a pour déterminant $\frac{1}{2}$, cette application est bijective. On peut donc réécrire l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E_0) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)e^t \end{array} \,\middle|\, (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{C}^3 \right\}.$$

Comme le polynôme caractéristique de l'équation différentielle (E_0) est $(X-1)^3$, on retrouve ici l'ensemble des solutions voulu.

10 Séance 10

Exercice d'entraînement 10.1. Déterminer l'ensemble des solutions (définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles) des équations différentielles suivantes.

$$(E_1)\ \begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(E_2)\ y'' - 2y' + 10y = 0.$$

$$(E_3)\ \begin{cases} y'' - 3y' = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

$$(E_4)\ y^{(3)} - 2y'' - 7y' - 4y = 0 \quad (E_5)\ y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \quad (E_6)\ y^{(4)} - y^{(3)} + 4y'' - 4y' = 0.$$

Correction : *Dans cet exercice, il s'agit essentiellement d'appliquer le théorème 2.17 du polycopié de cours.*

L'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ a pour polynôme caractéristique $X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$ donc l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de cette équation est l'ensemble des applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} \end{array},$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. Une telle application φ vérifie $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} C_1 & = & 1 \\ -C_1 + C_2 & = & 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire que $C_1 = C_2 = 1$. L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E_1) est donc le singleton

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-t} + t e^{-t} \end{array} \right\}.$$

Le polynôme caractéristique de l'équation (E_2) est

$$X^2 - 2X + 10 = (X-1)^2 + 9 = (X-1)^2 - (3i)^2 = (X - 1 - 3i)(X - 1 + 3i).$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E_2) est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C_1 e^t \cos(3t) + C_2 e^t \sin(3t) \end{array} \ \middle|\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Le polynôme carctéristique de l'équation différentielle $y'' - 3y' = 0$ est $X^2 - 3X = X(X-3)$ donc l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle est l'ensemble des applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C_1 + C_2 e^{3t} \end{array},$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. Une telle solution φ vérifie $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(1) = 0$ si et seulement

$$\begin{cases} C_1 + C_2 e^3 & = & 1 \\ 3C_2 e^3 & = & 0 \end{cases}$$

Cela revient à dire que $C_2 = 0$ et $C_1 = 1$. L'ensemble recherché est donc

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 \end{array} \right\}.$$

On anticipe ici sur la suite du cours et on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz. On aurait pu directement voir que la fonction constante égale à 1 est solution du problème de Cauchy (E_3) et appliquer l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz pour en déduire que c'est l'unique solution.

Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle (E_4) est

$$\begin{array}{rcl} X^3 - 2X^2 - 7X - 4 & = & (X+1)(X^2 - 3X - 4) \\ & = & (X+1)((X - \frac{3}{2})^2 - 25/4) \\ & = & (X+1)(X - \frac{3}{2} - \frac{5}{2})(X - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}) \\ & = & (X+1)^2(X-4). \end{array}$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E_4) est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 e^{4t} \end{array} \;\middle|\; (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle (E_5) est

$$\begin{array}{rcl} X^4 + 2X^2 + 1 & = & (X^2+1)^2 \\ & = & (X^2 - i^2)^2 \\ & = & (X-i)^2(X+i)^2. \end{array}$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E_5) est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C_1 \cos(t) + C_2 t \cos(t) + C_3 \sin(t) + C_4 t \sin(t) \end{array} \;\middle|\; (C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle (E_6) est

$$\begin{array}{rcl} X^4 - X^3 + 4X^2 - 4X & = & X(X^3 - X^2 + 4X - 4) \\ & = & X(X-1)(X^2+4) \\ & = & X(X-1)(X^2 - (2i)^2) \\ & = & X(X-1)(X-2i)(X+2i) \end{array}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E_6) est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C_1 + C_2 e^t + C_3 \cos(2t) + C_4 \sin(2t) \end{array} \;\middle|\; (C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

11 Séance 11

Exercice d'entraînement 11.1. 1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ l'équation différentielle (E) suivante

$$x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0.$$

On pourra poser $x = -e^t$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

2. En déduire l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E).

Correction : *On suit la méthode décrite par l'énoncé de l'exercice 11.1. En particulier, on posera $z(t) = y(e^t)$. On raisonne ici par analyse synthèse. On suppose dans un premier temps que l'on dispose d'une solution de (E) et on en déduit une expression de cette solution. On vérifie ensuite que les expressions trouvées définissent bien des solutions de (E).*

Déterminons les solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E). Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une solution de (E). On note ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi(t) = \varphi(e^t).$$

Par composition de fonctions dérivables, la fonction ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \psi'(t) & = & e^t\varphi'(e^t) \\ \psi''(t) & = & e^t\varphi'(e^t) + e^{2t}\varphi''(e^t) \end{array}\right.$$

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi''(t) + \psi(t) = (e^t)^2\varphi''(e^t) + e^t\varphi'(e^t) + \varphi(e^t) = 0.$$

Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est $X^2 + 1 = X^2 - i^2 = (X - i)(X + i)$. On en déduit qu'il existe des constantes réelles C_1 et C_2 telles que, pour tout réel t,

$$\psi(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t).$$

Par conséquent, pour tout $x > 0$,

$$\varphi(x) = \varphi(e^{\ln(x)}) = C_1\cos(\ln(x)) + C_2\sin(\ln(x)).$$

Réciproquement, soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme ci-dessus. Alors φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi'(x) & = & -\frac{C_1}{x}\sin(\ln(x)) + \frac{C_2}{x}\cos(\ln(x)) \\ \varphi''(x) & = & \frac{C_1 - C_2}{x^2}\sin(\ln(x)) + \frac{-C_1 - C_2}{x^2}\cos(\ln(x)). \end{array}\right.$$

Par conséquent, pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{array}{rcl} x^2\varphi''(x) + x\varphi'(x) + \varphi(x) & = & (C_1 - C_2)\sin(\ln(x)) + (-C_1 - C_2)\cos(\ln(x)) - C_1\sin(\ln(x)) + C_2\cos(\ln(x)) + \\ & = & 0. \end{array}$$

La fonction φ est donc solution de (E). Les solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) sont par conséquent les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C_1\cos(\ln(x)) + C_2\sin(\ln(x)) \end{array}$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminons maintenant les solutions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation différentielle (E). Soit $\varphi : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ une solution de (E). On note ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi(t) = \varphi(-e^t).$$

Par composition de fonctions dérivables, la fonction ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \psi'(t) &= -e^t\varphi'(-e^t) \\ \psi''(t) &= -e^t\varphi'(-e^t) + e^{2t}\varphi''(e^t) \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi''(t) + \psi(t) = (-e^t)^2\varphi''(-e^t) + (-e^t)\varphi'(-e^t) + \varphi(-e^t) = 0.$$

On en déduit comme dans le cas précédent qu'il existe des constantes réelles C_1 et C_2 telles que, pour tout réel t,

$$\psi(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t).$$

Par conséquent, pour tout $x < 0$,

$$\varphi(x) = \varphi(-e^{\ln(-x)}) = C_1\cos(\ln(-x)) + C_2\sin(\ln(-x)).$$

Réciproquement, soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}_-^*$ de la forme ci-dessus. Alors φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et, pour tout $x < 0$,

$$\begin{cases} \varphi'(x) &= -\frac{C_1}{x}\sin(\ln(-x)) + \frac{C_2}{x}\cos(\ln(-x)) \\ \varphi''(x) &= \frac{C_1 - C_2}{x^2}\sin(\ln(-x)) + \frac{-C_1-C_2}{x^2}\cos(\ln(-x)). \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $x < 0$, on a

$$x^2\varphi''(x) + x\varphi'(x) + \varphi(x) \quad = \quad 0.$$

La fonction φ est donc solution de (E). Les solutions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ de (E) sont par conséquent les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C_1\cos(\ln(-x)) + C_2\sin(\ln(-x)) \end{array}$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, il existe des constantes réelles C_1, C_2, C_1' et C_2' telles que, pour tout $x > 0$

$$\varphi(x) = C_1\cos(\ln(x)) + C_2\sin(\ln(x))$$

et, pour tout $x < 0$,

$$\varphi(x) = C_1'\cos(\ln(-x)) + C_2'\sin(\ln(-x)).$$

Comme φ est continue en 0, alors

$$\lim_{x\to 0^+} C_1\cos(\ln(x)) + C_2\sin(\ln(x)) = \varphi(0).$$

Ainsi,

$$\varphi(0) = \lim_{n\to+\infty} C_1\cos(\ln(e^{-2n\pi})) + C_2\sin(\ln(e^{-2n\pi})) = C_1$$

et
$$\varphi(0)=\lim_{n\to+\infty} C_1\cos(\ln(e^{-2n\pi+\pi/2}))+C_2\sin(\ln(e^{-2n\pi}+\pi/2))=C_2$$
donc
$$\varphi(0)=\lim_{n\to+\infty} C_1\cos(\ln(e^{-2n\pi+\pi/3}))+C_2\sin(\ln(e^{-2n\pi}+\pi/3))=\frac{C_1}{2}+C_2\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\varphi(0)$$
et $\varphi(0)=0=C_1=C_2$ donc $\varphi_{|\mathbb{R}_+}$ est la fonction nulle. De la même manière, on montre que $\varphi_{|\mathbb{R}_-}$ est la fonction nulle donc φ est la fonction nulle. Réciproquement, la fonction nulle est bien une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E). Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E) est le singleton
$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 0\end{array}\right\}.$$

12 Séance 12

Exercice d'entraînement 12.1. En utilisant l'exercice précédent, déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel suivant
$$\left\{\begin{array}{ccccc}(1+t^2)x' & = & tx & + & y\\ (1+t^2)y' & = & -x & + & ty\end{array}\right.$$

Le système différentiel proposé peut se réécrire
$$\left\{\begin{array}{ccccc}x' & = & \frac{t}{1+t^2}x & + & \frac{1}{1+t^2}y\\ y' & = & \frac{-1}{1+t^2}x & + & \frac{t}{1+t^2}y\end{array}\right. .$$
Posons, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $A(t)=\begin{pmatrix}\frac{t}{1+t^2} & \frac{1}{1+t^2}\\ \frac{-1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2}\end{pmatrix}$. Pour tous réels t et s, on a
$$A(t)A(s)=\begin{pmatrix}\frac{ts-1}{(1+t^2)(1+s^2)} & \frac{t+s}{(1+t^2)(1+s^2)}\\ \frac{-s-t}{(1+t^2)(1+s^2)} & \frac{ts-1}{(1+t^2)(1+s^2)}\end{pmatrix}=A(s)A(t).$$

On est donc dans le cadre d'application des résultats de l'exercice 12.1. On veut donc calculer, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $e^{\int_0^t A(s)ds}$. Soit $t\in\mathbb{R}$. On a
$$B(t)=\int_0^t A(s)ds=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\ln(1+t^2) & \arctan(t)\\ -\arctan(t) & \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(t) & \beta(t)\\ -\beta(t) & \alpha(t)\end{pmatrix}.$$

Remarquons que, pour $t=0$, $B(0)$ est la matrice nulle donc son exponentielle est la matrice identité. Prenons $t\neq 0$, de sorte que $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ ne s'annulent pas. Pour calculer l'exponentielle de la matrice $B(t)$, on va réduire cette matrice (on omet les t pour alléger les notations). Le polynôme caractéristique de B est
$$\chi_B(X)=(X-\alpha)^2+\beta^2=(X-\alpha)^2-(i\beta)^2=(X-\alpha-i\beta)(X-\alpha+i\beta).$$
Les valeurs propres de B sont $\alpha+i\beta$ et $\alpha-i\beta$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. On a

$$\begin{array}{lcl} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(B-(\alpha+i\beta)I_2) & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -i\beta x & + & \beta y & = & 0 \\ -\beta x & - & i\beta y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{\Leftrightarrow}{L_2 \leftarrow L_2 + iL_1} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -i\beta x & + & \beta y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & y = ix \end{array}$$

car $\beta \neq 0$. On pose alors $u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in \ker(B-(\alpha+i\beta)I_2)$. Posons $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. En conjuguant la relation $Au = (\alpha+i\beta)u$, on obtient $Av = (\alpha-i\beta)v$. Comme u et v sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (car $\beta(t) \neq 0$), alors la famille (u,v) est libre. Comme cette famille est constituée de $2 = \dim(\mathbb{C}^2)$ vecteurs, la famille (u,v) est une base de $\mathbb{C}^2$. La matrice de passage de la base canonique vers la base (u,v) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

donc $B = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \alpha+i\beta & 0 \\ 0 & \alpha-i\beta \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^B &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} B^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} PD^nP^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(\alpha+i\beta)^n & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(\alpha-i\beta)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{\alpha+i\beta} & 0 \\ 0 & e^{\alpha-i\beta} \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

Or,

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t com(P) = \frac{-1}{2i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

d'où, après calcul,

$$e^B = \frac{-e^\alpha}{2i} \begin{pmatrix} -i(e^{i\beta}+e^{-i\beta}) & -e^{i\beta}+e^{-i\beta} \\ e^{i\beta}-e^{-i\beta} & -i(e^{i\beta}+e^{-i\beta}) \end{pmatrix} = e^\alpha \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, pour tout nombre réel t,

$$e^{\int_0^t A(s)ds} = e^{\frac{1}{2}\ln(1+t^2)} \begin{pmatrix} \cos(\arctan(t)) & \sin(\arctan(t)) \\ -\sin(\arctan(t)) & \cos(\arctan(t)) \end{pmatrix} = \sqrt{1+t^2} \begin{pmatrix} \cos(\arctan(t)) & \sin(\arctan(t)) \\ -\sin(\arctan(t)) & \cos(\arctan(t)) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, d'après le résultat de l'exercice 12.1, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système différentiel proposé est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & e^{\int_0^t A(s)ds} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \end{array} \;\middle|\; \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

que l'on peut réécrire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \sqrt{1+t^2} \begin{pmatrix} C_1 \cos(\arctan(t)) + C_2 \sin(\arctan(t)) \\ -C_1 \sin(\arctan(t)) + C_2 \cos(\arctan(t)) \end{pmatrix} \end{array} \;\middle|\; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

13 Séance 13

Exercice d'entraînement 13.1. On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle

$$(E)\ tx'' + (1-2t)x' + (t-1)x = 0.$$

1. Vérifier que la fonction exponentielle est solution de cette équation différentielle.
2. En utilisant le wronskien d'un système fondamental de solutions de (E), déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E).

Correction : 1. La fonction exponentielle est C^∞ avec $\exp' = \exp$ et $\exp'' = \exp$. Pour tout nombre réel t,

$$te^t + (1-2t)e^t + (t-1)e^t = 0$$

donc la fonction exponentielle est solution de (E).

2. Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle (E) se réécrit

$$x'' + \frac{1-2t}{t}x' + \frac{t-1}{t}x = 0.$$

On va ici raisonner par analyse-synthèse pour trouver une solution f_2 de (E) indépendante de f_1. Ceci nous permettra de conclure en utilisant le fait que l'espace des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}_+^*$ est de dimension 2.

Notons $f_1 = \exp_{|\mathbb{R}_+^*}$ et f_2 une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}_+^*$ indépendante de f_1. Notons W le wronskien du système fondamental de solutions (f_1, f_2). Par définition, X est le wronskien du système fondamental de solutions $\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix}\right)$ du système différentiel $X' = A(t)X$ avec, pour tout $t > 0$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{t} - 1 & 2 - \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Liouville, on a, pour tout $t > 0$,

$$W'(t) = Tr(A(t))W(t) = (2 - \frac{1}{t})W(t).$$

Par conséquent, il existe une constante réelle C telle que, pour tout nombre réel t,

$$W(t) = Ce^{2t-\ln(t)} = C\frac{e^{2t}}{t}.$$

En revenant à la définition du wronskien, on en déduit que, pour tout nombre réel t,

$$e^t(f_2'(t) - f_2(t)) = f_1(t)f_2'(t) - f_2(t)f_1'(t) = W(t) = C\frac{e^{2t}}{t}$$

donc, pour tout nombre réel t,

$$\frac{d}{dt}(e^{-t}f_2(t)) = \frac{C}{t}$$

donc il existe une constante réelle C_2 telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_2(t) = C \ln(t) e^t + C_2 e^t.$$

Réciproquement, on prend $C = 1$ et $C_2 = 0$ et on considère f_2 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_2(t) = \ln(t) e^t.$$

On va montrer que

1. f_2 est solution de (E). (*Bien noter que ce point n'a pas été démontré auparavant*).
2. la famille (f_1, f_2) est libre.

Comme l'espace des solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) est de dimension 2, on déduit de ces deux faits que (f_1, f_2) est une base de cet espace et l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C_1 e^t + C_2 t \ln(t) \end{array} \;\middle|\; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Notons que f_2 est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $t > 0$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_2'(t) & = & (\ln(t) + \frac{1}{t}) e^t \\ f_2''(t) & = & (\ln(t) + \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}) e^t. \end{array} \right.$$

Ainsi, pour tout $t > 0$,

$$t f_2''(t) + (1 - 2t) f_2'(t) + (t - 1) f_2(t) = e^t (t \ln(t)(1 - 2 + 1) + \ln(t)(1 - 1) + (2 - 2) + \frac{1}{t}(-1 + 1)) = 0$$

et f_2 est bien solution de (E).

Enfin, montrons que la famille (f_1, f_2) est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et supposons que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$. En évaluant en 1, on obtient que

$$\lambda_1 e^1 = \lambda_1 f_1(1) + \lambda_2 f_2(1) = 0$$

donc $\lambda_1 = 0$. Comme $f_2(2) > 0$, on en déduit en évaluant ensuite en 2 que $\lambda_2 = 0$. La famille (f_1, f_2) est donc libre.

De manière alternative à la réciproque ci-dessus, on pouvait aussi raisonner de la manière suivante. On a montré que l'espace des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ est inclus dans l'espace vectoriel engendré par f_1 et f_2. Maintenant, comme ce deuxième espace vectoriel est de dimension au plus 2 et que l'espace des solutions de (E) recherché est de dimension 2, on en déduit que ces deux espaces ont dimension 2 et sont égaux. Cette deuxième méthode a l'avantage d'âtre plus rapide mais le calcul qui démontre que f_2 est solution permet de se mettre à l'abri d'éventuelles erreurs.

14 Séance 14

Exercice d'entraînement 14.1. Rechercher des solutions de l'équation différentielle

$$(t-t^2)y''(t)+(1-3t)y'(t)-y(t)=0$$

qui sont développables en série entière au voisinage de 0. En déduire l'ensemble des solutions définies sur $]0,1[$ de cette équation.

Correction : Soit $\Sigma a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Notons S la somme de cette série entière. Alors S est C^∞ sur $]-R,R[$ et, pour tout $t\in]-R,R[$, on a

$$\begin{cases} S'(t) &= \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n-1} \\ S''(t) &= \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}. \end{cases}$$

S est solution de l'équation différentielle proposée si et seulement si, pour tout $t\in]-R,R[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n-1} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0.$$

On veut écrire cette équation sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = 0$. *L'unicité du développement en série entière de la fonction nulle nous permettra alors d'en déduire que tous ces coefficients b_n sont nuls. Pour écrire l'équation sous cette forme, on va devoir effectuer des changements d'indice dans certaines de ces sommes.*

Pour tout $t\in]-R,R[$, on a

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} &= \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)na_{n+1} t^n \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n-1} &= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} t^n. \end{cases}$$

On a posé $n'=n-1$, que l'on peut réécrire $n=n'+1$, dans chacune de ces deux sommes.

De plus, pour tout $t\in]-R,R[$,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)na_{n+1} t^n &= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1} t^n \\ \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n &= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^n &= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^n. \end{cases}$$

Ainsi S est solution de l'équation différentielle proposée si et seulement si, pour tout $t \in]-R, R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nt^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}t^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}na_nt^n - \sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n = 0,$$

c'est-à-dire que, pour tout $t \in]-R, R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)n + (n+1))a_{n+1} - (n(n-1) + 3n + 1)a_n)t^n = 0.$$

que l'on peut réécrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2(a_{n+1} - a_n)t^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, cela équivaut à dire que, pour tout entier $n \geq 0$

$$(n+1)^2(a_{n+1} - a_n) = ((n+1)n + (n+1))a_{n+1} - (n(n-1) + 3n + 1)a_n = 0$$

ou encore que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = a_n$$

c'est-à-dire que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est constante.

Pour $C \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum Ct^n$ est le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \frac{C}{1-t}$ et a rayon de convergence $1 > 0$. En particulier, d'après le raisonnement ci-dessus, la fonction $f_0 : t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est une solution définie sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle proposée.

Pour déterminer l'ensemble des solutions définies sur $]0,1[$ de l'équation différentielle, on a vu deux méthodes en TD : la technique de l'abaissement de l'ordre (cf exercice 10.2 de TD) et la méthode en utilisant le wronskien d'un système fondamental de solution (cf exercice 13.2). Ici on va trouver l'ensemble des solutions en utilisant la première méthode, mais utiliser le wronskien d'un système fondamental de solution aurait tout aussi bien marché.

Déterminons l'ensemble des solutions définies sur $]0,1[$ de l'équation différentielle. Soit $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$ une telle solution. On pose, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\varphi(t) = \lambda(t)f_0(t).$$

Ainsi, pour tout $t \in]0,1[$, $\lambda(t) = (1-t)\varphi(t)$ donc λ est dérivable sur $]0,1[$ et, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi'(t) & = & \lambda'(t)f_0(t) + \lambda(t)f_0'(t) \\ \varphi''(t) & = & \lambda''(t)f_0(t) + 2\lambda'(t)f_0'(t) + \lambda(t)f_0''(t) \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (t-t^2)\varphi''(t) + (1-3t)\varphi'(t) - \varphi(t) \\ & = & (t-t^2)\lambda''(t)f_0(t) + \lambda'(t)((1-3t)f_0(t) + 2(t-t^2)f_0'(t)) + \lambda(t)((t-t^2)f_0''(t) + (1-3t)f_0'(t) - f_0(t)) \\ & = & t\lambda''(t) + \lambda'(t)(\frac{1-3t}{1-t} + \frac{2t}{1-t}) \end{array}$$

car f_0 est solution de l'équation différentielle. λ' est donc solution de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{t}y = 0$. Par conséquent, il existe une constante réelle C_1 telle que, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\lambda'(t) = C_1e^{-\ln(t)} = \frac{C_1}{t}.$$

En intégrant, on obtient qu'il existe une constante réelle C_2 telle que, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\lambda(t) = C_1 \ln(t) + C_2.$$

Ainsi, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\varphi(t) = C_1 \frac{\ln(t)}{1-t} + \frac{C_2}{1-t}.$$

Réciproquement, soit φ une fonction de la forme ci-dessus. Alors φ est deux fois dérivable sur $]0,1[$ et, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi'(t) & = & \frac{C_1}{t(1-t)} + C_1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^2} + \frac{C_2}{(1-t)^2} \\ \varphi''(t) & = & \frac{C_1(2t-1)}{t^2(1-t)^2} + C_1 \frac{1}{t(1-t)^2} + C_1 \frac{2\ln(t)}{(1-t)^3} + 2\frac{C_2}{(1-t)^3}. \end{array} \right.$$

Par conséquent, pour tout $t \in]0,1[$

$$\begin{array}{l} (t-t^2)\varphi''(t) + (1-3t)\varphi'(t) - \varphi(t) = \frac{C_1(2t-1)}{t(1-t)} + C_1 \frac{1}{(1-t)} + C_1 \frac{2t\ln(t)}{(1-t)^2} + 2\frac{C_2 t}{(1-t)^2} \\ + \frac{C_1(1-3t)}{t(1-t)} + C_1 \frac{(1-3t)\ln(t)}{(1-t)^2} + \frac{C_2(1-3t)}{(1-t)^2} - C_1 \frac{\ln(t)}{1-t} - \frac{C_2}{1-t} \\ = \frac{C_1(2t-1+t+1-3t)}{t(1-t)} + \frac{C_1 \ln(t)(2t+1-3t-(1-t))}{(1-t)^2} + \frac{C_2(2t+1-3t-(1-t))}{(1-t)^2} \\ = 0. \end{array}$$

Ainsi, φ est solution de l'équation différentielle. L'ensemble des solutions définies sur $]0,1[$ de l'équation différentielle proposée est donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C_1 \frac{\ln(t)}{1-t} + \frac{C_2}{1-t} \end{array} \middle| \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On pouvait remplacer dans cet exercice la réciproque par l'argument suivant. L'implication directe montre que l'espace des solutions de l'équation différentielle définies sur $]0,1[$ *est inclus dans l'espace vectoriel engendré par* $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1-t}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{1-t}$*. Comme l'espace des solutions de l'équation différentielle est de dimension* 2 *et que ce deuxième espace est de dimension au plus* 2 *(il est engendré par deux fonctions), alors ces deux espaces doivent être égaux.*

15 Séance 15

Exercice d'entraînement 15.1. À l'aide de la méthode de l'équation différentielle, démontrer que la fonction exponentielle (définie comme l'application réciproque du logarithme népérien) est développable en série entière et déterminer son développement en série entière.

Correction : Quelques rappels avant de corriger cet exercice. La fonction ln peut être définie comme la primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1. Comme la fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]\lim\limits_{0^+} \ln, \lim\limits_{+\infty} \ln[=]-\infty, +\infty[$. On peut alors définir la fonction exponentielle comme la fonction réciproque de ln (c'est ce que l'on fait dans cet exercice). Ce n'est pas la définition historique mais c'est une définition courante pour les cours de L1, qui évite d'avoir à parler de série entière. Pour ce qui concerne la dérivabilité de l'exponentielle, on utilisera le théorème suivant vu en L1.

Théorème (Dérivabilité de l'application réciproque)**.** *Soit $f : I \to f(I)$ une fonction strictement monotone et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide. On suppose que*

$$\forall x \in I, f'(x) \neq 0.$$

Alors l'application $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable sur $f(I)$ et, pour tout point x de l'intervalle $f(I)$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Correction : ***Étape 1*** Comme la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour $x > 0$, $\ln'(x) = 1/x \neq 0$, alors la fonction exp est dérivable sur $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

De plus, comme $\ln(1) = 0$ par définition, alors $\exp(0) = 1$. Ainsi, la fonction exponentielle est solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & y \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right. .$$

Étape 2 Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors l'application

$$\begin{array}{rrcl} S : &]-R, R[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \end{array}$$

est dérivable sur $]-R, R[$ et, pour $t \in]-R, R[$,

$$S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n.$$

S est solution de $y' = y$ avec $S(0) = 1$ si et seulement si

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in]-R, R[, \ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ S(0) = 1. \end{array} \right.$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient

$$(*) \Leftrightarrow (R) \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \ (n+1) a_{n+1} = a_n \\ a_0 = 1. \end{array} \right.$$

Une récurrence simple montre que l'unique suite qui vérifie (R) est la suite $(\frac{1}{n!})_{n \geq 0}$. Cette suite est non-lacunaire et

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Ainsi, d'après le critère de d'Alembert sur les séries entières, la série entière $\sum \frac{1}{n!} t^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$. Notons désormais S la somme de cette série entière.

Étape 3 Ainsi les fonctions exponentielles et S sont des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & y \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. .$$

donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\exp = S$ et exp est développable en série entière au voisinage de 0.

De manière alternative au théorème de Cauchy-Lipschitz, on pouvait remarquer que $\frac{d}{dt}(e^{-t}S(t)) = 0$ pour $t \in \mathbb{R}$ d'où $S = constante.exp$. La constante vaut alors 1 comme $S(0) = 1 = \exp(0)$.

Exercice d'entraînement 15.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f : t \mapsto (1+t)^\alpha$ est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle (E) $y'(t) = \frac{\alpha}{1+t} y(t)$. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Correction : Correction : *On indique les étapes de la méthode décrite dans les notes de cours.*
Étape 1 La fonction

$$\begin{array}{rrcl} f : &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & (1+t)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+t)} \end{array}$$

est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\forall t \in]-1,1[,\ f'(t) = \alpha \ln'(1+t) e^{\alpha \ln(1+t)} = \frac{\alpha}{1+t} f(t)$$

donc f est solution de l'équation différentielle (E).

Étape 2 Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors l'application

$$\begin{array}{rrcl} S : &]-R,R[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \end{array}$$

est dérivable sur $]-R, R[$ et, pour $t \in]-R, R[$,

$$S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}.$$

S est solution de (E) avec $S(0) = 1$ si et seulement si

$$(*) \left\{\begin{array}{l} \forall t \in]-R,R[,\ (1+t)S'(t) = \alpha S(t) \\ S(0) = 1 \end{array}\right.$$

On a

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \forall t \in]-R,R[,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n t^n \\ a_0 = 1 \end{array}\right.$$

On effectue le changement d'indice $n' = n - 1 \Leftrightarrow n' + 1 = n$ dans la première somme du membre de gauche et on remarque que l'on peut démarrer la deuxième somme du membre de gauche à partir *du terme $n=0$ sans changer la valeur de cette somme.*

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in]-R,R[, \ \displaystyle\sum_{n'=0}^{+\infty}(n'+1)a_{n'+1}t^{n'} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n t^n \\ a_0 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in]-R,R[, \ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1} + n a_n]t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n t^n \\ a_0 = 1 \end{array} \right.$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction au voisinage de 0, on obtient

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \ (n+1)a_{n+1} + n a_n = \alpha a_n \\ a_0 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad (R) \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \ (n+1)a_{n+1} = (\alpha - n) a_n \\ a_0 = 1 \end{array} \right.$$

Soit $(a_n)_n$ une suite vérifiant les relations (R). Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!}.$$

Pour avoir l'intuition d'une telle formule, écrire

$$a_n = \frac{\alpha - (n-1)}{n} a_{n-1} = \frac{(\alpha - (n-1))(\alpha - (n-2))}{n(n-1)} a_{n-2} = ...$$

jusqu'à découvrir la formule à démontrer.

La propriété est vraie pour $n=0$. *Pour mémoire, le produit vide vaut* 1. Supposons la propriété vrai à un rang $n \geq 0$. Alors

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \frac{\alpha - n}{n+1} a_n \\ & = & \frac{\alpha - n}{n+1} \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!} \\ & = & \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(\alpha - k)}{(n+1)!} \end{array}$$

où l'on a utilisé le fait que la suite (a_n) vérifie (R) pour la première ligne et l'hypothèse de récurrence pour la deuxième ligne. D'où la propriété au rang $n+1$.

Ceci achève la récurrence.

Réciproquement, la suite $\left(\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!} \right)_{n \geq 0}$ vérifie (R).

Pour s'assurer que notre série entière définit une fonction au voisinage de 0, on doit démontrer que le rayon de convergence de la série entière est strictement positif.

Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!} t^n$ à l'aide du critère de d'Alembert pour les séries entières. Comme $\alpha \notin \mathbb{N}$, la suite $\left(\dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}\right)_{n\geq 0}$ est non-lacunaire.

De plus

$$\frac{\left|\dfrac{\prod_{k=0}^{n}(\alpha-k)}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}\right|} = \frac{|\alpha-n|}{n+1} = \frac{|1-\alpha/n|}{1+1/n} \to 1$$

lorsque $n \to +\infty$. D'après le critère de d'Alembert sur les séries entières, la série entière $\sum \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!} t^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{1} = 1$.

Les raisonnements faits précédemment montrent que

$$\begin{array}{rccl} S: &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!} t^n \end{array}$$

est solution de (E) avec $S(0) = 1$.

Étape 3 : Ainsi, les applications S et f sont toutes deux solutions sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & \frac{\alpha}{1+t} y \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

et comme $t \mapsto \frac{\alpha}{1+t}$ est continue sur $]-1,1[$, alors, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, pour tout $t \in]-1,1[$, $f(t) = S(t)$ et f est développable en série entière au voisinage de 0.

16 Séance 16

Exercice d'entraînement 16.1. Déterminer pour quelles conditions initiales (t_0, x_0) (ou $(t_0,(x_0,y_0))$ ou (t_0, y_0, y_1)) on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz aux problèmes de Cauchy suivants.

1. $$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \arctan(tx) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \lvert x\rvert \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

3. $$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \frac{x}{t} \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

4. $$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & ty \\ y' & = & xy \\ x(t_0) & = & x_0 \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

5. $$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + \arctan(t)(y')^2 & = & y^2 \\ y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t_0) & = & y_1 \end{array}\right.$$

Correction : 1. L'application
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \arctan(tx) \end{array}$$
est de classe C^1 donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au système proposé pour $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. *En effet, l'application proposée est composée des applications* $(t,x) \mapsto tx$*, bilinéaire sur* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *donc* C^∞ *et* $y \mapsto \arctan(y)$ *qui est* C^∞.

2. L'application
$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \lvert x\rvert \end{array}$$
est continue.

Comme la fonction $|.|$ *n'est pas dérivable à l'origine, on va démontrer directement que l'on a une fonction localement lipschitzienne par rapport à la variable de phase.*

De plus, pour $t\in\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, on a
$$|f(t,x) - f(t,y)| = ||x| - |y|| \leq |x-y|$$
d'après l'inégalité triangulaire.

Ceci est une inégalité classique que vous pouvez appliquer directement. Pour rappel, on a $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$ *et, en échangeant les rôles de* x *et de* y $|y| \leq |x-y| + |x|$ *donc* $|x| - |y| \leq |x-y|$ *et* $|y| - |x| \leq |x-y|$ *donc* $||x|-|y|| = \max(|x|-|y|, |y|-|x|) \leq |x-y|$.

Ainsi, f est lipschitzienne par rapport à la variable de phase. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^2$.

3. L'application
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^*\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \dfrac{x}{t} \end{array}$$
est de classe C^1 donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

4. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t,(x,y)) & \mapsto & (ty,xy) \end{array}$$

est de classe C^1 donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour $(t_0,(x_0,y_0)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$.

5. *Comme on le fait d'habitude pour les équations différentielles d'ordre supérieur, il s'agit ici d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au système d'ordre* 1 *associé à notre équation différentielle. Ce système d'ordre* 1 *est*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \dot{y} \\ \dot{y}' & = & y^2 - \arctan(t)\dot{y}^2 \end{array} \right. .$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t,(y,\dot{y})) & \mapsto & (\dot{y}, y^2-\arctan(t)\dot{y}^2) \end{array}$$

est de classe C^1 donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour $(t_0,(y_0,y_1)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$.

17 Séance 17

Exercice 17.1. Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E)\ y' = ty^2.$$

1. Montrer que toute solution de (E) distincte de la fonction nulle ne s'annule jamais.
2. Déterminer la solution maximale de (E) qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice d'entraînement 17.1. Soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la solution maximale de l'équation (E) de l'exercice 17.1 qui vérifie $y(t_0) = y_0$ en fonction de t_0 et y_0.

Correction : L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, y) & \mapsto & ty^2 \end{array}$$

est de classe C^1 donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à l'équation différentielle (E). En particulier, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 0 \end{array}$$

est solution de (E) donc est la solution maximale recherchée si $y_0 = 0$.

Supposons donc que $y_0 \neq 0$.

On va ici, comme souvent, raisonner par analyse synthèse. On suppose que l'on dispose d'une solution et on recherche son expression. On vérifiera ensuite que l'expression trouvée est bien solution de l'équation.

Notons $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution du problème de Cauchy proposé. D'après l'exercice 17.1, l'application φ ne s'annule pas et, pour tout nombre réel $t \in I$,

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2} = t.$$

En intégrant l'égalité précédente entre t_0 et $t \in I$, on trouve que

$$\frac{1}{y_0} - \frac{1}{\varphi(t)} = \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}$$

que l'on peut réécrire

$$\frac{1}{\varphi(t)} = \frac{1}{y_0} + \frac{t_0^2}{2} - \frac{t^2}{2}.$$

Pour prendre l'inverse de cette égalité, il faut préalablement s'assurer que les quantités concernées ne s'annulent pas, ce qui induira des restrictions sur l'intervalle I.

Comme le membre de gauche de l'égalité ci-dessus ne s'annule pas, alors, pour tout $t \in I$,

$$(*)\ \frac{t^2}{2} \neq \frac{1}{y_0} + \frac{t_0^2}{2}.$$

On distingue alors plusieurs cas.

Cas 1 : si $\frac{1}{y_0} + \frac{t_0^2}{2} < 0$, la relation $(*)$ est toujours vérifiée et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{y_0}{1 + y_0(\frac{t_0^2}{2} - \frac{t^2}{2})}.$$

Réciproquement, une fonction φ définie sur $I \subset \mathbb{R}$ par l'expression ci-dessus est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = t\frac{y_0^2}{(1 + y_0(\frac{t_0^2}{2} - \frac{t^2}{2}))^2} = t\varphi(t)^2$$

et $\varphi(t_0) = y_0$ donc φ est solution du problème de Cauchy proposé.

Cas 2 : on suppose que

$$\frac{1}{y_0} + \frac{t_0^2}{2} \geq 0$$

. La relation $(*)$ implique alors que $t \neq \pm\sqrt{\frac{2}{y_0} + t_0^2}$ pour tout $t \in I$ donc

$$I \subset \left]-\infty, -\sqrt{\frac{2}{y_0} + t_0^2}\right[\cup \left]-\sqrt{\frac{2}{y_0} + t_0^2}, \sqrt{\frac{2}{y_0} + t_0^2}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{2}{y_0} + t_0^2}, +\infty\right[.$$

Il s'agit de déterminer maintenant dans lequel de ces trois intervalles I est contenu suivant les cas.

Sous-cas 2.1 : si $y_0 > 0$, alors, comme $t_0 \in I \cap] - \sqrt{\frac{2}{y_0} + t_0^2}, \sqrt{\frac{2}{y_0} + t_0^2}[$, $I \subset] - \sqrt{\frac{2}{y_0} + t_0^2}, \sqrt{\frac{2}{y_0} + t_0^2}[$ et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{y_0}{1 + y_0(\frac{t_0^2}{2} - \frac{t^2}{2})}.$$

Des calculs identiques au cas 1. montrent que, réciproquement, de telles fonctions φ sont solutions du problème de Cauchy proposé.

Sous-cas 2.2 : si $y_0 < 0$ et $t_0 > 0$, alors, comme $t_0 > \sqrt{\frac{2}{y_0} + t_0^2}$ et $t_0 \in I$, alors $I \subset]\sqrt{\frac{2}{y_0} + t_0^2}, +\infty[$ et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{y_0}{1 + y_0(\frac{t_0^2}{2} - \frac{t^2}{2})}.$$

Des calculs identiques au cas 1. montrent que, réciproquement, de telles fonctions φ sont solutions du problème de Cauchy proposé.

Sous-cas 2.3 : si $y_0 < 0$ et $t_0 < 0$, on montre de manière analogue que $I \subset] - \infty, -\sqrt{\frac{2}{y_0} + t_0^2}[$ et que, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{y_0}{1 + y_0(\frac{t_0^2}{2} - \frac{t^2}{2})}.$$

Des calculs identiques au cas 1. montrent que, réciproquement, de telles fonctions φ sont solutions du problème de Cauchy proposé.

Finalement, la solution maximale du problème de Cauchy proposé est

1. l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 0 \end{array}$$
si $y_0 = 0$;

2. l'application
$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{y_0}{1+y_0(\frac{t_0^2}{2}-\frac{t^2}{2})}\end{array}$$
si $\frac{1}{y_0}+\frac{t_0^2}{2}<0$;
3. l'application
$$\begin{array}{ccc}\left]-\sqrt{\frac{2}{y_0}+t_0^2},\sqrt{\frac{2}{y_0}+t_0^2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{y_0}{1+y_0(\frac{t_0^2}{2}-\frac{t^2}{2})}\end{array}$$
si $\frac{1}{y_0}+\frac{t_0^2}{2}>0$ et $y_0>0$;
4. l'application
$$\begin{array}{ccc}\left]\sqrt{\frac{2}{y_0}+t_0^2},+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{y_0}{1+y_0(\frac{t_0^2}{2}-\frac{t^2}{2})}\end{array}$$
si $\frac{1}{y_0}+\frac{t_0^2}{2}>0$, $y_0<0$ et $t_0>0$;
5. l'application
$$\begin{array}{ccc}\left]-\infty,-\sqrt{\frac{2}{y_0}+t_0^2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{y_0}{1+y_0(\frac{t_0^2}{2}-\frac{t^2}{2})}\end{array}$$
si $\frac{1}{y_0}+\frac{t_0^2}{2}>0$, $y_0<0$ et $t_0<0$.

Exercice d'entraînement 17.2. On considère l'équation différentielle
$$(1+t)y'=y^2.$$

1. Peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à cette équation ? Pourquoi ?
2. Déterminer les solutions maximales de cette équation définies sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $\mathbb{R}$.

Correction : 1. Pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, on commence pas mettre l'équation sous forme résolue
$$y'=\frac{1}{1+t}y^2.$$
On peut donc applique le théorème de Cauchy-Lipschitz pour des conditions initiales (t_0,y_0) dans $]-\infty,-1[\times\mathbb{R}$ ou dans $]-1,+\infty[\times\mathbb{R}$ car les applications
$$\begin{array}{ccc}U & \to & \mathbb{R} \\ (t,y) & \mapsto & \frac{1}{1+t}y^2\end{array}$$
avec $U=]-\infty,-1[\times\mathbb{R}$ ou $U=]-1,+\infty[\times\mathbb{R}$, sont de classe C^1.

2. Soit $\varphi : I\to\mathbb{R}$, avec $I\subset]-\infty,-1[$ ou $I\subset]-1,+\infty[$.

On veut diviser par φ^2 les deux membres de l'égalité. Pour ce faire, on commence par traiter le cas où φ s'annule.

Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. Alors l'application nulle et φ sont toutes deux des solutions définies sur I du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \frac{1}{1+t} y^2 \\ y(t_0) & = & 0 \end{array} \right.$$

donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (que l'on peut appliquer d'après la question précédente), φ est l'application nulle.

Supposons donc φ distincte de l'application nulle. Par contraposition de l'implication précédente, l'application φ ne s'annule pas et, pour tout $t \in I$,

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2} = \frac{1}{1+t}.$$

Par conséquent, il existe une constante réelle C telle que, pour tout $t \in I$,

$$\frac{-1}{\varphi(t)} = \ln(|1+t|) + C.$$

On veut maintenant prendre l'inverse des deux membres de l'égalité : le membre de droite ne doit pas être nul.

Comme le membre de gauche de l'égalité ci-dessus ne s'annule pas, on doit avoir, pour tout $t \in I$,

$$\ln(|1+t|) + C \neq 0 \Leftrightarrow t \neq -1 + e^{-C}, -1 - e^{-C}.$$

Ainsi, $I \subset]-\infty, -1-e^{-C}[\cup]-1-e^{-C}, -1[\cup]-1, -1+e^{-C}[\cup]-1+e^{-C}, +\infty[$ et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{-1}{\ln(|1+t|) + C}.$$

Réciproquement, soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par l'expression ci-dessus, avec I vérifiant la condition ci-dessus. Alors φ est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t} . \frac{1}{(\ln(|1+t|) + C)^2} = \frac{1}{1+t} \varphi(t)^2.$$

L'application φ est donc solution de l'équation différentielle.

Les solutions maximales de l'équation différentielle définies sur un intervalle inclus dans $]-1, +\infty[$ sont donc les applications de l'une des formes suivantes.

1. L'application
$$\begin{array}{rcl}]-1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 0 \end{array}.$$

2. Les applications de la forme
$$\begin{array}{rcl}]-1+e^{-C}, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{-1}{\ln(1+t)+C} \end{array},$$

   avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl}]-1,-1+e^{-C}[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{-1}{\ln(1+t)+C} \end{array},$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

De même, les solutions maximales de l'équation différentielle définies sur un intervalle inclus dans $]-\infty,-1[$ sont donc les applications de l'une des formes suivantes.

1. L'application

$$\begin{array}{rcl}]-\infty,-1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 0 \end{array}.$$

2. Les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl}]-1-e^{-C},-1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{-1}{\ln(-1-t)+C} \end{array},$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl}]-\infty,-1-e^{-C}[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{-1}{\ln(-1-t)+C} \end{array},$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Si φ est une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$, alors $\varphi_{|]-\infty,-1[}$ et $\varphi_{|]-1,+\infty[}$ sont des solutions de (E) qui sont respectivement définies sur $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$. Or, la seule solution définie sur $]-\infty,-1[$ ou sur $]-1,+\infty[$ est la solution nulle, d'après la question précédente. Par continuité de φ en -1, on obtient aussi que $\varphi(-1)=0$ et φ est l'application nulle. L'application nulle étant bien solution de (E), c'est la seule solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

18 Séance 18

Exercice d'entraînement 18.1. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle

$$y' = (1 - y^2)t.$$

On commencera par démontrer que les solutions non-constantes φ vérifient soit $\varphi < -1$, soit $-1 < \varphi < 1$, soit $\varphi > 1$.

Correction : On commence par suivre l'indication donnée pas l'énoncé.

Une fonction constante

$$\begin{array}{ccc} I & \mapsto & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C \end{array}$$

définie sur un intervalle I est solution de l'équation différentielle proposée si et seulement si, pour tout $t \in I$, $0 = (1 - C^2)t$, c'est à-dire que $0 = 1 - C^2 = (1 - C)(1 + C)$, *i.e.* $C = 1$ ou $C = -1$.

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution non-constante de l'équation différentielle proposée. Montrons par l'absurde que, pour tout $t \in I$, $\varphi(t) \neq 1$ et $\varphi(t) \neq -1$.

Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $\varphi(t_0) = \epsilon$, avec $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$. Alors φ et l'application constante égale à ϵ sont des solutions définies sur I du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & (1 - y^2)t \\ y(t_0) & = & \epsilon. \end{array} \right.$$

De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, y) & \mapsto & (1 - y^2)t \end{array}$$

est de classe C^1. Par conséquent, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'application φ est constante égale à ϵ, en contradiction avec l'hypothèse faite sur φ.

Le théorème des valeurs intermédiaires implique alors que
- soit, pour tout $t \in I$, $\varphi(t) < -1$,
- soit, pour tout $t \in I$, $-1 < \varphi(t) < 1$,
- soit, pour tout $t \in I$, $1 < \varphi(t)$.

On va maintenant trouver une expression d'une solution de l'équation différentielle. Il y a deux manières de faire pour cette équation : soit on la voit comme une équation à variable séparable, soit on la voit comme une équation de Riccati, en utilisant une solution constante. Ici, on va corriger en considérant l'équation comme une équation à variables séparables.

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution non-constante de l'équation différentielle. D'après ce qui précède $1 - \varphi^2$ ne s'annule pas et, pour tout $t \in I$,

$$\frac{\varphi'(t)}{1 - \varphi(t)^2} = t.$$

Pour déterminer une primitive du membre de gauche, on décompose la fraction rationnelle $\frac{1}{1-X^2}$ en éléments simples. On a

$$\frac{1}{1 - X^2} = \frac{A}{1 - X} + \frac{B}{1 + X}$$

avec $A = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-x^2} = 1/2$ et $B = \lim_{x\to -1} \frac{1+x}{1-x^2} = 1/2$. Ainsi, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in I$,

$$(*)\ \frac{1}{2}(-\ln(|1-\varphi(t)|) + \ln(|1+\varphi(t)|)) = \frac{t^2}{2} + C.$$

Pour se débarrasser des valeurs absolues, on doit distinguer les cas suivant les signes de $1-\varphi$ et $1+\varphi$.

Premier cas : On suppose que $\varphi > 1$. Dans ce cas, $(*)$ implique que, pour tout $t \in I$,

$$\ln\left(\frac{1+\varphi(t)}{\varphi(t)-1}\right) = t^2 + 2C.$$

Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$\frac{1+\varphi(t)}{\varphi(t)-1} = e^{t^2+2C}$$

donc, pour tout $t \in I$,

$$(1-e^{t^2+2C})\varphi(t) = -1 - e^{t^2+2C}.$$

Là encore, avant de diviser par $(1-e^{t^2+2C})$, on doit s'assurer que cette quantité est non-nulle. Ici, comme le membre de droite est strictement négatif, elle sera strictement négative.

Pour tout $t \in I$, $-1-e^{t^2+2C} < 0$ donc $1-e^{t^2+2C} < 0$ et $t^2+2C > 0$. Ainsi, soit $C > 0$ et cette relation est toujours vérifiée, soit $C \leq 0$ et $I \subset]-\infty, -\sqrt{-2C}[\cup]\sqrt{-2C}, +\infty[$. Dans tous les cas, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{1+e^{t^2+2C}}{e^{t^2+2C}-1}.$$

Réciproquement, toute application $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par l'expression ci-dessus avec I vérifiant les relations ci-dessus est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{2te^{t^2+2C}(e^{t^2+2C}-1) - (1+e^{t^2+2C})2te^{t^2+2C}}{(e^{t^2+2C}-1)^2} \\ &= \frac{-4te^{t^2+2C}}{(e^{t^2+2C}-1)^2}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} t(1-\varphi(t)^2) &= t\left(\frac{(e^{t^2+2C}-1)^2}{(e^{t^2+2C}-1)^2} - \frac{(1+e^{t^2+2C})^2}{(e^{t^2+2C}-1)^2}\right) \\ &= t\frac{-4e^{t^2+2C}}{(e^{t^2+2C}-1)^2} = \varphi'(t). \end{aligned}$$

donc φ est bien solution de l'équation différentielle.

Deuxième cas : $-1 < \varphi < 1$.

On anticipe ici sur la suite du cours. Dans ce cas, la solution est bornée et le théorème des bouts, que l'on verra plus tard dans ce cours, impliquera que les solutions maximales correspondantes sont définies sur $\mathbb{R}$.

La relation $(*)$ implique ici que, pour tout $t \in I$,

$$\ln\left(\frac{1+\varphi(t)}{1-\varphi(t)}\right) = t^2 + 2C.$$

Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$\frac{1+\varphi(t)}{1-\varphi(t)} = e^{t^2+2C}$$

puis

$$(1+e^{t^2+2C})\varphi(t) = e^{t^2+2C} - 1$$

Ici, on n'a aucune restriction sur I puisque $1+e^{t^2+2C}$ ne s'annule pas.

Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{e^{t^2+2C}-1}{1+e^{t^2+2C}}.$$

Réciproquement soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par l'expression ci-dessus. Alors φ est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{2te^{t^2+2C}(1+e^{t^2+2C}) - (e^{t^2+2C}-1)2te^{t^2+2C}}{(1+e^{t^2+2C})^2} \\ &= \frac{4te^{t^2+2C}}{(1+e^{t^2+2C})^2}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} t(1-\varphi(t)^2) &= t\left(\frac{(e^{t^2+2C}+1)^2}{(e^{t^2+2C}+1)^2} - \frac{(e^{t^2+2C}-1)^2}{(e^{t^2+2C}+1)^2}\right) \\ &= t\frac{4e^{t^2+2C}}{(e^{t^2+2C}+1)^2} = \varphi'(t). \end{aligned}$$

donc φ est bien solution de l'équation différentielle.

Troisième cas : $\varphi < -1$. La relation $(*)$ implique ici que, pour tout $t \in I$,

$$\ln\left(\frac{-1-\varphi(t)}{1-\varphi(t)}\right) = t^2 + 2C.$$

Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$\frac{-1-\varphi(t)}{1-\varphi(t)} = e^{t^2+2C}$$

puis

$$(e^{t^2+2C}-1)\varphi(t) = e^{t^2+2C} + 1.$$

Pour tout $t \in I$, comme $e^{t^2+2C}+1 > 0$ et $\varphi(t) < 0$, alors $e^{t^2+2C} - 1 < 0$. Ceci revient à dire que $t^2 + 2C < 0$. Si $C \geq 0$, cette inéquation n'a pas de solution. Si $C < 0$ l'ensemble des solutions de cette inéquation est $]-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}[$. Ainsi, nécessairement, $C < 0$, $I \subset]-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}[$ et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{e^{t^2+2C}+1}{e^{t^2+2C}-1}.$$

Réciproquement, toute application $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par l'expression ci-dessus avec I vérifiant les relations ci-dessus est dérivable sur I et, comme son expression est identique à celle trouvée dans le premier cas, une telle application est solution de l'équation différentielle.

Les solutions maximales de l'équation différentielle sont donc les applications de l'une des formes suivantes.

1. Les applications constantes
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -1 \end{array}.$$
2. Les applications de la forme
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{e^{t^2+2C}-1}{e^{t^2+2C}+1} \end{array}$$
avec $C \in \mathbb{R}$.
3. Les applications de la forme
$$\begin{array}{rcl} I_C & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1+e^{t^2+2C}}{e^{t^2+2C}-1} \end{array}$$
avec $I_C = \mathbb{R}$ si $C > 0$, $I_C =]-\infty, -\sqrt{-2C}[$ ou $]-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}[$ ou $]\sqrt{-2C}, +\infty[$ si $C < 0$ et $I_C =]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $C = 0$.

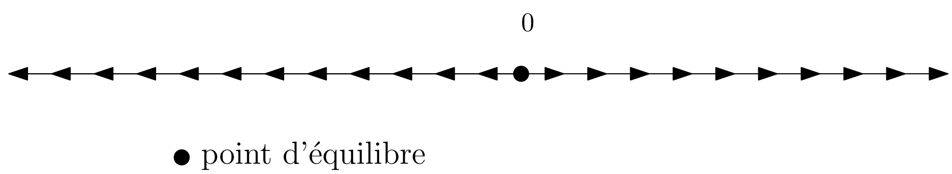
19 Séance 19

Exercice d'entraînement 19.1. Tracer le portrait de phase puis tenter de déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation différentielle $y' = 3y^3 + y$ de deux manières différentes :

1. en l'interprétant comme une équation de Bernoulli.
2. en l'interprétant comme une équation à variables séparables.

Correction : *Si le membre de droite de l'équation est strictement positif en y_0, cela signifie qu'une solution, quand elle vaut y_0, est strictement croissante et donc va vers la droite sur l'axe réel. De même, si le membre de droite est strictement négatif en y_0, cela signifie qu'une solution, quand elle vaut y_0, est strictement décroissante et donc va vers la gauche sur l'axe réel. Enfin, si ce membre de droite est nul, cela signifie que notre solution est la fonction constante $t \mapsto y_0$ et reste au même point à tout instant (par le théorème de Cauchy-Lipschitz). On parle de point d'équilibre.*

Pour $y \in \mathbb{R}$, la quantité $3y^3 + y = y(3y^2 + 1)$ est du même signe que y, donc strictement positif pour $y > 0$, strictement négatif pour $y < 0$ et nulle en $y = 0$, d'où le portrait de phase suivant.



Pour les deux méthodes, on devra diviser par une quantité qui sera non-nulle si la solution ne s'annule pas. On commence donc par démontrer que les solutions non-constantes ne s'annulent pas.

Une application constante $t \mapsto C$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$3C^3 + C = 0 \Leftrightarrow C(3C^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow C = 0.$$

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E). Supposons que l'application φ s'annule : il existe $t_0 \in I$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. Alors φ est l'application nulle sont des solutions définies sur I du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & 3y^3 + y \\ y(t_0) & = & 0. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, y) & \mapsto & 3y^3 + y \end{array}$$

est polynômiale donc de classe C^1. Ainsi, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, φ est l'application nulle. Par contraposition, toute solution de l'équation différentielle distincte de l'application nulle ne s'annule jamais. Par le théorème des valeurs intermédiaires, une telle solution est à valeurs soit toujours strictement positives, soit toujours strictement négatives.

1. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle distincte de la fonction nulle. Alors φ ne s'annule pas et, après division de l'équation par φ^3,

$$\frac{-2\varphi'}{\varphi^3} + \frac{2}{\varphi^2} = -6.$$

Posons $\psi = \frac{1}{\varphi^2}$. Alors ψ est une solution définie sur I de l'équation différentielle (E_ℓ) $y' + 2y = -6$. Remarquons que $t \to -3$ est une solution de (E_ℓ) et que l'ensemble des solutions définies sur I de l'équation homogène associée à (E_ℓ) est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ce^{-2t} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ainsi les solutions définies sur I de (E_ℓ) sont les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -3 + Ce^{-2t} \end{array},$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, il existe une constante réelle C telle que, pour tout $t \in I$,

$$\frac{1}{\varphi(t)^2} = \psi(t) = -3 + Ce^{-2t}.$$

Comme le membre de gauche de cette égalité est strictement positif, alors, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} -3 + Ce^{-2t} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C > 0 \\ \ln(C) - 2t > \ln(3) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C > 0 \\ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{C}{3}\right) > t. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, $C > 0$, $I \subset]-\infty, \frac{1}{2} \ln\left(\frac{C}{3}\right)[$ et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t)^2 = \frac{1}{-3 + Ce^{-2t}}.$$

Si $\varphi > 0$, alors, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{-3 + Ce^{-2t}}}.$$

Si $\varphi < 0$, alors, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{-1}{\sqrt{-3 + Ce^{-2t}}}.$$

Réciproquement, soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in I, \ \varphi(t) = \frac{\epsilon}{\sqrt{-3 + Ce^{-2t}}},$$

avec $\epsilon = \pm 1$, $C > 0$ et $I \subset]-\infty, \frac{1}{2} \ln\left(\frac{C}{3}\right)[$. Alors φ est bien définie et dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = \frac{2\epsilon Ce^{-2t}}{2(\sqrt{-3 + Ce^{-2t}})^3} = \frac{\epsilon Ce^{-2t}}{(\sqrt{-3 + Ce^{-2t}})^3}.$$

De plus, pour tout $t \in I$,

$$3\varphi(t)^3 + \varphi(t) = \frac{3\epsilon}{(\sqrt{-3 + Ce^{-2t}})^3} + \frac{\epsilon(-3 + Ce^{-2t})}{(\sqrt{-3 + Ce^{-2t}})^3} = \varphi'(t)$$

donc φ est solution de l'équation différentielle.

Ainsi, les solutions maximales de l'équation différentielle sont les applications de l'une des formes suivantes.

1. L'application nulle

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 0 \end{array}.$$

2. Les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc} \left]-\infty, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{C}{3}\right)\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\epsilon}{\sqrt{-3+Ce^{-2t}}} \end{array},$$

avec $C > 0$ et $\epsilon = \pm 1$.

2. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution non identiquement nulle de l'équation différentielle. Alors φ ne s'annule pas donc $3\varphi^3 + \varphi = \varphi(3\varphi^2 + 1)$ ne s'annule pas et

$$\frac{\varphi'}{3\varphi^3 + \varphi} = 1.$$

Décomposons la fraction rationnelle $\frac{1}{3X^3+X}$ en éléments simples : déterminons $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\frac{1}{3X^3 + X} = \frac{A}{X} + \frac{BX + C}{3X^2 + 1}$$

On a $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{3x^3 + x} = 1$ et

$$\frac{1}{3X^3 + X} = \frac{(3X^2 + 1) + BX^2 + CX}{X(3X^2 + 1)} = \frac{(B + 3)X^2 + CX + 1}{3X^3 + X}$$

ce qui revient à dire que $B = -3$ et $C = 0$.

Ainsi,

$$\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{3\varphi'\varphi}{3\varphi^2 + 1} = 1.$$

Ainsi, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in I$,

$$\ln(|\varphi(t)|) - \frac{1}{2}\ln(3\varphi(t)^2 + 1) = t + C$$

que l'on peut réécrire

$$\ln\left(\frac{\varphi(t)^2}{3\varphi(t)^2 + 1}\right) = 2t + 2C.$$

Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$\frac{\varphi(t)^2}{3\varphi(t)^2 + 1} = e^{2t+2C}$$

donc

$$(1 - 3e^{2t+2C})\varphi(t)^2 = e^{2t+2C}.$$

Comme, pour tout $t \in I$, $e^{2t+2C} > 0$, alors

$$1 - 3e^{2t+2C} > 0 \Leftrightarrow t < -\frac{\ln(3)}{2} - C$$

donc $I \subset \left]-\infty, -\frac{\ln(3)}{2} - C\right[$ et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t)^2 = \frac{e^{2t+2C}}{1 - 3e^{2t+2C}} = \frac{1}{e^{-2t-2C} - 3}.$$

On a vu au début de la résolution de l'exercice que φ avait un signe constant. Ainsi, il existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ telle que, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{\epsilon}{\sqrt{e^{-2t-2C} - 3}}.$$

Réciproquement, soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par l'expression ci-dessus avec $I \subset]-\infty, -\frac{\ln(3)}{2} - C[$. Alors φ est bien définie et dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = \frac{-2\epsilon e^{-2t-C}}{(\sqrt{e^{-2t-2C} - 3})^3}$$

et

$$3\varphi(t)^3 + \varphi(t) = \frac{3\epsilon}{(\sqrt{e^{-2t-2C} - 3})^3} + \frac{\epsilon(e^{-2t-2C} - 3)}{(\sqrt{e^{-2t-2C} - 3})^3} = \varphi'(t)$$

donc φ est solution de l'équation différentielle.

Les solutions maximales de l'équation différentielle sont les applications de l'une des formes suivantes.

1. L'application nulle
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 0 \end{array}.$$
2. Les applications de la forme
$$\begin{array}{rcl}]-\infty, -\frac{\ln(3)}{2} - C[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\epsilon}{\sqrt{e^{-2t-2C}-3}} \end{array},$$
avec $C \in \mathbb{R}$ et $\epsilon = \pm 1$.

On retrouve le même ensemble de solution, à ceci près que la constante C strictement positive de la première méthode de résolution s'est transformée en la constante e^{-2C} qui apparait avec cette deuxième méthode.

20 Séance 20

Exercice d'entraînement 20.1. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle

$$y' = y^2 + y - 2$$

1. en l'interprétant comme une équation de Riccati (on trouvera préalablement une solution évidente de l'équation différentielle).
2. en l'interprétant comme une équation à variables séparables.

Correction : Une fonction constante $t \mapsto C$ est solution de l'équation différentielle proposée si et seulement si $0 = C^2 + C - 2 = (C + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} = (C-1)(C+2)$, *i.e.* $C = 1$ ou $C = -2$.

Montrons que les solutions non-constantes de cette équation différentielle ne valent jamais 1 ou -2. Soit $C \in \{-2, 1\}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle proposée. Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $\varphi(t_0) = C$. Alors φ et la fonction constante égale à C sont des solutions définies sur I du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & y^2 + y - 2 \\ y(t_0) & = & C. \end{array} \right.$$

De plus, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, y) & \mapsto & y^2 + y - 2 \end{array}$$

est de classe C^1 car elle est polynômiale. Par conséquent, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = C$. Par contraposition, toute solution non-constante de l'équation différentielle proposée ne vaut jamais 1 ni -2.

1. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution non-constante de l'équation différentielle proposée. Posons, pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = 1 + u(t) \Leftrightarrow u(t) = \varphi(t) - 1$. Alors u est dérivable sur I et, en injectant dans l'équation différentielle,

$$u' = (1+u)^2 + (1+u) - 2 = 3u + u^2.$$

Comme φ ne vaut jamais 1, alors $u = \varphi - 1$ ne s'annule jamais et

$$\frac{-u'}{u^2} + \frac{3}{u} = -1.$$

Posons $\psi = \frac{1}{u}$. Alors ψ est solution de l'équation différentielle (E_ℓ) $y' + 3y = -1$. Notons que $t \mapsto -\frac{1}{3}$ est une solution particulière de (E_ℓ) et que l'ensemble des solutions définies sur I de l'équation homogène associée à (E_ℓ) est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ce^{-3t} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions définies sur I de (E_ℓ) est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{1}{3} + Ce^{-3t} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ainsi, il existe une constante réelle C telle que, pour tout $t \in I$,

$$\frac{1}{u(t)} = \psi(t) = -\frac{1}{3} + Ce^{-3t}.$$

Comme le membre de gauche de cette égalité ne s'annule pas, alors, pour tout $t \in I$,

$$-\frac{1}{3} + Ce^{-3t} \neq 0 \Leftrightarrow C \leq 0 \text{ ou } (C > 0 \text{ et } t \neq \frac{1}{3}\ln(3C)).$$

Ainsi, si $C > 0$, $I \subset]-\infty, \frac{1}{3}\ln(3C)[\cup]\frac{1}{3}\ln(3C), +\infty[$ et, pour tout $t \in I$,

$$u(t) = \frac{1}{-\frac{1}{3} + Ce^{-3t}} = \frac{3}{-1 + 3Ce^{-3t}}.$$

Par conséquent, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = 1 + \frac{3}{-1 + 3Ce^{-3t}}.$$

Réciproquement, soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une application définie par l'expression ci-dessus avec I vérifiant la condition ci-dessus. Alors φ est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = \frac{-27Ce^{-3t}}{(-1 + 3Ce^{-3t})^2}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \varphi(t)^2 + \varphi(t) - 2 & = & 1^2 + frac6{-1 + 3Ce^{-3t}} + frac9(-1 + 3Ce^{-3t})^2 + 1 + \frac{3}{-1+3Ce^{-3t}} - 2 \\ & = & \frac{-27Ce^{-3t}}{(-1+3Ce^{-3t})^2} = \varphi'(t). \end{array}$$

Ainsi, φ est solution de l'équation différentielle proposée.

Les solutions maximales de l'équation différentielle sont donc les applications de l'une des formes suivantes.

1. L'application
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 \end{array}.$$
2. Les applications de la forme
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 + \frac{3}{-1+3Ce^{-3t}} \end{array}$$
avec $C \leq 0$.
3. Les applications de la forme
$$\begin{array}{rcl}]-\infty, \frac{1}{3}\ln(3C)[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 + \frac{3}{-1+3Ce^{-3t}} \end{array},$$
avec $C > 0$.
4. Les applications de la forme
$$\begin{array}{rcl}]\frac{1}{3}\ln(3C), +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 + \frac{3}{-1+3Ce^{-3t}} \end{array},$$
avec $C > 0$.

Remarquer que le cas $C = 0$ nous donne la solution constante égale à -2.

2. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution non-constante de l'équation différentielle proposée. Alors, comme on l'a vu en début de résolution, la fonction $\varphi^2 + \varphi - 2 = (\varphi - 1)(\varphi + 2)$ ne s'annule pas et

$$\frac{\varphi'}{\varphi^2 + \varphi - 2} = 1.$$

Décomposons la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2+X-2}$ en éléments simples. On a

$$\frac{1}{X^2 + X - 2} = \frac{A}{X - 1} + \frac{B}{X + 2},$$

avec $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{3}$ et $B = \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2+x-2} = -\frac{1}{3}$.

Ainsi, en primitivant la ligne ci-dessus, on obtientqu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout $t \in I$,

$$\frac{1}{3}\ln(|\varphi(t) - 1|) - \frac{1}{3}\ln(|\varphi(t) + 2|) = t + C.$$

c'est-à-dire que, pour tout $t \in I$,

$$(*)\ \frac{|\varphi(t) - 1|}{|\varphi(t) + 2|} = e^{3t+3C}.$$

On a vu que φ ne prenait jamais la valeur 1 ni -2. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, ceci implique que l'on est dans l'un des trois cas suivants :

- Cas 1 : $\varphi > 1$.
- Cas 2 : $1 > \varphi > -2$.
- Cas 3 : $-2 > \varphi$.

Cas 1 : On suppose que $\varphi > 1$. Dans ce cas, d'après $(*)$, pour tout $t \in I$,

$$\frac{\varphi(t) - 1}{\varphi(t) + 2} = e^{3t+3C}$$

donc

$$(1 - e^{3t+3C})\varphi(t) = 2e^{3t+3C} + 1.$$

Comme le membre de droite de cette égalité est toujours strictement positif, il doit en être de même du membre de gauche donc, comme $\varphi > 0$, pour tout $t \in I$

$$1 - e^{3t+3C} > 0 \Leftrightarrow 0 > 3t + 3C \Leftrightarrow -C > t.$$

Ainsi, $I \subset]-\infty, -C[$ et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{2e^{3t+3C} + 1}{1 - e^{3t+3C}} = 1 + \frac{3e^{3t+3C}}{1 - e^{3t+3C}} = 1 + \frac{3}{e^{-3t-3C} - 1}.$$

Réciproquement, soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par l'expression ci-dessus, avec I vérifiant les contraintes ci-dessus. Alors φ est bien définie et dérivable sur I et un calcul analogue à celui fait avec la première méthode de résolution montre que φ est solution de l'équation différentielle (il suffit de changer la constante $3C$ qui apparait avec la première méthode par e^{-3C}).

Cas 2 : On suppose que $1 > \varphi > -2$. Dans ce cas, d'après $(*)$, pour tout $t \in I$,

$$\frac{1-\varphi(t)}{\varphi(t)+2} = e^{3t+3C}$$

donc

$$(-1-e^{3t+3C})\varphi(t) = 2e^{3t+3C} - 1.$$

donc, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{-2e^{3t+3C}+1}{1+e^{3t+3C}} = 1 - \frac{3e^{3t+3C}}{1+e^{3t+3C}} = 1 - \frac{3}{1+e^{-3t-3C}}.$$

Là encore, des calculs analogues à ceux faits avec la première méthode (en remplaçant la constante $3C$ qui apparaît dans cette première méthode par $-e^{3C}$ montrent que φ définie par l'expression ci-dessus est bien solution de l'équation différentielle.

Cas 3 : On suppose que $\varphi < -2$. Dans ce cas, d'après $(*)$, pour tout $t \in I$,

$$\frac{1-\varphi(t)}{-\varphi(t)-2} = e^{3t+3C}$$

donc

$$(e^{3t+3C}-1)\varphi(t) = -2e^{3t+3C} - 1.$$

Comme le membre de droite de cette égalité est toujours strictement négatif, il doit en être de même du membre de gauche donc, comme $\varphi < 0$, pour tout $t \in I$

$$e^{3t+3C} - 1 > 0 \Leftrightarrow 3t + 3C > 0 \Leftrightarrow t > -C.$$

Ainsi, $I \subset]-C, +\infty[$ et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \frac{2e^{3t+3C}+1}{1-e^{3t+3C}} = 1 + \frac{3e^{3t+3C}}{1-e^{3t+3C}} = 1 + \frac{3}{e^{-3t-3C}-1}.$$

Réciproquement, toute application $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par l'expression ci-dessus avec I vérifiant la contrainte ci-dessus est solution de l'équation différentielle proposée.

Les solutions maximales de l'équation différentielle proposée sont donc les applications de l'une des formes suivantes.

1. Les applications constantes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 \end{array}$$

   et

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -2 \end{array}.$$

2. Les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc}]-\infty, -C[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 + \frac{3}{e^{-3t-3C}-1} \end{array},$$

   avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 - \frac{3}{e^{-3t-3C}+1} \end{array},$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

4. Les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl}]-C, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 + \frac{3}{e^{-3t-3C}-1} \end{array},$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

21 Séance 21

Exercice d'entraînement 21.1. Que peut on dire de l'intervalle d'existence des solutions maximales des équations différentielles ci-dessous ?

$$\begin{array}{ll} (E_1) & y' = \cos(e^t y) \\ (E_2) & y' = \dfrac{\ln(y^2+1)}{e^y + y^2 - y + 1} e^t + \ln(t^2+1). \end{array}$$

Correction : *Le théorème des bouts n'est valable que pour les systèmes différentiels qui vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy Lipschitz. On commence donc par s'assurer que c'est bien le cas.*

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t,y) & \mapsto & \cos(e^t y) \end{array}$$

est de classe C^1 donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à l'équation différentielle (E_1).

Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ une solution maximale de (E_1). On va montrer par l'absurde que $\beta = +\infty$ et $\alpha = -\infty$.

On veut appliquer le théorème des bouts. Pour ce faire, on veut majorer la valeur absolue de $\varphi(t)$, pour montrer que $\varphi(t)$ reste dans un compact en temps fini, d'où les calculs suivants.

Fixons $t_0 \in I$. Pour tout t dans $]\alpha, \beta[$,

$$|\varphi'(t)| = |\cos(e^t \varphi(t))| \leq 1$$

donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$(*)\ |\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq |t - t_0|.$$

Dans ce type de situation, le théorème ou l'inégalité des accroissements finis sont très utiles : ils nous permettent de passer d'une estimation sur la dérivée d'une fonction à une estimation sur la fonction elle-même.

Supposons que $\beta < +\infty$. L'inégalité $(*)$ implique alors que, pour tout $t \in [t_0, \beta[$,

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq (t - t_0) \leq \beta - t_0.$$

Ainsi, pour $t \in [t_0, \beta[$, le couple $(t, \varphi(t))$ reste dans le compact

$$[t_0, \beta] \times [\varphi(t_0) - (\beta - t_0), \varphi(t_0) + (\beta - t_0)],$$

en contradiction avec la maximalité de φ. Ainsi $\beta = +\infty$.

On vient d'appliquer le théorème des bouts qui nous dit en gros qu'une solution maximale ne peut pas rester dans un compact (voir les notes de cours pour un énoncé précis). On fera souvent un raisonnement par l'absurde comme ci-dessus pour montrer qu'une solution est définie jusqu'à $+\infty$ ou $-\infty$. On supposera que ce n'est pas le cas et on montrera alors que notre solution reste dans un compact. On raisonne de même pour α.

Supposons que $\alpha > -\infty$. L'inégalité $(*)$ implique que, pour $t \in]\alpha, t_0]$,

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq |t - t_0| = t_0 - t \leq t_0 - \alpha.$$

Ainsi, pour $t \in]\alpha, t_0]$, le couple $(t, \varphi(t))$ reste dans le compact

$$[\alpha, t_0] \times [\varphi(t_0) - (t_0 - \alpha), \varphi(t_0) + (t_0 - \alpha)],$$

en contradiction avec la maximalité de φ. Ainsi $\alpha = -\infty$ et toute solution maximale de (E_1) est définie sur $\mathbb{R}$.

On passe maintenant à l'équation (E_2). Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$y^2 - y + 1 = (y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

donc

$$(*)\ e^y + y^2 - y + 1 > 0 + \frac{3}{4} > 0.$$

Ces premières lignes servent à montrer que l'application ci-dessous est bien définie. L'inégalité $(*)$ nous sera utile ultérieurement.

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t, y) & \mapsto & \frac{\ln(y^2+1)}{e^y+y^2-y+1} e^t + \ln(t^2 + 1) \end{array}$$

est de classe C^1 donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à l'équation (E_2).

Pour ce qui concerne l'équation (E_2), la stratégie est la suivante. Comme pour (E_1), on veut majorer le membre de droite de l'équation. On va montrer que ce membre de droite est majorée par une fonction de t continue sur $\mathbb{R}$ (qui ne dépend pas de y). Comme on va le voir, cela va suffire pour pouvoir appliquer le théorème des bouts. Pour ce faire, on veut majorer la fonction g définie ci-dessous.

On note

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{\ln(y^2+1)}{e^y+y^2-y+1} \end{array}.$$

Montrons que g est bornée.

Montrer que g est bornée va nous permettre de majorer le membre de droite de l'équation par une fonction de t uniquement.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y^2 + 1 \geq 1$ donc, par croissance de ln, $\ln(y^2 + 1) \geq \ln(1) = 0$. et, d'après $(*)$,

$$g(y) \geq 0.$$

Pour montrer que g est majorée, on va montrer que $\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{-\infty} g = 0$.

Plus généralement, on peut montrer qu'une application continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ est bornée. On va redémontrer cette propriété dans le cas particulier de g.

Pour calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$, on commence par effectuer les changements d'écriture classiques pour lever les indéterminations.

Pour $y > 0$, on a

$$\begin{array}{rcl} g(y) & = & \dfrac{\ln\left(y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\right)}{e^y\left(1+y^2e^{-y}-ye^{-y}+e^{-y}\right)} \\ & = & \frac{2\ln(y)}{e^y}.\frac{1}{(1+y^2e^{-y}-ye^{-y}+e^{-y})}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}{e^y(1+y^2e^{-y}-ye^{-y}+e^{-y})} \end{array}$$

donc $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = 0$. De plus, pour $y < 0$,

$$g(y) = \frac{2\ln(|y|)}{y^2}.\frac{1}{\left(1+\frac{e^y}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}\right)}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}{y^2\left(1+\frac{e^y}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}\right)}.$$

donc $\lim\limits_{y\to-\infty} g(y) = 0$. Par définition de la limite en $-\infty$ ou en $+\infty$, cela implique qu'il existe $A > 0$ tel que

$$\begin{cases} \forall y > A & , \quad g(y) \leq 1 \\ \forall y < -A & , \quad g(y) \leq 1. \end{cases}$$

Le choix de la borne 1 est ici arbitraire. 1 aurait pu être changée par n'importe quelle constante strictement positive dans ce raisonnement. On peut maintenant montrer que g est bornée.

De plus, comme la fonction g est continue sur $[-A, A]$, alors elle admet un maximum M_1 sur $[-A, A]$. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq g(y) \leq M = \max(M_1, 1).$$

On montre maintenant que les solutions maximales sont majorées en valeur absolue par une fonction qui ne dépend que de t.

Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ une solution maximale de (E_2). Alors, pour tout $t \in]\alpha, \beta[$,

$$\begin{array}{rcl} |\varphi'(t)| & = & |g(\varphi(t))e^t + \ln(t^2+1)| \\ & \leq & |g(\varphi(t))|e^t + |\ln(t^2+1)| \\ & \leq & Me^t + \ln(t^2+1) \end{array}$$

car, comme $t^2 + 1 \geq 1$, alors $\ln(t^2+1) \geq \ln(1) = 0$. Notons

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & Me^t + \ln(t^2+1) \end{array}.$$

h est continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in]\alpha, \beta[$,

$$|\varphi'(t)| \leq h(t).$$

Cette dernière majoration va nous permettre d'appliquer le théorème des bouts. On va comme dans le cas de (E_1) faire un raisonnement par l'absurde.

Fixons $t_0 \in]\alpha, \beta[$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\beta < +\infty$. Comme h est continue sur $[t_0, \beta]$, alors h admet un maximum M_2 sur $[t_0, \beta]$ et, pour tout $t \in [t_0, \beta[$, $|\varphi'(t)| \leq M_2$. Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall t \in [t_0, \beta[, |\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq M_2(t - t_0) \leq M_2(\beta - t_0).$$

Ainsi, pour $t \in [t_0, \beta[$, le couple $(t, \varphi(t))$ reste dans le compact $[t_0, \beta] \times [\varphi(t_0) - M_2(\beta - t_0), \varphi(t_0) + M_2(\beta - t_0)]$, en contradiction avec la maximalité de φ. Ainsi $\beta = +\infty$.

Démontrons de la même manière que $\alpha = -\infty$. Supposons que $\alpha > -\infty$. Par continuité de h, la fonction h admet un maximum M_3 sur $[\alpha, t_0]$ et, pour tout $t \in]\alpha, t_0]$, $|\varphi'(t)| \leq M_3$. Par conséquent, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in]\alpha, t_0], \ |\varphi(t) - \varphi(t_0)| & \leq & M_3|t - t_0| = M_3(t_0 - t) \\ & \leq & M_3(t_0 - \alpha). \end{array}$$

Ainsi, pour $t \in]\alpha, t_0]$, le couple $(t, \varphi(t))$ reste dans le compact $[\alpha, t_0] \times [\varphi(t_0) - M_3(t_0 - \alpha), \varphi(t_0) + M_3(t_0 - \alpha)]$, en contradiction avec la maximalité de φ. Ainsi, $\beta = +\infty$ et toute solution maximale de (E_2) est définie sur $\mathbb{R}$.

La méthode développée dans cet exercice marche à chaque fois que le membre de droite de l'équation peut être majorée par une fonction continue qui ne dépend que de t.

22 Séance 22

Exercice d'entraînement 22.1. 1. Montrer que les solutions maximales du système différentiel suivant sont définies sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x' = xy^2 \\ y' = -yx^2 \end{cases}$$

2. Montrer que les solutions maximales du système différentiel suivant sont définies sur un voisinage de $+\infty$.

$$\begin{cases} x' = -xy^2 \\ y' = -yx^2 \end{cases}$$

Indication : dans les deux cas, on pourra étudier la norme au carré d'une solution maximale.

Correction : 1. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t,(x,y)) & \mapsto & (xy^2, -yx^2) \end{array}$$

est de classe C^1 donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au système différentiel proposé.

Soit

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : &]\alpha,\beta[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

une solution maximale du système différentiel proposé.

On suit maintenant l'indication d'introduire la norme au carré d'une telle solution. Comme φ est définie comme solution d'une équation différentielle, il est naturel de vouloir dériver cette quantité.

L'application $N : t \mapsto \|\varphi(t)\|^2 = \varphi_1(t)^2 + \varphi_2(t)^2$ est dérivable sur $]\alpha,\beta[$ et, pour tout $t \in]\alpha,\beta[$,

$$\begin{array}{rcl} N'(t) & = & 2\varphi_1'(t)\varphi_1(t) + 2\varphi_2'(t)\varphi_2(t) \\ & = & 2\varphi_1(t)\varphi_2(t)^2\varphi_1(t) + 2.(-\varphi_2(t)\varphi_1(t)^2)\varphi_2(t) \\ & = & 0. \end{array}$$

Ainsi, la fonction N est constante égale à $C \geq 0$ et, pour tout $t \in]\alpha,\beta[$, $\|\varphi(t)\| = \sqrt{C}$.

Ainsi, notre solution maximale, de norme constante, reste bornée, ce qui nous permet d'appliquer le théorème des bouts.

Fixons $t_0 \in]\alpha,\beta[$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\beta < +\infty$. Alors, pour tout $t \in [t_0,\beta[$, le couple $(t,\varphi(t))$ reste dans le compact

$$[t_0,\beta] \times \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{C} \right\}$$

en contradiction avec la maximalité de φ. Ainsi, $\beta = +\infty$. De même, on montre que $\alpha = -\infty$.

2. *La stratégie pour ce deuxième point est similaire celle employée pour le premier point.*

L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t,(x,y)) & \mapsto & (-xy^2, -yx^2) \end{array}$$

est de classe C^1 donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au système différentiel proposé.

Soit

$$\begin{array}{rccl} \varphi: &]\alpha,\beta[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

une solution maximale du système différentiel proposé.

L'application $N : t \mapsto \|\varphi(t)\|^2 = \varphi_1(t)^2 + \varphi_2(t)^2$ est dérivable sur $]\alpha,\beta[$ et, pour tout $t \in]\alpha,\beta[$,

$$\begin{array}{rcl} N'(t) & = & 2\varphi_1'(t)\varphi_1(t) + 2\varphi_2'(t)\varphi_2(t) \\ & = & 2.(-\varphi_1(t)\varphi_2(t)^2)\varphi_1(t) + 2.(-\varphi_2(t)\varphi_1(t)^2)\varphi_2(t) \\ & = & -4\varphi_1(t)^2\varphi_2(t)^2 \\ & \leq & 0. \end{array}$$

La fonction N est donc décroissante là où elle est définie.

On fixe $t_0 \in]\alpha,\beta[$. Alors, pour $t \in [t_0,\beta[$, $\|\varphi(t)\|^2 = N(t) \leq N(t_0)$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\beta < +\infty$. Alors, pour tout $t \in [t_0,\beta[$, le couple $(t,\varphi(t))$ reste dans le compact

$$[t_0,\beta] \times \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq \sqrt{N(t_0)} \right\}$$

en contradiction avec la maximalité de φ. Ainsi, $\beta = +\infty$. Les solutions maximales de ce système différentiel sont donc définies sur un voisinage de $+\infty$.

23 Séance 23

Exercice d'entraînement 23.1. On fixe $t_0 \in \mathbb{R}$,et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On note (PC) le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x^3 + y^2 x \\ y' & = & y^3 + y x^2 \\ x(t_0) & = & x_0 \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. .$$

On fixe une solution maximale $t \mapsto (x(t), y(t))$ de (PC) définie sur $]\alpha, \beta[$ et on pose $f(t) = x(t)^2 + y(t)^2$. Le but de l'exercice est de déterminer α et β.

1. Justifier pourquoi le problème (PC) admet une unique solution maximale.
2. Déterminer une équation différentielle (E) vérifiée par f.
3. On fixe un nombre réel η_0. Déterminer la solution maximale φ de (E) telle que $\varphi(t_0) = \eta_0$.
4. En déduire les valeurs de α et de β.

Correction : 1. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) & \mapsto & (x^3 + y^2 x, y^3 + y x^2) \end{array}$$

est polynômiale donc de classe C^1. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au problème (PC), ce qui nous assure l'existence d'une unique solution à (PC).

2.L'application f est dérivable sur $]\alpha, \beta[$ et

$$\begin{array}{rcl} f' & = & 2x'x + 2y'y \\ & = & 2(x^3 + y^2 x)x + 2(y^3 + y x^2)y \\ & = & 2x^4 + 4x^2 y^2 + 2y^4 \\ & = & 2(x^2 + y^2)^2 \\ & = & 2f^2 \end{array}$$

donc f est solution de l'équation différentielle (E) $y' = 2y^2$.

3. *L'équation différentielle (E) est une équation à variables séparables. On réutilise donc les techniques vues lors des séances 17 et 18.*

Notons que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, y) & \mapsto & 2y^2 \end{array}$$

est de classe C^1 donc il existe un unique φ tel que défini par l'énoncé.

Pour résoudre l'équation (E), il s'agit de diviser par $\varphi(t)^2$ donc on va commencer par analyser le cas où φ s'annule.

Si $\eta_0 = 0$, alors l'application φ est

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 0 \end{array} .$$

Supposons donc que $\eta_0 \neq 0$. Notons J l'intervalle de définition de φ.

Si la fonction φ s'annulait en un point t_1 de I alors φ et la fonction nulle seraient des solutions de (E) vérifiant une même condition initiale en t_1 donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\varphi = 0$, en contradiction avec le fait que $\varphi(t_0) = \eta_0 \neq 0$. Ainsi, la fonction φ ne s'annule pas et

$$\frac{\varphi'}{\varphi^2} = 2.$$

Ainsi, pour tout nombre réel t dans J,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right) = -2$$

et, en intégrant entre t_0 et $t \in J$:

$$\frac{1}{\varphi(t)} - \frac{1}{\varphi(t_0)} = -2(t - t_0) = 2t_0 - 2t$$

donc

$$\frac{1}{\varphi(t)} = \frac{1}{\eta_0} + 2t_0 - 2t.$$

Par conséquent, pour tout t dans J,

$$\frac{1}{\eta_0} + 2t_0 - 2t \neq 0$$

ce qui revient à dire que

$$t \neq t_0 + \frac{1}{2\eta_0}.$$

Comme $t_0 \in J$ alors, si $\eta_0 < 0$ alors $J \subset]t_0 + \frac{1}{2\eta_0}, +\infty[$ et, si $\eta_0 > 0$, alors $J \subset]-\infty, t_0 + \frac{1}{2\eta_0}[$ et, pour tout $t \in J$,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\frac{1}{\eta_0} + 2t_0 - 2t}.$$

Réciproquement, une fonction comme ci-dessus est dérivable sur J et, pour tout $t \in J$,

$$\varphi'(t) = -\frac{-2}{\left(\frac{1}{\eta_0} + 2t_0 - 2t\right)^2} = 2\varphi(t)^2.$$

Comme la solution φ est maximale, alors

1. si $\eta_0 > 0$, l'application φ est

$$\begin{array}{rcl}]-\infty, t_0 + \frac{1}{2\eta_0}[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{\frac{1}{\eta_0}+2t_0-2t} \end{array}.$$

2. si $\eta_0 < 0$, l'application φ est

$$\begin{array}{rcl}]t_0 + \frac{1}{2\eta_0}, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{\frac{1}{\eta_0}+2t_0-2t} \end{array}.$$

4. Si $(x_0, y_0) = (0, 0)$, alors l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto (0, 0)$ est solution de (PC) d'où, d'après la question 1., $]\alpha, \beta[= \mathbb{R}$ et (x, y) est l'application nulle.

Supposons maintenant que $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

On commence par appliquer les résultats des questions précédentes.

Alors $f(t_0) = x_0^2 + y_0^2 > 0$. Or, d'après la question 2., la fonction f est solution de l'équation (E). Ainsi, la fonction f est restriction de la solution maximale φ de (E) qui vérifie $\varphi(t_0) = x_0^2 + y_0^2 > 0$.

Une telle solution a été calculée lors de la réponse à la question précédente. On a aussi vu dans la question précédente que l'on pouvait appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à une telle équation d'où l'existence et l'unicité d'un tel φ.

Par conséquent, d'après la question 3., $]\alpha, \beta[\subset] - \infty, t_0 + \frac{1}{2(x_0^2+y_0^2)}[$ et, pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, $f(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0^2+y_0^2}+2t_0-2t}$. En particulier $\beta \leq t_0 + \frac{1}{2(x_0^2+y_0^2)}$.

Montrons par l'absurde que $\alpha = -\infty$ et $\beta = t_0 + \frac{1}{2(x_0^2+y_0^2)}$.

Il s'agit ici d'appliquer le théorème des bouts pour arriver à une telle conclusion.

Supposons que $\beta < t_0 + \frac{1}{2(x_0^2+y_0^2)}$. Alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{\frac{1}{x_0^2+y_0^2}+2t_0-2t}$ est bien définie et continue sur le compact $[t_0, \beta]$ donc admet un maximum M sur ce compact. Par conséquent, pour $t \in [t_0, \beta[$,

$$\|(x(t), y(t))\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{f(t)} \leq \sqrt{M}.$$

Ainsi, pour $t \in [t_0, \beta[$, $(t, (x(t), y(t)))$ reste dans le compact $[t_0, \beta] \times \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| \leq \sqrt{M}\right\}$, en contradiction avec la maximalité de notre solution. Ainsi, $\beta = t_0 + \frac{1}{2(x_0^2+y_0^2)}$.

Supposons maintenant que $\alpha > -\infty$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\frac{1}{x_0^2+y_0^2}+2t_0-2t}$ est bien définie et continue sur le compact $[\alpha, t_0]$ donc admet un maximum M' sur ce compact. Par conséquent, pour $t \in]\alpha, t_0]$,

$$\|(x(t), y(t))\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{f(t)} \leq \sqrt{M'}.$$

Ainsi, pour $t \in]\alpha, t_0]$, $(t, (x(t), y(t)))$ reste dans le compact $[\alpha, t_0] \times \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| \leq \sqrt{M'}\right\}$, en contradiction avec la maximalité de notre solution. Ainsi, $\alpha = -\infty$ et $]\alpha, \beta[=] - \infty, t_0 + \frac{1}{2(x_0^2+y_0^2)}[$.

24 Séance 24

Exercice d'entraînement 24.1. Étudier l'intervalle d'existence des solutions maximales du système différentiel suivant.

$$(S)\ \begin{cases} x' = \arctan(y)x + 2y + \cos(t) \\ y' = \sin(y)x \end{cases}$$

Correction : L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 & \\ \left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} \arctan(y)x + 2y + \cos(t) \\ \sin(y)x \end{pmatrix} \end{array}$$

est de classe C^1 donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au système différentiel proposé.

On note

$$\begin{array}{rccc} \varphi : &]\alpha,\beta[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

une solution maximale de (S).

On va démontrer que φ vérifie les hypothèses du lemme de Gronwall. La conclusion du lemme de Gronwall nous permettra alors d'appliquer le théorème des bouts pour montrer que $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$.

Pour tout $t \in]\alpha,\beta[$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|\varphi'(t)\| & = & \left\| \begin{pmatrix} \arctan(\varphi_2(t))\varphi_1(t) + 2\varphi_2(t) + \cos(t) \\ \sin(\varphi_2(t))\varphi_1(t) \end{pmatrix} \right\| \\ & \leq & \left\| \begin{pmatrix} \arctan(\varphi_2(t))\varphi_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + 2 \left\| \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\varphi_2(t))\varphi_1(t) \end{pmatrix} \right\| \\ & \leq & |\arctan(\varphi_2(t))| \left\| \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + 2 \left\| \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + |\cos(t)| + |\sin(\varphi_2(t))| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix} \right\| \\ & \leq & \frac{\pi}{2}|\varphi_1(t)| + 2|\varphi_2(t)| + 1 + |\varphi_1(t)| \\ & \leq & (\frac{\pi}{2} + 3)\,\|\varphi(t)\| + 1 \leq 5\,\|\varphi(t)\| + 1 \ (*) \end{array}$$

On vient de démontrer que φ vérifie les hypothèses du lemme Gronwall en utilisant essentiellement l'inégalité triangulaire. On applique maintenant le lemme de Gronwall.

Soit $t_0 \in]\alpha,\beta[$. D'après le lemme de Gronwall, pour tout $t \in [t_0,\beta[$, $\|\varphi(t)\| \leq \rho(t)$, où $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne l'unique solution de l'équation différentielle $y' = 5y + 1$ telle que $\rho(t_0) = \|\varphi(t_0)\|$.

Ceci va nous permettre d'appliquer le théorème des bouts.

Supposons que $\beta < +\infty$. Comme ρ est continue sur l'intervalle compact $[t_0,\beta]$, elle admet un maximum M sur cet intervalle et, pour tout $t \in [t_0,\beta[$, $\|\varphi(t)\| \leq M$. Ainsi, pour $t \in [t_0,\beta[$, le couple $(t,\varphi(t))$ reste dans le compact $[t_0,\beta] \times \overline{B}(0,M)$, où $\overline{B}(0,M)$ désigne la boule euclidienne fermée de centre 0 et de rayon M de $\mathbb{R}^2$, en contradiction avec la maximalité de φ. Ainsi $\beta = +\infty$.

Montrons maintenant que $\alpha = -\infty$.

Pour appliquer le lemme de Gronwall pour $t \leq t_0$, on va appliquer le lemme de Gronwall à $t \mapsto \varphi(-t)$ pour $t \geq -t_0$.

Notons $\tilde{\varphi}$ l'application définie sur $]-\infty, -\alpha[$ par $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t)$. Alors $\tilde{\varphi}$ est dérivable sur $]-\infty, -\alpha[$ et, pour tout $t \in]-\infty, -\alpha[$,

$$\|\tilde{\varphi}'(t)\| = \|-\varphi'(-t)\| = \|\varphi'(-t)\| \leq 5\,\|\varphi(-t)\| + 1$$

d'après l'inégalité $(*)$ donc $\|\tilde{\varphi}'(t)\| \leq 5\,\|\tilde{\varphi}(t)\| + 1$. D'après le lemme de Gronwall, on en déduit que, pour tout $t \in [-t_0, -\alpha[$, $\|\varphi(-t)\| = \|\tilde{\varphi}(t)\| \leq \tilde{\rho}(t)$, où $\tilde{\rho} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'unique solution du problème de Cauchy $y' = 5y + 1$ avec $y(-t_0) = \|\tilde{\varphi}(-t_0)\| = \|\varphi(t_0)\|$. Ainsi, pour tout $t \in]\alpha, t_0]$, $\|\varphi(t)\| \leq \tilde{\rho}(-t)$.

Supposons que $\alpha > -\infty$. Notons que, comme $t \mapsto \tilde{\rho}(-t)$ est continue sur le compact $[\alpha, t_0]$, elle y admet un maximum M'. Ainsi, pour $t \in]\alpha, t_0]$, le couple $(t, \varphi(t))$ reste dans le compact $[\alpha, t_0] \times \overline{B}(0, M')$, en contradiction avec la maximalité de φ. Ainsi, $\alpha = -\infty$. Les solutions maximales de (S) sont définies sur $\mathbb{R}$.