Équations différentielles

Emmanuel Militon

Table des matières

Chapitre 1

Généralités

1.1 Équations différentielles d'ordre 1

On note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1. *On appelle* équation différentielle d'ordre 1 *toute équation portant sur une fonction d'une variable réelle y qui peut s'écrire sous la forme*

$$(E) \quad f(t, y, y') = 0,$$

où

$$\begin{array}{rccc} f: & U & \to & \mathbb{K} \\ & (t, y_0, y_1) & \mapsto & f(t, y_0, y_1) \end{array}$$

est une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^2$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.2. *On appelle solution de (E) à valeurs dans $\mathbb{K}$ toute application $\varphi : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout nombre réel t de I,*

$$\left\{ \begin{array}{l} (t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in U \\ f(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0. \end{array} \right.$$

Dans le cadre de la recherche des solutions d'une équation différentielle, si l'on ne mentionne pas si l'on recherche des solutions à valeurs réelles ou complexes, on considère par défaut que l'on recherche les solutions à valeurs réelles.

Exemple 1.3. $(y')^2 = \arctan(t) y^3$ est une équation différentielle puisque l'on peut la réécrire sous la forme

$$(y')^2 - \arctan(t) y^3 = 0.$$

Elle est donc de la forme donnée par la définition en posant

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (t, y_0, y_1) & \mapsto & y_1^2 - \arctan(t) y_0^3 \end{array}.$$

La fonction nulle est solution de cette équation différentielle puisque

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0^2 - \arctan(t) 0^3 = 0.$$

La plupart du temps, la première étape pour déterminer les solutions d'une équation différentielle est de la mettre sous la forme suivante.

Une équation différentielle de la forme

$$y' = f(t, y),$$

où $f : U \to \mathbb{K}$ est une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$, est dite sous forme résolue.

La variable t est appelée la variable de temps et la variable y est appelée variable de phase ou de position.

Exemple 1.4. Les équations différentielles $y' = t$ et $y' = 2ty^2 + \cos(\arctan(y))$ sont des équations différentielles sous forme résolue.

1.2 Systèmes différentiels d'ordre 1

On fixe un entier $p \geq 1$. On appelle *système différentiel d'ordre* 1 (sous forme résolue) tout système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_p) \\ y_2' & = & f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_p' & = & f_p(t, y_1, y_2, \ldots, y_p) \end{array} \right.$$

où les fonctions f_i sont définies sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ et les y_i sont les fonctions inconnues.

En posant

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(t, Y) = \begin{pmatrix} f_1(t, Y) \\ \vdots \\ f_p(t, Y) \end{pmatrix},$$

on peut voir un tel système différentiel comme une équation différentielle vectorielle d'ordre 1

$$(S)\ Y' = f(t, Y)$$

d'inconnue Y.

Dans ce cours, vue l'équivalence ci-dessus, on appellera système différentiel toute équation différentielle vectorielle et on parlera d'équation différentielle uniquement lorsque $p = 1$. Là encore, on appelle t la variable de temps du système (S) et Y la variable de position ou variable de phase de (S) (que l'on notera parfois X ou y ou x dans ce cours).

Définition 1.5 (solution de (S))**.** *On appelle* solution de (S) *toute application* $Y : I \to \mathbb{K}^p$ *dérivable sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall t \in I, \ \left\{ \begin{array}{l} (t, Y(t)) \in U \\ Y'(t) = f(t, Y(t)). \end{array} \right.$$

Exemple 1.6. Le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lllll} x' & = & \alpha x & - & \gamma xy \\ y' & = & -\gamma y & + & \delta xy, \end{array}\right.$$

où α, β, γ et δ sont des paramètres réels strictement positifs, est appelé le système de Lotka-Volterra. Il a servi à modéliser l'évolution d'une population de poissons dans la mer Adriatique.

1.3 Systèmes différentiels d'ordre $n \geq 1$

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On appelle *système différentiel d'ordre n* (sous forme résolue) tout système de la forme

$$(S_n) \quad Y^{(n)} = f(t, Y, Y', Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n-1)})$$

où

$$f: \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{K}^p \\ (t, (Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})) & \mapsto & f(t, (Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})) \end{array}$$

est une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times (\mathbb{K}^p)^n$ et Y est une fonction inconnue à valeurs dans $\mathbb{K}^p$.

Définition 1.7 (Solution de (S_n))**.** *On appelle solution de (S_n) toute application $Y : I \to \mathbb{K}^p$ n fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall t \in I, \ \left\{\begin{array}{l} (t, Y(t), Y'(t), \ldots, Y^{(n-1)}(t)) \in U \\ Y^{(n)}(t) = f(t, Y(t), Y'(t), \ldots, Y^{(n-1)}(t)). \end{array}\right.$$

L'étude des systèmes différentiels d'ordre n n'est pas plus générale que l'étude des systèmes d'ordre 1 : la proposition suivante permet de ramener l'étude d'un système d'ordre n à l'étude d'un système d'ordre 1.

Proposition 1.8. *Une application $Y : I \to \mathbb{K}^p$ est solution du système (S_n) si et seulement si Y est la première composante d'une solution définie sur I du système (S'_n) d'ordre 1*

$$\left\{\begin{array}{ccl} Y'_0 & = & Y_1 \\ Y'_1 & = & Y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y'_{n-2} & = & Y_{n-1} \\ Y'_{n-1} & = & f(t, Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}). \end{array}\right.$$

Démonstration. Si $Y : I \to \mathbb{K}^p$ est solution de (S_n) alors l'application

$$t \mapsto \begin{pmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \\ \vdots \\ Y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

est solution du système (S'_n).

Réciproquement, si l'application

$$\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \end{pmatrix} : I \to (\mathbb{K}^p)^n$$

est solution du système (S'_n), alors, pour tout entier $i \in [0, n-2]$,

$$Y'_i = Y_{i+1}.$$

Une récurrence permet alors de démontrer que, pour tout entier $i \in [0, n-1]$, l'application Y_0 est i fois dérivable et $Y_i = Y_0^{(i)}$. Comme Y_{n-1} est dérivable sur I, alors l'application Y_0 est n fois dérivable sur I. Comme, pour tout nombre réel t de I,

$$(t, Y_0(t), Y_1(t), \ldots, Y_{n-1}(t)) \in U$$

alors, pour tout nombre réel t de I,

$$(t, Y_0(t), Y'_0(t), \ldots, Y_0^{(n-1)}(t)) \in U$$

De plus, la dernière ligne du système nous donne que, pour tout nombre réel t de I,

$$Y_0^{(n)}(t) = f(t, Y_0(t), Y'_0(t), \ldots, Y_0^{(n-1)}(t))$$

donc Y_0 est solution de (S_n). □

Exemple 1.9. L'étude de l'équation différentielle $y'' + t^2 y' + 2y = 0$ se ramène à l'étude du système différentiel d'ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'_0 & = & y_1 \\ y'_1 & = & -t^2 y_1 - 2y_0. \end{array} \right.$$

1.4 Étude des équations différentielles linéaires d'ordre 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ des applications. On veut résoudre l'équation différentielle $(E_{l,1})$ suivante

$$y' = a(t)y + b(t),$$

c'est-à-dire trouver l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de $(E_{l,1})$ définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les équations différentielles de cette forme sont appelées *équations différentielles linéaires d'ordre* 1. La fonction b est appelée le *second membre* de $(E_{l,1})$. Lorsque le second membre est nul, on dit que l'équation différentielle est homogène.

Avant de résoudre cette équation différentielle en général, on va regarder le cas particulier où $a = 0$. Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{E}$ est l'ensemble des primitives sur I de la fonction b. Si la fonction b est continue sur I et si t_0 est un nombre réel dans I, alors

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \int_{t_0}^t b(s)ds + C \end{array}, C \in \mathbb{K} \right\}.$$

Maintenant, regardons le cas général où la fonction a n'est pas nécessairement nulle. On suppose les fonctions a et b continues. L'idée dans ce cas est de se ramener au cas précédent, c'est-à-dire à un problème de primitive.

Décrivons l'astuce pour se ramener à un problème de primitive. Tout d'abord, on réécrit l'équation

$$y' - a(t)y = b(t).$$

Notons $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a sur I. Pour toute fonction $\varphi : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I, la fonction $e^{-A}\varphi$ est dérivable sur I et, pour tout nombre réel t de I,

$$(e^{-A}\varphi)'(t) = e^{-A(t)}\varphi'(t) - A'(t)e^{-A(t)}\varphi(t) = (\varphi'(t) - a(t)\varphi(t))e^{-A(t)}.$$

On peut donc réécrire l'équation $(E_{l,1})$ sous la forme

$$(e^{-A}y)' = b(t)e^{-A(t)}.$$

On est ramené à un problème de primitive. On a décrit la méthode pour résoudre les équations linéaires d'ordre 1, que l'on applique dans l'exercice suivant.

Exercice 1.10 (Ensemble des solutions de $(E_{l,1})$)**.** On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions continues sur I. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ de l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = b(t).$$

L'équation différentielle $(E^h_{l,1})$ suivante

$$y' = a(t)y$$

est appelée équation homogène associée à $(E_{l,1})$. Le théorème suivant est une conséquence de la solution de l'exercice 1.10.

Théorème 1.11. *On suppose que la fonction a est continue sur I et on fixe un point t_0 de I. L'ensemble des solutions de $(E^h_{l,1})$ définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & Ce^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \end{array}, C \in \mathbb{K} \right\}.$$

On va maintenant présenter deux propriétés qui seront revues dans un cadre plus général dans la suite de ce cours.

Proposition 1.12 (Structure de l'ensemble des solutions)**.** *On note $\varphi_0 : I \to \mathbb{K}$ une solution définie sur I de l'équation $(E_{l,1})$.*

L'ensemble des solutions définies sur I de $(E_{l,1})$ est l'ensemble des applications de la forme $\varphi_0 + \varphi_h$, où φ_h est une solution définie sur I de $(E^h_{l,1})$.

Comme le théorème 1.11 nous donne l'ensemble des solutions de $(E^h_{l,1})$, il suffit de déterminer une solution particulière φ_0 de $(E_{l,1})$ pour en déduire l'ensemble des solutions de $(E_{l,1})$.

Pour trouver une telle solution particulière, la méthode vue auparavant consiste à dériver la fonction C définie par $C(t) = y(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$, ce qui revient à chercher une solution sous la forme $y(t) = C(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$. Cette méthode est appelée *méthode de la variation de la constante* puisqu'elle consiste à remplacer la constante C du théorème 1.11 par une fonction inconnue $C(t)$.

La démonstration de la proposition 1.12 est l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 1.13. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur I. On note (E) l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = b(t)$$

et (E_h) l'équation homogène qui lui est associée. On note φ_0 une solution de (E) qui est définie sur I. Montrer que l'ensemble des solutions définies sur I de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions de la forme $\varphi_0 + \varphi_h$, où φ_h est une solution définie sur I de l'équation différentielle (E_h).

La propriété suivante sera généralisée plus tard dans ce cours en un théorème fondamental de la théorie des équations différentielles, le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Proposition 1.14 (Théorème de Cauchy-Lipschitz : cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1)**.** *On fixe des points $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. On suppose que les fonctions a et b sont continues sur I. Alors il existe une unique solution définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ du système*

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & a(t)y + b(t) \\ y(t_0) & = & y_0. \end{array} \right.$$

De par les théorèmes d'existence et d'unicité que l'on peut obtenir, les problèmes de la forme (PC) ont un nom : on les appelle des *problèmes de Cauchy*.

En pratique, pour déterminer une solution d'une équation différentielle avec condition initiale spécifiée, on commence par déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différnetielle. Ensuite, on déterminer parmi ces solutions celles qui vérifient la condition initiale.

Démonstration. On utilise la formule trouvée lors de l'exercice 1.10. Soit φ une solution définie sur I de l'équation $(E_{l,1})$. Alors il existe une constante C de $\mathbb{K}$ telle que, pour tout nombre réel t de I,

$$\varphi(t) = Ce^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t b(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds.$$

Ainsi, une telle solution φ vérifie $\varphi(t_0) = y_0$ si et seulement si $C = y_0$. Le système (PC) admet donc une unique solution définie sur I : c'est l'application

$$\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & y_0e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t b(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds. \end{array}$$

□

Chapitre 2

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Dans ce chapitre, on note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $d \geq 1$ un entier, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d} \in M_d(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille $d \times d$ et

$$\begin{array}{rccl} B: & I & \to & \mathbb{K}^d \\ & t & \mapsto & (b_i(t))_{1 \leq i \leq d} \end{array}$$

une application continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Par commodité d'écriture, on assimilera les éléments de $\mathbb{K}^d$ à des vecteurs-colonnes. Dans ce chapitre, on va chercher à résoudre le système différentiel (d'inconnue $X : I \to \mathbb{K}^d$)

$$(S)\ X' = AX + B(t)$$

et le système homogène qui lui est associé

$$(S_0)\ X' = AX.$$

2.1 Méthode élémentaire

2.1.1 Cas où la matrice A est triangulaire supérieure

Supposons ici que la matrice A est triangulaire supérieure, c'est-à-dire que $a_{i,j} = 0$ si $i > j$. Si l'on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$, le système (S) se réécrit

$$\begin{array}{cccccccccccc} (E_1) & x_1' & = & a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,d}x_d & + & b_1(t) \\ (E_2) & x_2' & = & & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,d}x_2 & + & b_2(t) \\ & \vdots & \vdots & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ (E_d) & x_d' & = & & & & & & & a_{d,d}x_d & + & b_d(t). \end{array}$$

On a vu dans le chapitre précédent comment résoudre l'équation différentielle (E_d) qui n'a qu'une seule fonction inconnue : x_d. On détermine alors l'expression des solutions (E_d) et on utilise la formule trouvée pour x_d dans (E_{d-1}). On peut alors résoudre l'équation (E_{d-1}) qui n'a plus qu'une seule inconnue : x_{d-1}. On peut ensuite résoudre successivement (E_{d-2}), (E_{d-3}), ... Au final, il suffit de savoir résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 1 pour résoudre de tels systèmes. Noter que la méthode fonctionne même dans le cas où la matrice A aurait des coefficients variables.

Exemple 2.1. Résolvons le système différentiel

$$(S_1)\ \left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & 2x & + & 3y \\ y' & = & & & 2y. \end{array}\right.$$

<u>Convention</u> : Lorsqu'on ne mentionne pas si l'on cherche des solutions à valeurs réelles ou à valeurs complexes d'un système différentiel, on considérera par défaut dans ce cours que l'on recherche les solutions à valeurs réelles. C'est le cas dans cet exercice.

Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

une application dérivable sur $\mathbb{R}$. L'application Φ est solution du système (S_1) si et seulement si

$$(*)\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcrcr} \varphi_1'(t) & = & 2\varphi_1(t) & + & 3\varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) & = & & & 2\varphi_2(t) \end{array}\right. .$$

On commence par résoudre la deuxième ligne du système.

$$\begin{array}{rcl} (*) & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcrcr} \varphi_1'(t) & = & 2\varphi_1(t) & + & 3\varphi_2(t) \\ \frac{d}{dt}(\varphi_2(t)e^{-2t}) & = & 0 & & \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \exists C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcrcr} \varphi_1'(t) & = & 2\varphi_1(t) & + & 3\varphi_2(t) \\ \varphi_2(t)e^{-2t} & = & C_2 & & \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \exists C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcrcr} \varphi_1'(t) & = & 2\varphi_1(t) & + & 3\varphi_2(t) \\ \varphi_2(t) & = & C_2e^{2t} & & \end{array}\right. \end{array}$$

On reporte alors l'expression de φ_2 dans la première équation.

$$\begin{array}{rcl} (*) & \Leftrightarrow & \exists C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}(\varphi_1(t)e^{-2t}) & = & 3\varphi_2(t)e^{-2t} \\ \varphi_2(t) & = & C_2e^{2t} \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \exists C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}(\varphi_1(t)e^{-2t}) & = & 3C_2 \\ \varphi_2(t) & = & C_2e^{2t} \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \exists C_1,\ C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} \varphi_1(t)e^{-2t} & = & 3C_2t + C_1 \\ \varphi_2(t) & = & C_2e^{2t} \end{array}\right. \end{array}$$

L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système (S_1) est alors

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} (C_1 + 3C_2t)e^{2t} \\ C_2e^{2t} \end{pmatrix} \end{array},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.1.2 Cas d'une matrice A trigonalisable

Dans le cas général, pour résoudre le système différentiel (S), on tente de se ramener au cas où la matrice A est triangulaire supérieure.

Supposons que l'on puisse trigonaliser la matrice A sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice P de $Gl_d(\mathbb{K})$ et une matrice T de $M_d(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$. C'est par exemple le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et la matrice A est diagonalisable à valeurs propres réelles.

En multipliant le système (S) par la matrice P^{-1} à gauche, le système (S) se réécrit

$$(P^{-1}X)' = TP^{-1}X + P^{-1}B(t).$$

On change alors d'application inconnue en posant $\tilde{X} = P^{-1}X$. Cette nouvelle application $\tilde{X}$ vérifie alors un système triangulaire supérieur : la section précédente nous permet de résoudre ce système et de déterminer $\tilde{X}$.

De manière équivalente, cela revient à chercher X sous la forme

$$X(t) = \tilde{x}_1(t)u_1 + \tilde{x}_2(t)u_2 + \ldots + \tilde{x}_d(t)u_d$$

où $(u_i)_{1\leq i\leq d}$ est une base de trigonalisation de la matrice A. Les fonctions $\tilde{x}_i$ vérifient alors un système différentiel triangulaire supérieur.

Exemple 2.2. Résolvons le système différentiel

$$(S_2)\ \left\{\begin{array}{rcrcl} x' & = & 2x & + & y \\ y' & = & x & + & y. \end{array}\right.$$

La première étape pour résoudre ce système différentiel consiste à réduire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme le lecteur sait réduire des matrices, on ne va pas détailler cette étape ici.

On pose

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de la matrice A. Les vecteurs-propres u_1 et u_2 sont respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Ainsi $Au_1 = \lambda_1 u_1$ et $Au_2 = \lambda_2 u_2$.

Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons, pour tout nombre réel t,

$$\Phi(t) = \tilde{\varphi}_1(t)u_1 + \tilde{\varphi}_2(t)u_2.$$

L'application Φ est solution du système (S_2) si et seulement si

$$(*)\ \forall t \in \mathbb{R}, \Phi'(t) = A\Phi(t).$$

On utilise maintenant la décomposition de Φ introduite plus haut et le fait que u_1 et u_2 sont des vecteurs propres de A.

$$\begin{array}{rcl} (*) & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ \tilde{\varphi}_1'(t)u_1 + \tilde{\varphi}_2'(t)u_2 = \tilde{\varphi}_1(t)Au_1 + \tilde{\varphi}_2(t)Au_2 \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ \tilde{\varphi}_1'(t)u_1 + \tilde{\varphi}_2'(t)u_2 = \lambda_1\tilde{\varphi}_1(t)u_1 + \lambda_2\tilde{\varphi}_2(t)u_2. \end{array}$$

Comme (u_1, u_2) est une famille libre, on a

$$\begin{array}{rcl} (*) & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{\varphi}_1'(t) & = & \lambda_1\tilde{\varphi}_1(t) \\ \tilde{\varphi}_2'(t) & = & \lambda_2\tilde{\varphi}_2(t) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{\varphi}_1(t) & = & C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \tilde{\varphi}_2(t) & = & C_2 e^{\lambda_2 t} \end{array} \right. \end{array}$$

En utilisant les expressions des vecteurs u_1 et u_2, on en déduit l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système (S_2)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} C_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \end{array},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.1.3 Cas général

Lorsque la matrice A a des valeurs propres complexes, il se peut que la matrice A ne soit pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de réduction de Jordan, elle est néanmoins trigonalisable sur $\mathbb{C}$. On peut donc calculer les solutions du système à valeurs dans $\mathbb{C}$ et utiliser la proposition suivante, qui consiste à prendre la partie réelle des solutions obtenues.

On note $\mathcal{S}_{I,\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions du système différentiel (S) définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{S}_{I,\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions du système différentiel (S) définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout vecteur v de $\mathbb{C}^d$ on appelle partie réelle de v et on note $\mathcal{R}e(v)$ le vecteur de $\mathbb{R}^d$ dont les composantes sont les parties réelles des composantes de v.

Proposition 2.3. *L'ensemble $\mathcal{S}_{I,\mathbb{R}}$ est l'ensemble des parties réelles des applications dans $\mathcal{S}_{I,\mathbb{C}}$. Autrement dit,*

$$\mathcal{S}_{I,\mathbb{R}} = \left\{ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & \mathcal{R}e(\varphi(t)) \end{array},\ \varphi \in \mathcal{S}_{I,\mathbb{C}} \right\}.$$

Démonstration. Si $\varphi \in \mathcal{S}_{I,\mathbb{R}}$, alors l'application

$$\begin{array}{rrcl} \tilde{\varphi}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \varphi(t) \end{array}$$

appartient à $\mathcal{S}_{I,\mathbb{C}}$ et, pour tout nombre réel t, $\varphi(t) = \mathcal{R}e(\tilde{\varphi}(t))$.

Réciproquement, si $\varphi \in \mathcal{S}_{I,\mathbb{C}}$, alors, pour tout nombre réel t de I,

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) + B(t)$$

donc, en prenant la partie réelle de chaque ligne de ce système et comme A et B sont à coefficients réels,

$$\mathcal{R}e(\varphi)'(t) = A\mathcal{R}e(\varphi)(t) + B(t).$$

Ainsi, $\mathcal{R}e(\varphi) \in \mathcal{S}_{I,\mathbb{R}}$. □

Une autre méthode consiste à réduire la matrice A en une matrice triangulaire supérieure par blocs dont les blocs diagonaux sont soit des coefficients réels, soit des matrices de similitudes, c'est-à-dire des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

où a et b sont des coefficients réels. Voyons maintenant pourquoi un système de la forme

$$(S_{a,b}) \left\{ \begin{array}{lllll} x' & = & ax & - & by \\ y' & = & bx & + & ay \end{array} \right.$$

est facile à résoudre. L'astuce principale consiste à poser $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Soit

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons, pour tout nombre réel t,

$$z(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t).$$

L'application Φ est solution du système $(S_{a,b})$ si et seulement si, pour tout nombre réel t,

$$z'(t) = (a + ib)z(t)$$

c'est-à-dire qu'il existe une constante complexe $C = C_1 + iC_2$ telle que, pour tout nombre réel t,

$$z(t) = Ce^{(a+ib)t}.$$

En prenant les parties réelles et imaginaires de z, on en déduit l'ensemble des solutions du système $(S_{a,b})$ qui est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} e^{at}(C_1\cos(bt) - C_2\sin(bt)) \\ e^{at}(C_1\sin(bt) + C_2\cos(bt)) \end{pmatrix} \end{array} ,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

On utilisera notamment cette méthode pour tracer les portraits de phase de systèmes différentiels dans le plan.

2.2 Portrait de phase des systèmes différentiels linéaires dans le plan

On note
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$
On s'intéresse dans cette section au système différentiel (d'inconnues les fonctions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccc} x' & = & ax & + & by \\ y' & = & cx & + & dy. \end{array} \right.$$

Plus précisément, on va chercher à tracer le portrait de phase de ce système et à étudier la stabilité de l'origine. Ces deux notions sont définies ci-dessous.

Définition 2.4 (Portrait de phase)**.** *On appelle* portrait de phase *du système* (S) *l'ensemble des trajectoires des courbes solutions*
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array}$$
du système différentiel (S).

On représente toutes ces courbes dans un même plan muni d'un repère orthonormé d'abscisse x et d'ordonnée y.

La définition suivante ne vaut que pour les systèmes différentiels linéaires. Les étudiants qui se dirigeront vers un master MPA verront l'année prochaine une définition plus générale que la définition ci-dessous.

Définition 2.5 (Stabilité)**.** *On dit que l'origine est* stable *pour le système différentiel* (S) *si, pour toute solution* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *de* (S)*, l'ensemble*
$$\left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ t \geq 0 \right\}$$
est borné. On dit que l'origine est asymptotiquement stable *pour le système différentiel* (S) *si, pour toute solution* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *de* (S)*, on a*
$$\lim_{t \to +\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si l'origine est asymptotiquement stable pour (S), alors elle est stable pour (S).

Dans la suite, on suppose que $\det(A) \neq 0$ et on va tracer le portrait de phase du système (S). On distingue trois cas :

1. La matrice A est diagonalisable à valeurs propres réelles.

2. La matrice A a une valeur propre complexe qui n'est pas réelle.
3. La matrice A n'a que des valeurs propres réelles mais n'est pas diagonalisable.

Les trois exercices suivants traitent les trois cas mentionnés ci-dessus.

Exercice 2.6. Soit
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
une matrice à coefficients réels. On note (S) le système différentiel
$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases}$$
On suppose que A est diagonalisable à valeurs propres réelles non-nulles. On note (u_1, u_2) une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A, λ_1 la valeur propre associée au vecteur propre u_1 et λ_2 la valeur propre associée au vecteur propre u_2. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) et donner l'allure du portrait de phase de (S) en fonction des valeurs de λ_1 et λ_2.

Exercice 2.7. Soit
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
une matrice à coefficients réels. On note (S) le système différentiel
$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases}$$
On suppose que A a une valeur propre complexe $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. Déterminer une base (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $Au_1 = \alpha u_1 - \beta u_2$ et $Au_2 = \beta u_1 + \alpha u_2$.
2. En décomposant une solution suivant la base précédente, déterminer l'ensemble des solutions de (S) et donner l'allure du portrait de phase de (S) en fonction des valeurs de α et β.

Exercice 2.8. Soit
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
une matrice à coefficients réels. On note (S) le système différentiel
$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases}$$
On suppose que A n'est pas diagonalisable et que $\det(A) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que $(A - \lambda I_2)^2 = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base (u, v) de $\mathbb{R}^2$ telle que $Au = \lambda u$ et $Av = u + \lambda v$.
3. En décomposant une solution suivant la base précédente, déterminer l'ensemble des solutions de (S) et donner l'allure du portrait de phase de (S) en fonction des valeurs de λ.

2.3 Exponentielle de matrice

2.3.1 Rappels de topologie sur $M_d(\mathbb{K})$

Rappelons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{K}^d$. Pour toute matrice A de $M_d(\mathbb{K})$, on note

$$\|A\| = \max_{x\in\mathbb{K}^d \|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x\in\mathbb{K}^d\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Pour tout vecteur x de $\mathbb{K}^d$ et pour toutes matrices A et B de $M_d(\mathbb{K})$, on a

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$$

et

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \, .$$

Si N désigne une autre norme sur $M_d(\mathbb{K})$, alors, par équivalence des normes dans les espaces de dimension finie, il existe $C > 1$ telle que, pour toute matrice A de $M_d(\mathbb{K})$,

$$C^{-1} \|A\| \leq N(A) \leq C \|A\| \, .$$

En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ de $M_d(\mathbb{K})$ et pour tout indice (i_0, j_0),

$$|a_{i_0,j_0}| \leq \|A\|_1 = \sum_{1\leq i,j\leq d} |a_{i,j}| \leq C \|A\| \, .$$

Enfin, comme $M_d(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, c'est un espace complet donc toute série absolument convergente d'éléments de $M_d(\mathbb{K})$ converge. Autrement dit, pour toute série $\displaystyle\sum_n A_n$ d'éléments de $M_d(\mathbb{K})$, si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \|A_n\| < +\infty$, alors la série $\displaystyle\sum_n A_n$ converge.

2.3.2 Définition et propriétés de l'exponentielle de matrice

Fixons une matrice A de $M_d(\mathbb{K})$. Comme dans le cas de l'exponentielle d'un nombre réel ou complexe, on va définir $\exp(A)$ comme la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} A^n$. Pour pouvoir le faire, on va démontrer que cette série converge.

On montre par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n,

$$\frac{\|A^n\|}{n!} \leq \frac{\|A\|^n}{n!}.$$

De plus, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\|A\|^n}{n!}$ converge (et a pour somme $e^{\|A\|}$). Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ converge absolument.

Définition 2.9 (Exponentielle de matrice)**.** *La série* $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ *converge absolument. Sa somme est appelée l'*exponentielle de la matrice A *:*

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

La proposition suivante résume les propriétés les plus importantes de l'exponentielle de matrice.

Proposition 2.10. *1. Pour toute matrice A de $M_d(\mathbb{K})$, la matrice e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.*

2. Pour toutes matrices A et B de $M_d(\mathbb{K})$ qui commutent (c'est-à-dire telles que $AB = BA$), on a $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

Démonstration. Le premier point de la proposition est une conséquence du deuxième point. En effet, les matrices A et $-A$ commutent donc, d'après le deuxième point, $e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = e^0$. Or, en utilisant la définition de l'exponentielle, on voit que l'exponentielle de la matrice nulle est la matrice identité I_d d'où la matrice e^A est inversible d'inverse e^{-A}.

Démontrons le deuxième point. Soient A et B des matrices de $M_d(\mathbb{K})$ qui commutent. On a

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton. Ainsi, en utilisant l'expression explicite des coefficients binômiaux,

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \quad (*) \end{aligned}$$

où l'interversion $(*)$ sera justifiée ultérieurement. En posant $k' = n - k$, on obtient

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{k'}}{(k')!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{B^{k'}}{(k')!} \\ &= e^A e^B. \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de A et B, on obtient que $e^{A+B} = e^B e^A$.

Justifions l'interversion $(*)$. Comme, pour tous indices $0 \leq k \leq n$, on a

$$\frac{\left\|A^k B^{n-k}\right\|}{k!(n-k)!} \leq \frac{\|A\|^k \|B\|^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

et comme, d'après la formule du binôme de Newton

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\|A\|^k\|B\|^{n-k}}{k!(n-k)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\|A\|+\|B\|)^n}{n!}=e^{\|A\|+\|B\|}$$

alors la série double $\displaystyle\sum_{0\leq k\leq n}\frac{A^kB^{n-k}}{k!(n-k)!}$ converge absolument. On peut donc appliquer le théorème de Fubini qui justifie l'interversion. □

Proposition 2.11 (Dérivation de $t\mapsto e^{tA}$)**.** *L'application*

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathbb{R} & \mapsto & M_d(\mathbb{K})\\ & t & \mapsto & e^{tA}\end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et, pour tout nombre réel* t*,*

$$\varphi'(t)=Ae^{tA}.$$

Démonstration. Notons, pour tout entier $n\geq 0$, $A^n=(a_{i,j}^n)_{0\leq i,j\leq d}$. Par définition de l'exponentielle de matrice , pour tout indice (i,j) avec $0\leq i,j\leq d$, le (i,j)-ième coefficient de la matrice e^{tA} est

$$\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\frac{a_{i,j}^n}{n!}.$$

Fixons un tel indice (i,j) et déterminons le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}t^n\frac{a_{i,j}^n}{n!}$.

Il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout entier $n\geq 0$,

$$\frac{|a_{i,j}^n|}{n!}\leq C\frac{\|A^n\|}{n!}\leq C\frac{\|A\|^n}{n!},$$

d'après les rappels de topologie matricielle. De plus, le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}t^n\frac{\|A\|^n}{n!}$ est $+\infty$ (parce que, pour tout nombre réel t, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0}t^n\frac{\|A\|^n}{n!}$ converge et a pour somme $e^{t\|A\|}$).

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}t^n\frac{a_{i,j}^n}{n!}$ est $+\infty$. Par conséquent, la fonction

$$f_{i,j}:t\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\frac{a_{i,j}^n}{n!}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t,

$$f'_{i,j}(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}nt^{n-1}\frac{a_{i,j}^n}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}t^{n-1}\frac{a_{i,j}^n}{(n-1)!}.$$

Ainsi, l'application φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t,

$$\begin{array}{rcl}\varphi'(t) & = & \sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}\frac{A^n}{(n-1)!} \\ & = & A\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}\frac{A^{n-1}}{(n-1)!} \\ & = & A\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n}\frac{A^{n}}{n!} \\ & = & Ae^{tA}.\end{array}$$

□

2.3.3 Application aux systèmes différentiels linéaires

On fixe une matrice $A \in M_d(\mathbb{K})$ et une application $B : I \to \mathbb{K}^d$ continue sur un intervalle I de $\mathbb{K}$. On revient dans cette section à l'étude des systèmes différentiels linéaires

$$(S_0)\ X' = AX$$

et

$$(S)\ X' = AX + B(t).$$

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{K}^d)$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}^d$. Cet ensemble est muni d'une addition et d'une multiplication par des scalaires dans $\mathbb{K}$: c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème 2.12 (Ensemble des solutions de (S_0))**.** *L'ensemble des solutions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ de (S_0) est*

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K}^d \\ t & \mapsto & e^{tA}X_0 \end{array}, X_0 \in \mathbb{K}^d \right\}.$$

C'est une sous-espace vectoriel de dimension d du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{K}^d)$.

Comme dans le cas des équations différentielles d'ordre 1, on montre que, si φ_0 est une solution définie sur I du système différentiel (S), alors l'ensemble des solutions définies sur I de (S) est l'ensemble des applications de la forme $\varphi_0 + \varphi$, où φ est une solution définie sur I de (S_0).

Bien évidemment, on a un théorème analogue pour les solutions à valeurs complexes de (S_0). La première partie de ce théorème est démontrée à l'occasion de l'exercice suivant.

Exercice 2.13. Soit $d \geq 1$, $B : I \to \mathbb{K}$ une application continue et A une matrice dans $M_d(\mathbb{K})$. Déterminer l'ensemble des applications $X : I \to \mathbb{K}^d$ solutions sur I de l'équation différentielle

$$X' = AX + B(t).$$

Démonstration de la deuxième partie du théorème 2.12. Démontrons tout d'abord que $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications de I dans $\mathbb{K}^d$. L'application nulle appartient à $\mathcal{S}_0$. Soient $\varphi_1 : t \mapsto e^{tA}X_1$ et $\varphi_2 : t \mapsto e^{tA}X_2$ des éléments de $\mathcal{S}_0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\varphi_1 + \lambda\varphi_2 : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K}^d \\ t & \mapsto & e^{tA}X_3 \end{array}$$

avec $X_3 = X_1 + \lambda X_2$. Par conséquent, $\varphi_1 + \lambda\varphi_2 \in \mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_0$ est bien un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications de I dans $\mathbb{K}^d$.

Montrons maintenant que $\dim(\mathcal{S}_0) = d$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{K}^d & \to & \mathcal{S}_0 \\ & X_0 & \mapsto & (t \mapsto e^{tA} X_0) \end{array}$$

est linéaire. De plus, si l'on note

$$\begin{array}{rccc} \psi' : & \mathcal{S}_0 & \to & \mathbb{K}^d \\ & \varphi & \mapsto & \varphi(0) \end{array},$$

on a $\psi \circ \psi' = Id_{\mathcal{S}_0}$ et $\psi' \circ \psi = Id_{\mathbb{K}^d}$. Ainsi, l'application ψ est un isomorphisme donc $\dim(\mathcal{S}_0) = \dim(\mathbb{K}^d) = d$. $\square$

2.3.4 Calcul pratique de l'exponentielle d'une matrice

L'exercice suivant explique comment l'on calcule en pratique l'exponentielle d'une matrice en réduisant celle-ci.

Exercice 2.14 (Calcul de l'exponentielle d'une matrice)**.** Soit $d \geq 1$ un entier naturel. Pour toute famille $(\lambda_i)_{1\leq i\leq d}$ de nombres complexes, on note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ la matrice diagonale de $M_d(\mathbb{C})$ dont le coefficient en position (i, i) vaut λ_i pour tout indice i entre 1 et d.

1. Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq d}$ une famille de nombres complexes. Déterminer les coefficients de la matrice
$$\exp(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)).$$
2. En déduire une méthode pour calculer les coefficients de l'exponentielle d'une matrice carrée diagonalisable.
3. Si N est une matrice nilpotente d'ordre ν, au sens où $N^{\nu-1} \neq 0$ et $N^\nu = 0$, calculer $\exp(N)$.
4. En utilisant la décomposition de Dunford, expliquer comment on peut calculer les coefficients de l'exponentielle d'une matrice quelconque.

2.4 Équations différentielles d'ordre >1 à coefficients constants

On note $(a_i)_{0\leq i\leq d-1} \in \mathbb{K}^d$ et $b : I \to \mathbb{K}$ une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{K}$. On étudie dans cette section l'équation différentielle (d'inconnue $y : I \to \mathbb{K}^d$)

$$(E)\ y^{(d)} + a_{d-1}y^{(d-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

et son équation homogène associée

$$(E_0)\ y^{(d)} + a_{d-1}y^{(d-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Proposition 2.15 (Structure de l'ensemble des solutions de (E_0))**.** *L'ensemble $\mathcal{E}_{0,\mathbb{K}}$ des solutions de (E_0) définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension d.*

Démonstration. Tout d'abord, $\mathcal{E}_{0,\mathbb{K}}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications de I dans $\mathbb{K}$: l'application nulle appartient à $\mathcal{E}_{0,\mathbb{K}}$ et, si φ_1, $\varphi_2 \in \mathcal{E}_{0,\mathbb{K}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\varphi_1 + \lambda\varphi_2 \in \mathcal{E}_{0,\mathbb{K}}$ par linéarité de la dérivation.

Pour montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{E}_{0,\mathbb{K}}$ a pour dimension d, on va utiliser l'équivalence de la résolution de (E_0) avec la résolution d'un système différentiel d'ordre 1 (équivalence que l'on a déjà vue dans le premier chapitre).

Notons $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ du système différentiel

$$(S_0) \left\{ \begin{array}{rcl} y_0' &=& y_1 \\ y_1' &=& y_2 \\ & \vdots & \\ y_{d-2}' &=& y_{d-1} \\ y_{d-1}' &=& -a_{d-1}y_{d-1} - a_{d-2}y_{d-2} - \ldots - a_0y_0 \end{array} \right.$$

Si une application $\varphi : I \to \mathbb{K}$ est solution de (E_0), alors l'application

$$\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K}^d \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(d-1)}(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

est une solution du système (S_0). Par conséquent, l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi_1 : & \mathcal{E}_{0,\mathbb{K}} & \to & \mathcal{S}_0 \\ & \varphi & \mapsto & t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(d-1)}(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

est bien définie et est linéaire. De plus, si l'on note

$$\begin{array}{rccc} \psi_2 : & \mathcal{S}_0 & \to & \mathcal{E}_{0,\mathbb{K}} \\ & t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_{d-1}(t) \end{pmatrix} & \mapsto & \varphi_0 \end{array},$$

alors $\psi_2 \circ \psi_1 = Id_{\mathcal{E}_{0,\mathbb{K}}}$ et $\psi_1 \circ \psi_2 = Id_{\mathcal{S}_0}$. L'application ψ_1 est donc un isomorphisme d'où $\dim(\mathcal{E}_{0,\mathbb{K}}) = \dim(\mathcal{S}_0) = d$ d'après le théorème 2.12.

□

On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation différentielle (E_0) le polynôme $x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_0$. Remarquons que c'est aussi le polynôme caractéristique de la matrice associée au système (S_0) introduit dans la démonstration précédente.

On sait donner une expression explicite des solutions de (E_0).

Théorème 2.16 (Solutions à valeurs complexes de (E_0))**.** *Notons $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines complexes du polynôme caractéristique de (E_0) et $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les multiplicités respectives de ces racines. Une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{E}_{0,\mathbb{C}}$ est la base formée des applications*

$$\varphi_{i,\lambda} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t^\lambda e^{r_i t} \end{array},$$

avec $1 \leq i \leq n$ et $0 \leq \lambda < m_i$.

Supposons maintenant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est à dire que les coefficients de l'équation (E_0) sont réels et que le seconde membre b de l'équation (E) est à valeurs réelles. Énonçons le théorème relatif aux solutions à valeurs réelles. Remarquons que le polynôme P caractéristique de (E_0) est à coefficients réels. Si λ est une racine complexe de P, alors $P(\lambda) = 0$ donc, en prenant le conjugué des deux membres de cette égalité, on a $P(\overline{\lambda}) = 0$, où $\overline{\lambda}$ désigne le conjugué de λ. Le nombre complexe $\overline{\lambda}$ est donc aussi une racine de P. Ainsi, on peut ranger les racines complexes non-réelles de P par paires conjuguées.

Théorème 2.17 (Ensemble des solutions à valeurs réelles de (E_0))**.** *On note $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines réelles du polynôme P caractéristique de (E_0) et $m_1, m_2, \ldots, m_n$ leurs multiplicités respectives. On note $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_{n'} + i\beta_{n'}, \alpha_{n'} - i\beta_{n'}$ les racines complexes non-réelles de P et on note, pour $1 \leq j \leq n'$, m'_i la multiplicité commune de $\alpha_j + i\beta_j$ et de $\alpha_j - i\beta_j$. Une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}_{0,\mathbb{R}}$ est la base formée des applications de l'une des formes suivantes*

$$\varphi_{j,\lambda} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^\lambda e^{r_j t} \end{array},$$

avec $1 \leq j \leq n$ et $0 \leq \lambda < m_j$,

$$\psi_{j,\lambda} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^\lambda e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t) \end{array},$$

avec $1 \leq j \leq n'$ et $0 \leq \lambda < m'_j$ et

$$\eta_{j,\lambda} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^\lambda e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t) \end{array},$$

avec $1 \leq j \leq n'$ et $0 \leq \lambda < m'_j$.

Le théorème ci-dessus est démontré à l'occasion de l'exercice suivant. Le début de l'exercice permet de voir comment on démontre le théorème 2.16 aussi.

Exercice 2.18. On note $d \geq 1$ une entier et $(a_i)_{0 \leq i < d}$ une famille de nombres réels. On note (E_0) l'équation différentielle

$$y^{(d)} + \sum_{i=0}^{d-1} a_i y^{(i)} = 0.$$

On note $\dfrac{d}{dt}$ l'endomorphime du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ qui, à un élément de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ associe sa dérivée.

1. Déterminer un polynôme P unitaire de degré minimal telle que la propriété suivante est vérifiée. Une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ est solution de (E_0) si et seulement si
$$\varphi \in \operatorname{Ker}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right)\right).$$
2. On note $r_1, r_2, \dots, r_n$ les racines de P et $m_1, m_2, \dots, m_n$ leurs multiplicités respectives. Montrer que
$$\operatorname{Ker}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right)\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\left(\left(\frac{d}{dt} - r_i\right)^{m_i}\right).$$
3. Pour tout entier i de $[1,n]$ et tout entier λ entre 0 et $m_i - 1$, on note
$$\begin{array}{cccc} \varphi_{i,\lambda} & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & t^\lambda e^{r_i t} \end{array}.$$
Montrer que, pour tout indice i entre 1 et n et tout indice λ entre 0 et $m_i - 1$
$$\varphi_{i,\lambda} \in \operatorname{Ker}\left(\left(\frac{d}{dt} - r_i\right)^{m_i}\right).$$
4. Montrer que, pour tout indice i entre 1 et n, la famille $(\varphi_{i,\lambda})_{0 \le \lambda < m_i}$ est libre.
5. En déduire que la famille $(\varphi_{i,\lambda})_{1 \le i \le n 0 \le \lambda < m_i}$ constitue une base de l'espace des solutions à valeurs complexes de (E_0).
6. Déduire de la question précédente une base de l'espace des solutions à valeurs réelles de (E_0).

Chapitre 3

Systèmes différentiels linéaires à coefficients variables

Dans ce chapitre et le suivant, on ne considérera plus que des systèmes différentiels à coefficients réels dont on cherche des solutions à valeurs réelles. Cependant, les résultats énoncés s'étendront sans difficulté aux systèmes différentiels à coefficients complexes.

On note $d \geq 1$ un entier, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \to M_d(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^d$ des applications. On s'intéresse à l'équation différentielle d'inconnue $X : I \to \mathbb{R}^d$

$$(S)\ X' = A(t)X + B(t)$$

L'équation homogène qui lui est associée est

$$(S_0)\ X' = A(t)X$$

et l'application B est appelée le second membre de (S).

3.1 Existence et unicité

On fixe des points $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{R}^d$. On admettra le théorème fondamental suivant.

Théorème 3.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** *On suppose que les applications A et B sont continues sur I. Alors il existe une unique solution définie sur I au système*

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & A(t)X + B(t) \\ X(t_0) & = & X_0. \end{array} \right.$$

Au vu du théorème 3.1, les systèmes de type (PC) sont importants. On les appelle *problèmes de Cauchy.*

Pour $0 \leq i < d$, on note $a_i : I \to \mathbb{R}$ des applications et $b : I \to \mathbb{R}$ une application. On fixe $(y_i)_{0 \leq i < d} \in \mathbb{R}^d$. Le théorème suivant est une conséquence du théorème 3.1 et de la technique pour ramener une équation différentielle d'ordre d à un système différentiel d'ordre 1 (voir TD).

Théorème 3.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : cas d'une équation d'ordre d)**.** *Supposons que, pour tout indice i, l'application a_i est continue sur I et que l'application b est continue sur I. Alors il existe une unique solution au système (appelé aussi problème de Cauchy)*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y^{(d)} + a_{d-1}(t)y^{(d-1)} + a_{d-2}(t)y^{(d-2)} + \ldots + a_0(t)y &=& b(t) \\ \forall 0 \leq i < d, y^{(i)}(t_0) &=& y_i \end{array}\right.$$

Dans toute la suite de ce chapitre, on supposera que les applications A et B sont continues, afin de pouvoir appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

3.2 Structure de l'ensemble des solutions

Le théorème suivant généralise une remarque que l'on a déjà faite dans le cas des systèmes différentiels à coefficients constants. On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^d)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition 3.3 (Ensemble des solutions de (S_0) et de (S))**.** *L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions définies sur I de (S_0) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^d)$ de dimension d et, pour tout $t \in I$, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_0 & \to & \mathbb{R}^d \\ \varphi & \mapsto & \varphi(t) \end{array}$$

est un isomorphisme.

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions définies sur I de (S) est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^d)$ de direction $\mathcal{S}_0$: si φ_0 est une solution de (S) définie sur I, alors

$$\mathcal{S} = \{\varphi_0 + \varphi, \varphi \in \mathcal{S}_0\}.$$

Cette proposition est démontrée à l'occasion de l'exercice suivant.

Exercice 3.4. On note $A : I \to M_d(\mathbb{R})$ une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note (S) le système différentiel d'inconnue $X : I \to \mathbb{R}^d$

$$X' = A(t)X + B(t)$$

et (S_0) le système homogène associé.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de (S_0) forme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^d)$ des applications de I dans $\mathbb{R}^d$.
2. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ? Justifier votre réponse.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de (S) forme un sous-espace affine de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^d)$ de direction $\mathcal{S}_0$.

3.3 Matrice fondamentale

La notion de matrice fondamentale va généraliser l'exponentielle de matrice au cas de systèmes différentiels à coefficients variables.

Définition 3.5 (Système fondamental de solutions)**.** *On appelle système fondamental de solutions de* (S_0) *toute base* $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_d)$ *de* $\mathcal{S}_0$.

Remarquons que, comme $\dim(\mathcal{S}_0) = d$, il suffit qu'une famille $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_d)$ d'éléments de $\mathcal{S}_0$ soit une famille libre pour que ce soit une base de $\mathcal{S}_0$. De même, comme, pour tout $t \in I$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_0 & \to & \mathbb{R}^d \\ \varphi & \mapsto & \varphi(t) \end{array}$$

est un isomorphisme, il suffit qu'il existe $t \in I$ tel que la famille $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_d(t))$ soit une base de $\mathbb{R}^d$ (ou encore que $\det(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_d(t)) \neq 0$) pour que $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_d)$ soit une base de $\mathcal{S}_0$.

Définition 3.6 (Matrice fondamentale de (S))**.** *On appelle matrice fondamentale de* (S_0) *toute application* $M : I \to M_d(\mathbb{R})$ *telle que les colonnes de* M *forment un système fondamental de solutions de* (S_0).

Proposition 3.7 (Caractérisation des matrices fondamentales)**.** *Une application* $M : I \to M_d(\mathbb{R})$ *est une matrice fondamentale de* (S_0) *si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. *L'application* M *est dérivable sur* I.
2. *Pour tout* $t \in I$, $M'(t) = A(t)M(t)$.
3. *Pour tout* $t \in I$, *la matrice* $M(t)$ *est inversible.*

Si A est une matrice dans $M_d(\mathbb{R})$, alors $t \mapsto e^{tA}$ est dérivable, $(e^{tA})' = Ae^{tA}$ et, pour tout nombre réel t, la matrice e^{tA} est inversible (d'inverse e^{-tA}). On en déduit que e^{tA} est une matrice fondamentale pour le système différentiel $X' = AX$. Une autre manière de voir ceci est de remarquer que, si l'on note $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$, alors $(t \mapsto e^{tA}e_i)_{1 \leq i \leq d}$ forme un système fondamental de solutions du système $X' = AX$. D'autre part, ce sont les vecteurs colonnes de e^{tA} donc on retrouve le fait que $t \mapsto e^{tA}$ est une matrice fondamentale du système différentiel $X' = AX$.

On voit donc que la notion de matrice fondamentale est une généralisation de la notion d'exponentielle de matrice.

Dans le cas du système à coefficients constants $X' = AX$, on a vu que l'ensemble des solutions définies sur I est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & e^{tA}X_0 \end{array}, \; X_0 \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

La proposition suivante généralise ce résultat au cas des systèmes différentiels à coefficients variables.

Proposition 3.8 (Ensemble des solutions de (S_0))**.** *On note $M : I \to M_d(\mathbb{R})$ une matrice fondamentale de (S_0). L'ensemble des solutions définies sur I de (S_0) est*

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & M(t)\lambda \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Ces deux propositions sont démontrées à l'occasion de l'exercice suivant.

Exercice 3.9. Soit $A : \mathbb{R} \to M_d(\mathbb{R})$ une application continue. On s'intéresse au système différentiel d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$

$$(S_0) \ X' = A(t)X.$$

On note $M : \mathbb{R} \to M_d(\mathbb{R})$ une application.

1. Montrer que M est une matrice fondamentale pour le système (S_0) si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées
   (a) l'application M est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) pout tout nombre réel t, $M'(t) = A(t)M(t)$.
   (c) pour tout nombre réel t, la matrice $M(t)$ est inversible.
2. Exprimer l'ensemble des solutions du système (S_0) à l'aide de la matrice fondamentale de(S_0).

3.4 Méthode de la variation des constantes

Revenons au cas d'un système différentiel à coefficients constants $X' = AX + B(t)$. Pour trouver une solution particulière de ce système, on peut le réécrire $(e^{-tA}X)' == e^{-tA}B(t)$. Autrement dit, on pose $\lambda(t) = e^{-tA}X(t)$ ou, ce qui revient au même, $X(t) = e^{tA}\lambda(t)$ et on cherche λ. Dans le cas des systèmes différentiels à coefficients variables, on fait la même chose en remplaçant e^{tA} par une matrice fondamentale du système différentiel.

Plus précisément, on veut trouver une solution particulière $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ du système

$$(S) \ X' = A(t)X + B(t).$$

On note $M : I \to M_d(\mathbb{R})$ une matrice fondamentale du système homogène (S_0) associé à (S). On pose, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = M(t)\lambda(t).$$

Cela revient à faire "varier" la constante λ qui apparait dans la proposition 3.8. Soit $t \in I$. On a

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + B(t) \quad &\Leftrightarrow \quad M'(t)\lambda(t) + M(t)\lambda'(t) = A(t)M(t)\lambda(t) + B(t) \\ &\Leftrightarrow \quad M(t)\lambda'(t) = B(t) \end{aligned}$$

car $M'(t) = A(t)M(t)$. Ainsi

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + B(t) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'(t) = M(t)^{-1}B(t).$$

Il suffit alors de prendre une primitive de $M(t)^{-1}B(t)$ pour trouver une solution particulière de (S).

3.5 Wronskien

Définition 3.10 (Wronskien d'un système fondamental de solutions)**.** *Notons* $(\varphi_i)_{1\leq i\leq d}$ *un système fondamental de solutions de* (S_0)*. On appelle* wronskien *de* (S_0) *associé à* $(\varphi_i)_{1\leq i\leq d}$ *l'application* $W : I \to \mathbb{R}$ *qui, à* $t \in I$*, associe le déterminant de la famille* $(\varphi_i)_{1\leq i\leq d}$ *dans la base canonique.*

Autrement dit, le wronskien W de (S_0) associé à $(\varphi_i)_{1\leq i\leq d}$ est le déterminant de la matrice fondamentale dont les vecteurs colonnes sont $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d$.

Comme, pour tout nombre réel t de I, la famille $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_d(t))$ est une base de $\mathbb{R}^d$, alors le wronskien W ne s'annule pas sur I. Plus précisément, $W(t)$ représente le volume du parallélépipède formé par les vecteurs $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_d(t))$: il encode l'évolution du volume de ce parallélépipède au cours du temps.

La raison pour laquelle on s'intéresse au wronskien est le théorème suivant, qui permet d'avoir une expression explicite de ce wronskien. Pour toute matrice N de $M_d(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(N)$ la trace de la matrice N.

Théorème 3.11 (Théorème de Liouville)**.** *On note* W *le wronskien d'un système fondamental de solutions* $(\varphi_i)_{1\leq i\leq d}$ *de* (S_0)*. Alors l'application* W *est dérivable sur* I *et*

$$\forall t \in I,\ W'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))W(t).$$

L'application W est solution d'une équation différentielle que l'on sait résoudre : si l'on fixe $t_0 \in I$, on a

$$\forall t \in I,\ W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))ds}.$$

On va maintenant démontrer ce théorème. Pour ce faire, on a besoin du lemme suivant qui concerne la différentiabilité de l'application déterminant.

Lemme 3.12. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \det : & M_d(\mathbb{R}) & \to & M_d(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & \det(A) \end{array}$$

est différentiable sur $M_d(\mathbb{R})$ *et*

$$\forall A \in Gl_d(\mathbb{R}),\ \forall H \in M_d(\mathbb{R}),\ d(\det)(A).H = \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}H).$$

En utilisant la comatrice de A, on peut obtenir une expression de la différentielle du déterminant en A lorsque A n'est pas inversible mais on n'en a pas besoin pour démontrer le théorème 3.11.

Démonstration du lemme 3.12. L'application det est d-linéaire en les colonnes de A donc C^∞.

Calculons tout d'abord la différentielle de det en l'identité I_d. Pour $H = (h_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$, on note $I_d + H = (a_{i,j}(H))_{1\leq i,j\leq d}$. Notons $\mathfrak{S}_d$ le groupe symétrique d'indice d et $\epsilon : \mathfrak{S}_d \to \{-1, 1\}$ la signature. Par définition du déterminant d'une matrice,

$$\det(I_d + H) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{d} a_{i,\sigma(i)}.$$

Si σ est une permutation distincte de l'identité, alors il existe $1 \leq i_0 \leq d$ tel que $\sigma(i_0) \neq i_0$. Par injectivité de σ, en posant $j_0 = \sigma(i_0)$, on doit avoir $\sigma(j_0) \neq j_0$. Ainsi $a_{i_0,\sigma(i_0)}(H) = h_{i_0,\sigma(i_0)}$ et $a_{j_0,\sigma(j_0)}(H) = h_{j_0,\sigma(j_0)}$ d'où

$$\left|\prod_{i=1}^{d} a_{i,\sigma(i)}(H)\right| = O_{H\to 0}(\|H\|^2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\det(I_d + H) &= \prod_{i=1}^{d} a_{i,i}(H) + O_{H\to 0}(\|H\|^2) \\
&= \prod_{i=1}^{d}(1 + h_{i,i}) + O_{H\to 0}(\|H\|^2) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{d} h_{i,i} + O_{H\to 0}(\|H\|^2) \\
&= 1 + \mathrm{Tr}(H) + O_{H\to 0}(\|H\|^2).
\end{aligned}$$

Par conséquent, la différentielle du déterminant en I_d est définie par

$$\forall H \in M_d(\mathbb{R}),\ d(\det)(I_d).H = \mathrm{Tr}(H).$$

Soit $A \in Gl_d(\mathbb{R})$ et $H \in M_d(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\det(A + H) &= \det(A)\det(I_d + A^{-1}H) \\
&= \det(A)(1 + \mathrm{Tr}(A^{-1}H) + O_{H\to 0}(\|H\|^2)) \\
&= \det(A) + \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}H) + O_{H\to 0}(\|H\|^2)
\end{aligned}$$

donc $d(\det)(A).H = \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}H)$. □

Démonstration du théorème 3.11. Notons $M : I \to M_d(\mathbb{R})$ la matrice fondamentale de (S_0) dont les vecteurs-colonnes sont $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d$. On a

$$\forall t \in I,\ W(t) = \det(M(t)).$$

Comme l'application M est dérivable sur I et l'application det est différentiable sur $M_d(\mathbb{R})$, alors l'application W est dérivable sur I et

$$\begin{aligned}
\forall t \in I,\quad W'(t) &= d(\det)(M(t)).M'(t) \\
&= d(\det)(M(t)).A(t)M(t) \\
&= \det(M(t))\mathrm{Tr}(M(t)^{-1}A(t)M(t)) \\
&= \mathrm{Tr}(A(t)M(t)M(t)^{-1})\det(M(t)) \\
&= \mathrm{Tr}(A(t))W(t).
\end{aligned}$$

□

3.6 Utilisation des séries entières

3.6.1 Rappels sur les séries entières

Dans cette partie, on va faire des rappels succints sur les séries entières (sans démonstration). Pour plus de détails sur cette partie, on renvoie au cours de L2 d'option maths 3.

Généralités sur les séries entières

Définition 3.13. *On appelle série entière d'une variable complexe une série de fonctions $\sum f_n$, où, pour tout n, la fonction f_n est de la forme*

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a_n z^n \end{array},$$

où $a_n \in \mathbb{C}$. Une telle série entière est notée $\sum a_n z^n$.

On prenant des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ au lieu de fonctions définies sur $\mathbb{C}$, on obtient des séries entières d'une variable réelle. Une série entière d'une variable complexe est notée $\sum a_n z^n$, la lettre z désignant par convention la variable. Par contre, si l'on a fixé un nombre complexe z particulier au préalable, $\sum a_n z^n$ désigne une série numérique. Pour les séries entières d'une variable réelle, la convention est de noter la variable t ou x. Ainsi $\sum a_n x^n$ ou $\sum a_n t^n$ désigne une série entière d'une variable réelle.

Une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^{2n}$ n'est pas à proprement parler une série entière puisque le terme d'ordre n est de degré $2n$ mais on désignera de cette manière la série entière $\sum b_n z^n$, avec $b_n = 0$ si n est impair et $b_n = a_{n/2}$ si n est pair. Le même type de convention s'appliquera aux séries entières de la forme $\sum a_n z^{\varphi(n)}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une injection.

Identification polynômes-séries entières. Si $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_d z^d$ est un polynôme, on l'identifiera avec la série entière $\sum a_n z^n$ en posant $a_n = 0$ si $n > d$.

Définition du rayon de convergence

Théorème 3.14 (Définition du rayon de convergence)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe. Il existe un unique élément R dans $[0, +\infty]$ avec les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout nombre complexe z avec $|z| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument (donc la suite $(a_n z^n)_n$ converge vers 0 et est bornée).*
2. *Pour tout nombre complexe z avec $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée (donc la suite $(a_n z^n)_n$ ne converge pas vers 0 et la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement).*

Noter qu'on ne peut rien a priori dire sur la convergence de la série dans le cas où $|z| = R$.

Critère de d'Alembert

Définition 3.15 (Suite non-lacunaire)**.** *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite non-lacunaire si ses termes sont non-nuls à partir d'un certain rang. Autrement dit, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, $u_n \neq 0$.*

Proposition 3.16 (Critère de d'Alembert)**.** *Soit $\sum a_n$ une série de réels positifs. On suppose que la suite (a_n) est non-lacunaire et que la suite (a_{n+1}/a_n) converge vers une limite L.*

1. *Si $L < 1$, alors la série $\sum a_n$ converge.*
2. *Si $L > 1$, alors la série $\sum a_n$ diverge.*

La proposition suivante constitue un moyen pratique de calculer le rayon de convergence d'une série entière dans les cas les plus simples.

Proposition 3.17 (Critère de d'Alembert pour les séries entières). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On suppose que :*

1. *La suite $(a_n)_n$ est non lacunaire.*
2. *La suite $(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|})_n$ a une limite $L \in [0, +\infty]$.*

Alors $R = \frac{1}{L}$ (avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Lorsque la suite $(a_n)_n$ est lacunaire, on peut dans certains cas appliquer directement le critère de d'Alembert pour les séries numériques pour pouvoir calculer le rayon de convergence de la série entière.

Dérivabilité de la somme d'une série entière

Proposition 3.18 (Dérivée de la somme d'une série entière). *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ de somme S. Alors la série entière $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ a pour rayon de convergence R, la fonction S est dérivable sur $]-R, R[$ de dérivée la fonction*

$$\begin{array}{rcl}]-R, R[& \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \end{array}.$$

Développement en série entière

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 3.19 (Développement en série entière au voisinage de 0). *On dit que f est* dévelop-pable en série entière au voisinage de 0 *s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $\geq r$ tels que*

1. *$]-r, r[\subset I$;*
2. *Pour tout $x \in]-r, r[$,*
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dans ce cas, la série entière $\sum a_n x^n$ est appelée un développement en série entière de f au voisinage de 0.

On fixe un nombre réel a.

Définition 3.20 (Développement en série entière au voisinage de a). *On dit que* f *est* développable en série entière au voisinage de a *s'il existe* $r > 0$ *et une série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* $\geq r$ *tels que*

1. $]a-r, a+r[\subset I$;
2. *Pour tout* $x \in]-r, r[$,

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n.$$

Dans ce cas, la série entière $\sum a_n x^n$ *est appelée un* développement en série entière de f au voisinage de a.

Remarquons que f est développable en série entière au voisinage de a si et seulement si $h \mapsto f(a+h)$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Proposition 3.21 (Unicité du développement en série entière). *Supposons que* f *soit développable en série entière au voisinage de* a *et qu'un développement en série entière de* f *au voisinage de* a *soit donné par la série entière* $\sum a_n x^n$. *Alors* f *est de classe* C^∞ *au voisinage de* a *(sur un intervalle ouvert contenant* a*) et, pour tout entier* n,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n$ est appelée la *série de Taylor de* f *en* a.

3.6.2 Équations différentielles et séries entières

Utilisation des séries entières pour résoudre une équation différentielle

Quand on veut résoudre une équation différentielle à coefficients polynômiaux, on peut chercher une solution particulière de cette équation sous forme de somme de série entière.

Plus précisément, supposons que l'on cherche une solution particulière f d'une équation différentielle.

Étape 1 On pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et on suppose que f est bien définie sur un voisinage de 0 et est solution de notre équation différentielle. Lorsque l'on injecte le développement en série entière de f dans l'équation, cela nous donne une relation de récurrence sur les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Étape 2 Si possible, déterminer une suite $(a_n)_n$ explicite non-nulle qui vérifie la relation de récurrence.

Étape 3 Déterminer le rayon de convergence de la série obtenue pour vérifier que la série entière définit bien une fonction solution de l'équation différentielle.

Ensuite, on peut appliquer l'une des méthodes vues en TD pour déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle.

Application des équations différentielles au développement en série entière

Supposons que l'on veuille démontrer qu'une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0. Lorsque les méthodes standards (primitive/dérivée d'un développement en série entière connu) ont échoué, on peut recourir à la méthode suivante.

Étape 1 Montrer que f est solution au voisinage de 0 d'une équation différentielle à coefficients polynomiaux. Pour ce faire, on calcule f' et on essaie de trouver une relation entre f et f'. Si cela échoue, on calcule f'' et on cherche une relation entre f, f' et f'', etc...

Étape 2 On détermine une fonction g somme de série entière telle que g est solution de l'équation différentielle obtenue lors de la première étape et telle que $g(0) = f(0)$ (et $f'(0) = g'(0)$ dans le cas d'une équation d'ordre 2). Pour ce faire, on a recours à la méthode exposée lors de la section précédente.

Étape 3 Comme f et g sont solutions de la même équation différentielle sur un intervalle ouvert contenant 0 et comme $f(0) = g(0)$ (et $f'(0) = g'(0)$ dans le cas d'une équation d'ordre 2), alors, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $f = g$ sur cet intervalle. Ainsi, la fonction f est développable en série entière et la série entière qui définit g est le développement en série entière de f.

Chapitre 4

Équations différentielles non-linéaires : existence et unicité

Les équations, notamment les équations différentielles, servent souvent de modèles prédictifs dans des domaines aussi variés que la mécanique, la physique, la biologie, l'économie,...). Si notre équation n'a pas de solution, on pourra difficilement prédire quoi que ce soit à l'aide de ce modèle, qui n'est du coup pas intéressant. Si notre équation admet de multiples solutions (ou pire : une infinité de solutions), on aura des difficultés à choisir la bonne solution pour établir la prédiction. D'où l'idée qu'une équation est un bon modèle si elle admet une unique solution. Ceci explique l'importance des théorèmes d'existence et d'unicité de solutions d'une équation.

Dans ce chapitre, on va étudier les théorèmes d'existence et d'unicité de solutions pour les équations différentielles non-linéaires. On explorera ensuite quelques exemples simples parmi les rares exemples d'équations différentielles non-linéaires pour lesquelles on sait calculer les solutions.

4.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz local

Soit $d \geq 1$ un entier. On note $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

On note

$$f : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^d \\ (t,x) & \mapsto & f(t,x) \end{array}$$

une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. On appelle t la variable de temps de f et x la variable de phase ou de position de f. On s'intéresse au système différentiel (mis sous forme résolue)

$$(S)\ x' = f(t,x).$$

Le théorème d'existence et d'unicité que l'on va énoncer nécessite la définition suivante.

Définition 4.1 (Fonction localement lipschitzienne par rapport à la variable de phase)**.** *On dit que la fonction f est* localement lipschitzienne par rapport à la variable de phase *si, pour tout point*

(t_0, x_0) de U, il existe un voisinage I de t_0 dans $\mathbb{R}$ et un voisinage V de x_0 dans $\mathbb{R}^d$ ainsi qu'une constante $K > 0$ tels que

$$\begin{cases} I \times V \subset U \\ \forall t \in I,\ \forall x \in V,\ \forall y \in V, \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K \|x - y\|. \end{cases}$$

La proposition suivante donne une famille d'exemples de fonctions f localement lipschitziennes par rapport à la variable de phase.

Proposition 4.2. *Supposons que la fonction f est de classe C^1 sur U. Alors la fonction f est localement lipschitzienne par rapport à la variable de phase.*

On est maintenant en mesure d'énoncer le théorème central suivant que l'on admettra.

Théorème 4.3 (Théorème de Cauchy-Lipschitz local)**.** *Fixons un point (t_0, x_0) de U. Supposons que la fonction f est continue sur U et localement lipschitzienne par rapport à la variable de phase. Alors il existe $\alpha > 0$ et une unique solution x de (S) définie sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ telle que $x(t_0) = x_0$.*

De plus, pour toute solution y de (S) définie sur un intervalle J avec

$$\begin{cases} t_0 \in J \subset]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\\ y(t_0) = x_0 \end{cases},$$

on a $y = x_{|J}$.

En particulier, il existe une unique solution définie sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ au *problème de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

De la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz, on mentionnera simplement que c'est une conséquence du théorème du point fixe de Banach.

La proposition 4.2 est elle démontrée à l'occasion de l'exercice suivant.

Exercice 4.4. Soit $d \geq 1$ un entier et

$$f: \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^d \\ (t,x) & \mapsto & f(t,x) \end{array}$$

une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Montrer que la fonction f vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

4.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Dans le cas des systèmes différentiels non-linéaires et même dans le cas où la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, les solutions de l'équation différentielle ne seront pas définies sur $\mathbb{R}$ en général.

Ceci constitue une difficulté dans l'étude des systèmes non-linéaires. C'est pourquoi on va regarder ce qui s'appelle les solutions maximales, qui sont les solutions du système définies sur les intervalles les plus grands possibles. Dans cette section, on va commencer par formaliser la notion de solution maximale avant d'énoncer et de démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz global.

On va adopter une notation pour la relation de prolongement pour les applications définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $x_1 : I \to \mathbb{R}$ et $x_2 : J \to \mathbb{R}$ sont des applications définies sur des intervalles I et J de $\mathbb{R}$, on note $x_1 \preceq x_2$ si et seulement si

$$\begin{cases} I \subset J \\ \forall t \in I, x_1(t) = x_2(t). \end{cases}$$

La relation $\preceq$ est une relation d'ordre. En particulier, si $x_1 \preceq x_2$ et $x_2 \preceq x_1$, alors $x_1 = x_2$.

Définition 4.5 (Solution maximale)**.** *On appelle* solution maximale *du système différentiel (S) toute solution φ de (S) telle que, pour toute solution ψ de (S) avec $\varphi \preceq \psi$, on a $\varphi = \psi$.*

Autrement dit, une solution maximale est une solution qui ne peut pas être prolongée strictement.

On est maintenant en mesure d'énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz global.

Théorème 4.6 (Théorème de Cauchy-Lipschitz global)**.** *Fixons $(t_0, x_0) \in U$. Supposons que l'application f est continue sur U et localement lipschitzienne par rapport à la variable de phase. Alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

Son intervalle de définition est ouvert et toute solution de (PC) est une restriction de cette solution maximale.

Il suffit donc de connaître l'ensemble des solutions maximales d'une équation différentielle pour connaître toutes les solutions de cette équation différentielle.

D'après ce théorème, si $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : J \to \mathbb{R}$ sont solutions du problème de Cauchy (PC), alors elles sont toutes deux restrictions d'une même solution maximale donc $x_{|I\cap J} = y_{|I\cap J}$.

Dans la fin de cette section, on va démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz global à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz local. Pour cela, on a besoin de quelques propriétés de la relation de prolongement $\preceq$.

Définition 4.7 (Famille compatible)**.** *Soit $\mathcal{F} = (x_k : I_k \to \mathbb{R}^d)_{k\in K}$ une famille d'applications définies chacune sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est* compatible *si elle est non-vide et si*

$$\begin{cases} \bigcap\limits_{k\in K} I_k \neq \emptyset \\ \forall k, k' \in K, \ \ x_{k|I_k\cap I_{k'}} = x_{k'|I_k\cap I_{k'}}. \end{cases}$$

Le principal intérêt de cette notion réside dans le lemme suivant.

Lemme 4.8. *Toute famille $\mathcal{F}$ compatible admet une unique borne supérieure,* i.e. *une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ telle que*

— *φ est un majorant : $\forall x \in \mathcal{F},\ x \preceq \varphi$.*
— *pour toute application $\psi : J \to \mathbb{R}^d$ définie sur un intervalle J telle que $\forall x \in \mathcal{F},\ x \preceq \psi$, on a $\varphi \preceq \psi$.*

De plus, l'application φ est localement la restriction d'une application dans $\mathcal{F}$:

$$\forall t_1 \in I,\ \exists \alpha > 0,\ \exists x \in \mathcal{F},\ \varphi_{|]t_1-\alpha,t_1+\alpha[} = x_{|]t_1-\alpha,t_1+\alpha[}.$$

Démonstration. On note $\mathcal{F} = (x_k : I_k \to \mathbb{R})_{k\in K}$. On définit

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \bigcup_{k\in K} I_k & \to & \mathbb{R}^d \\ & t & \mapsto & x_k(t) \text{ si } t \in I_k. \end{array}$$

La compatibilité de la famille $\mathcal{F}$ nous assure que l'application φ est bien définie. De plus, comme $\bigcap_{k\in K} I_k \neq \emptyset$, l'ensemble $\bigcup_{k\in K} I_k$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Par définition de φ, pour tout indice k de K, on a $x_k \preceq \varphi$.

Soit maintenant $\psi : J \to \mathbb{R}^d$ telle que, pour tout indice $k \in K$, $x_k \preceq \psi$. Alors, pour tout indice k de K,

$$\begin{cases} I_k \subset J \\ \forall t \in I_k,\ \psi(t) = x_k(t). \end{cases}$$

Par conséquent $\bigcup_{k\in K} I_k \subset J$ et, pour tout nombre réel $t \in \bigcup_{k\in K} I_k$, on a $\psi(t) = \varphi(t)$ donc $\varphi \preceq \psi$.

<u>Unicité :</u> Supposons que φ et $\tilde{\varphi}$ sont des bornes supérieures de $\mathcal{F}$.

— Comme φ majore $\mathcal{F}$ (pour la relation d'ordre $\preceq$!) et $\tilde{\varphi}$ en est une borne supérieure, on a $\tilde{\varphi} \preceq \varphi$.
— Comme $\tilde{\varphi}$ majore $\mathcal{F}$ et φ en est une borne supérieure, on a $\varphi \preceq \tilde{\varphi}$.

Ainsi, $\varphi = \tilde{\varphi}$. □

Le lemme suivant établit le lien entre les familles compatibles et notre problème de Cauchy.

Lemme 4.9. *La famille $\mathcal{F}$ des solutions de (PC) définies sur un intervalle ouvert est compatible.*

La démonstration de ce lemme repose sur le fait que la famille $\mathcal{F}$ est non-vide (par le théorème de Cauchy-Lipschitz local), les intervalles de définition des éléments de $\mathcal{F}$ contiennent tous t_0 (donc l'intersection de ces intervalles est non-vide) et l'exercice suivant.

Exercice 4.10. Soient $\varphi_1 : I \to \mathbb{R}^d$ et $\varphi_2 : J \to \mathbb{R}^d$ deux solutions de (PC).

1. Notons
$$A = \{t \in I \cap J,\ \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}.$$
Montrer que l'ensemble A est ouvert et fermé dans $I \cap J$.
2. En déduire que $\varphi_{1|I\cap J} = \varphi_{2|I\cap J}$.

On va maintenant achever la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz global.

Fin de la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz global. Existence : Notons $\mathcal{F}$ la famille des solutions de (PC) définies sur un intervalle ouvert. D'après le lemme 4.9, cette famille est compatible. D'après le lemme 4.8, cette famille admet une borne supérieure φ qui est définie sur un intervalle ouvert. Comme, d'après le lemme 4.8, l'application φ est localement la restriction de solutions de (PC), alors l'application φ est solution de (PC).

Montrons maintenant que toute solution de (PC) est restriction de φ. Soit ψ une solution de (PC).

Si l'application ψ est définie sur un intervalle ouvert, alors $\psi \in \mathcal{F}$ donc $\psi \preceq \varphi$ par définition de φ.

Si l'application ψ est définie sur un intervalle de la forme $[a, b[$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz-local, il existe $\alpha > 0$ et une solution η de (S) définie sur $]b-\alpha, b+\alpha[$ telle que $\eta(b) = \psi(b)$. De plus, $\psi_{|]b-\alpha,b]\cap[a,b]} = \eta_{|]b-\alpha,b]\cap[a,b]}$. Si l'on définit

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\psi}: &]a, b+\alpha[& \to & \mathbb{R}^d \\ & t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \psi(t) \text{ si } t < b \\ \eta(t) \text{ si } t > b-\alpha, \end{array} \right. \end{array}$$

l'application $\tilde{\psi}$ est un élément de $\mathcal{F}$ donc $\tilde{\psi} \preceq \varphi$. Or $\psi \preceq \tilde{\psi}$ donc $\psi \preceq \varphi$.

Les cas où l'application ψ est définie sur un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $[a, b]$ se traitent de manière analogue : on a montré que toute solution de (S) est une restriction de φ.

Vérifions maintenant que φ est une solution maximale de (S). Soit ψ une solution de (S) telle que $\varphi \preceq \psi$. Comme l'application ψ est solution de (S), alors $\psi \preceq \varphi$ d'après le paragraphe précédent, d'où $\psi = \varphi$.

Unicité : Soit ψ une solution maximale de (PC). D'après le paragraphe précédent, on a $\psi \preceq \varphi$. Par maximalité de ψ, on en déduit que $\psi = \varphi$, d'où l'unicité de la solution maximale de (PC). $\square$

Noter que l'on aurait pu prendre pour $\mathcal{F}$ l'ensemble des solutions de (PC), définies sur un intervalle ouvert ou pas. Cette approche facilite la démonstration de la maximalité de φ mais il faut travailler plus pour démontrer que φ est définie sur un intervalle ouvert et pour démontrer que φ est dérivable : ces deux points nécessitent le théorème de Cauchy-Lipschitz local.

4.3 Méthodes de résolution explicite

4.3.1 Équations différentielles à variables séparables

On appelle *équation différentielle à variables séparables* toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme

$$(E_{vs})\ y'f(y) = g(t),$$

où f et g sont des fonctions continues.

Notons F une primitive de f et G une primitive de g. En prenant, une primitive des deux membres de l'équation, l'équation différentielle (E_{vs}) peut se réécrire

$$\exists C \in \mathbb{R}, F(y) = G(t) + C.$$

On cherche alors à inverser F pour exprimer une solution en fonction de t.

Exemple 4.11. Déterminons les solutions maximales de l'équation différentielle

$$(E)\ x' = x^2.$$

Vue la méthode ci-dessus, on a envie de diviser par x^2 mais, pour le faire, on doit s'assurer que la solution considérée ne s'annule pas.

Remarquons que la fonction nulle est solution de (E).

Soit maintenant $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E) distincte de la fonction nulle. Montrons par l'absurde que la fonction φ ne s'annule pas.

Supposons qu'il existe un nombre réel $t_0 \in I$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. Alors φ et la fonction nulle sont solutions sur I du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x^2 \\ x(t_0) & = & 0. \end{array} \right.$$

De plus, l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est de classe C^1. Par conséquent, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz,

$$\forall t \in I,\ \varphi(t) = 0,$$

en contradiction avec l'hypothèse faite sur φ. Ainsi, la fonction φ ne s'annule pas.

On a donc, pour tout nombre réel $t \in I$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right) = -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2} = -1.$$

Ainsi, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in I$,

$$\frac{1}{\varphi(t)} = C - t.$$

On en déduit que, pour tout $t \in I$,

$$C - t \neq 0 \Leftrightarrow t \neq C.$$

L'intervalle I est ainsi contenu dans $]-\infty, C[$ ou $]C, +\infty[$ et

$$\forall t \in I,\ \varphi(t) = \frac{1}{C - t}.$$

Réciproquement, soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une application définie par la formule ci dessus avec $I \subset]-\infty, C[$ ou $I \subset]C, +\infty[$. Alors φ est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{(C-t)^2} = \varphi(t)^2.$$

L'application φ est donc solution de (E).

Comme on a déterminé toutes les solutions de (E), pour obtenir les solutions maximales de (E), il suffit de sélectionner parmi ces solutions celles qui ne peuvent pas être prolongées strictement.

Les solutions maximales de (E) sont donc les applications de l'une des trois formes suivantes

1. L'application
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 0 \end{array}.$$
2. Les applications de la forme
$$\begin{array}{ccc}]-\infty, C[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{C-t} \end{array},$$
avec $C \in \mathbb{R}$.
3. Les applications de la forme
$$\begin{array}{ccc}]C, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{C-t} \end{array},$$
avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.12. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur des intervalles ouverts I et J de $\mathbb{R}$. On suppose que g est à valeurs strictement positives. On fixe $t_0 \in I$ et $y_0 \in J$. Pour $y \in J$, on note,

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(u)} du$$

et, pour $t \in I$, on note

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s) ds.$$

1. Question préliminaire : montrer que G réalise une bijection de l'intervalle J sur un intervalle J'.
2. Déterminer la solution maximale du problème de Cauchy
$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & f(t)g(y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$
en fonction des données du problème.

4.3.2 Équations de Bernoulli

Il s'agit des équations différentielles de la forme

$$(E_B)\ y' = b(t)y^m + a(t)y,$$

où a et b sont des applications continues et $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que, dans le cas $m > 0$, une solution de (E_B) qui s'annule en un point s'annule sur tout son intervalle de définition.

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E_B) qui ne s'annule pas. Alors, pour tout point t de I,

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^m} - \frac{a(t)}{\varphi(t)^{m-1}} = b(t).$$

Si l'on pose $\psi = 1/\varphi^{m-1}$, alors

$$(1-m)^{-1}\psi'(t) - a(t)\psi(t) = b(t).$$

On est ramené à une équation différentielle d'ordre 1 que l'on sait résoudre.

4.3.3 Équation de Riccati

Il s'agit des équations différentielles de la forme

$$(E_R) y' = a(t) + b(t)y + c(t)y^2.$$

On suppose que l'on connaît une solution particulière $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ de (E_R). On cherche alors d'autres solutions φ de (E_R) (les solutions définies sur un intervalle inclus dans I) sous la forme $\varphi = \varphi_0 + \psi$. En injectant cette expression dans l'équation, on obtient

$$\varphi_0' + \psi' = a(t) + b(t)(\varphi_0 + \psi) + c(t)(\varphi_0^2 + 2\varphi_0\psi + \psi^2).$$

Comme φ_0 est solution de (E_B), on réécrit ceci

$$\psi' = (b(t) + 2c(t)\varphi_0)\psi + c(t)\psi^2.$$

Il s'agit d'une équation de Bernoulli.

Chapitre 5

Équations différentielles non-linéaires : temps d'existence et lemme de Gronwall

On reprend les notations du chapitre précédent. En particulier, on note $d \geq 1$ un entier, U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une application qui vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Dans cette partie, on souhaite étudier les intervalles de définition des solutions maximales du système différentiel (S) suivant

$$x' = f(t, x).$$

5.1 Théorème des bouts

Théorème 5.1 (Théorème des bouts-version faible)**.** *On note K une partie compacte de U. Pour toute solution maximale $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ de (S) et tout point t_0 de I, il existe $t_1 \in I$ avec $t_1 > t_0$ et $t_2 \in I$ avec $t_2 < t_0$ tels que $(t_1, \varphi(t_1)) \notin K$ et $(t_2, \varphi(t_2)) \notin K$.*

En pratique, on utilisera souvent la contraposée de l'énoncé ci-dessus : une solution $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ de (S) qui vérifie

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, (t, \varphi(t)) \in K$$

n'est pas maximale.

Si $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $x :]a, b[\to \mathbb{R}^d$ est une solution maximale de (S) avec $b < +\infty$, alors $x([t_0, b[)$ sort de tout compact de $\mathbb{R}^d$: pour le voir, appliquer le théorème 5.1 avec $K = [t_0, b] \times K'$, où K' est une partie compacte de $\mathbb{R}^d$.

La démonstration du théorème 5.1 est essentiellement contenue dans l'exercice suivant. Cet exercice permet de démontrer que si une solution ne vérifie pas la conclusion du théorème 5.1, alors elle n'est pas maximale, ce qui permet d'obtenir le théorème par contraposition.

Exemple 5.2. CAS f BORNEE.

Exercice 5.3 (Démonstration de la version faible du théorème des bouts)**.** Soit A une partie compacte de U, soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^d$ une solution de (S) et $t_0 \in]\alpha, \beta[$. Supposons que

$$\forall t \in]t_0, \beta[, \ (t, \varphi(t)) \in A.$$

1. Démontrer que $\beta < +\infty$ et qu'il existe $l \in \mathbb{R}^d$ et une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres de $]t_0, \beta[$ telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = \beta$ et
$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(t_n) = l.$$
2. On définit $\tilde{\varphi} :]\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ par
$$\begin{cases} \forall t \in]\alpha, \beta[, \ \tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) \\ \tilde{\varphi}(\beta) = l \end{cases}.$$
Démontrer que $\tilde{\varphi}$ est solution de (S).

5.2 Lemme de Gronwall

Le lemme suivant est utile en pratique pour pouvoir appliquer le théorème des bouts et obtenir des informations sur les intervalles de définition des solutions maximales. On en verra des applications importantes dans la section suivante.

Lemme 5.4 (Lemme de Gronwall)**.** *Soit $\psi : I \to \mathbb{R}^d$ une application dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et fixons $t_0 \in I$. Supposons qu'il existe $A > 0$ et $B \geq 0$ tels que*

$$\forall t \in [t_0, +\infty[\cap I, \ \|\psi'(t)\| \leq A \|\psi(t)\| + B.$$

Alors, pour toute solution $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = Ay + B$ telle que $\rho(t_0) \geq \|\psi(t_0)\|$, on a

$$\forall t \in [t_0, +\infty[\cap I, \|\psi(t)\| \leq \rho(t).$$

<u>Remarques :</u>

1. On peut bien évidemment calculer ρ explicitement. La résolution faite dans l'exercice 1.10 implique que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \rho(t) = \rho(t_0)e^{(t-t_0)A} + \frac{B}{A}(e^{(t-t_0)A} - 1).$$
Ainsi la conclusion du lemme de Gronwall peut se réécrire simplement
$$\forall t \in [t_0, +\infty[\cap I, \|\psi(t)\| \leq \|\psi(t_0)\| \, e^{(t-t_0)A} + \frac{B}{A}(e^{(t-t_0)A} - 1).$$
2. Pour obtenir des estimations pour $t \leq t_0$, on peut appliquer le lemme de Gronwall à $t \mapsto \psi(-t)$.

Exercice 5.5 (Démonstration du lemme de Gronwall)**.**

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. On fixe $t_0 \in I$. On suppose qu'il existe $A > 0$ et $B \geq 0$ tels que
$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[, \ f'(t) \leq Af(t) + B.$$
Démontrer que
$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[, \ f(t) \leq f(t_0)e^{|t-t_0|A} + \frac{B}{A}(e^{|t-t_0|A} - 1).$$

2. Soit $d \geq 1$ et $\psi : I \to \mathbb{R}^d$ une application dérivable telle que

$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[,\ \|\psi'(t)\| \leq A\,\|\psi(t)\| + B,$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

En appliquant la question précédente à $f(t) = \|\psi(t)\|$, démontrer que

$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[,\ \|\psi(t)\| \leq \|\psi(t_0)\|\, e^{(t-t_0)A} + \frac{B}{A}(e^{(t-t_0)A} - 1).$$

On pourra commencer par traiter le cas particulier où

$$\forall t \in [t_0, +\infty[\cap I,\ \|\psi(t)\| > 0.$$

5.3 Applications du lemme de Gronwall

5.3.1 Systèmes différentiels linéaires

Soient $A : I \to M_d(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^d$ des applications continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On s'intéresse au système différentiel linéaire

$$(S_l)\ x' = A(t)x + B(t).$$

La proposition suivante permet de déduire le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire de son analogue non-linéaire.

Proposition 5.6 (Intervalle d'existence des solutions de systèmes différentiels linéaires)**.** *Les solutions maximales de (S_l) sont définies sur I.*

Ainsi, les solutions maximales de (S_l) sont définies sur les intervalles les plus grands possibles. Cette proposition est démontrée à l'occasion de l'exercice suivant.

Exercice 5.7 (Systèmes différentiels linéaires)**.** Soient $A : I \to M_d(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^d$ des applications continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On s'intéresse au système différentiel linéaire

$$(S_l)\ x' = A(t)x + B(t).$$

1. Démontrer que le système (S_l) vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz non-linéaire.
2. Montrer que les solutions maximales de (S_l) sont définies sur I.

5.3.2 Tubes de solution

Chapitre 6

Équations différentielles non-linéaires : étude qualitative

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons uniquement à des systèmes différentiels *autonomes*, c'est-à-dire des systèmes différentiels qui ne dépendent pas du temps t. Remarquons que l'étude du système différentiel a priori non-autonome $x' = f(t,x)$ se ramène à l'étude du système différentiel autonome

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & f(\tau, x) \\ \tau' & = & 1 \end{array} \right. .$$

Dans ce chapitre, on note $d \geq 1$ un entier, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $X : U \to \mathbb{R}^d$ une application localement lipschitzienne (donc continue). Une telle application est appelé un *champ de vecteurs* : elle peut être visualisée comme un vecteur $X(p)$ attachée à chaque point p de U. On souhaite étudier le système différentiel (autonome) suivant

$$(S)\ x' = X(x).$$

Pour simplifier l'exposition des résultats, on suppose dans toute la suite que les solutions maximales de (S) sont définies sur $\mathbb{R}$ en entier : on dit que le champ de vecteurs X est *complet*. Néanmoins, les définitions et les théorèmes de ce chapitre peuvent être adaptés au cas où le champ de vecteur n'est pas complet.

6.1 Le flot d'un champ de vecteurs

Soit $x_0 \in U$. On note

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & \varphi^t(x_0) \end{array}$$

l'unique solution maximale de (S) qui est égale à x_0 en $t = 0$. L'application φ est appelée *flot* du champ de vecteurs X.

Proposition 6.1 (Propriétés du flot). *1. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$. L'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & \varphi^{t-t_0}(x_0) \end{array}$$

est la solution maximale de (S) qui vaut x_0 en $t = t_0$.

2. $\varphi^0 = Id_U$.

3. Pour tous nombres réels t_1 et t_2, $\varphi^{t_1} \circ \varphi^{t_2} = \varphi^{t_1+t_2}$.

Cette proposition est démontrée à l'occasion de l'exercice suivant.

Exercice 6.2 (Flot d'un champ de vecteurs.). Notons φ le *flot* d'un champ de vecteurs $X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ complet. On fixe un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

1. Exprimer à l'aide de $\varphi = (\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' & = & X(x) \\ x(t_0) & = x_0. \end{cases}$$

2. Montrer que, pour tous nombres réels t_1 et t_2, $\varphi^{t_1} \circ \varphi^{t_2} = \varphi^{t_1+t_2}$.
3. Montrer que, pour tout nombre réel t, l'application $\varphi^t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est bijective de bijection réciproque φ^{-t}.

6.2 Orbites d'un champ de vecteurs

Définition 6.3. *On appelle* orbite *ou* trajectoire *du champ de vecteur X l'image de $\mathbb{R}$ par une application de la forme $t \mapsto \varphi^t(x_0)$, avec $x_0 \in U$.*

Commençons avec une application directe du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Proposition 6.4. *Deux orbites de X distinctes sont disjointes.*

Autrement dit, deux orbites distinctes ne se croisent jamais.

Topologiquement, on a trois formes distinctes d'orbites.

Proposition 6.5 (Formes possibles des orbites). *Une orbite du champ de vecteurs X est*

1. *soit réduit à un point $\{p\}$. Dans ce cas, $X(p) = 0$ et le point p est appelé* point d'équilibre *du système (S).*
2. *soit une courbe fermée simple. Dans, ce cas, on dit que l'orbite est* périodique *et il existe $T > 0$ tel que, pour tout point p de l'orbite, $\varphi^T(p) = p$.*
3. *soit est l'image de $\mathbb{R}$ par une injection continue.*

Exercice 6.6 (Orbites d'un champ de vecteurs). On note $\varphi = (\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot d'un champ de vecteurs complet $X : U \to \mathbb{R}^d$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

1. Démontrer que deux orbites distinctes de X sont disjointes.
2. On fixe un point $p \in U$ et on note $G_p = \{t \in \mathbb{R},\ \varphi^t(x) = x\}$. Démontrer que le groupe G_p est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$.
3. On admettra que tout sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ est soit $\{0\}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$ ou est dense dans $\mathbb{R}$ (qui est un résultat classique). En utilisant ce résultat, montrer qu'une orbite de X est soit un point d'équilibre, soit une orbite périodique, soit l'image de $\mathbb{R}$ par une injection continue.

6.3 Portraits de phase

Rappelons que le portrait de phase du système différentiel (S) est la donnée de l'ensemble des orbites de X. Lorsque la dimension d est égale à 2, comme deux orbites distinctes sont disjointes, on représente toutes les orbites dans un même plan.

On présente maintenant une méthode standard pour tracer un tel portrait de phase.

Une méthode pour tracer le portrait de phase d'un système différentiel autonome du plan

1. Dessiner l'isocline $x' = 0$, *i.e.* l'ensemble des points du plan où le champ de vecteurs X est vertical (ou, de manière équivalente, l'ensemble des points du plan où la première composante du champ de vecteurs X est nulle).
2. Dessiner l'isocline $y' = 0$, *i.e.* l'ensemble des points du plan où le champ de vecteurs X est horizontal (ou, de manière équivalente, l'ensemble des points du plan où la deuxième composante du champ de vecteurs X est nulle).
3. Trouver les points d'équilibre du système qui se trouvent à l'intersection des deux isoclines ci-dessus.
4. Tracer l'allure du champ de vecteurs sur chaque isocline et sur chaque composante connexe du complémentaire des isoclines.
5. Dessiner les orbites de (S) (ou du moins des orbites "représentatives" de (S)).

La notion suivante peut aider à tracer les portraits de phase de manière plus précise.

Définition 6.7. *On appelle* intégrale première *du système différentiel (S) toute application continue $\mathcal{I} : V \to \mathbb{R}$, où V est un ouvert de U, telle que, pour tout point $x \in V$, l'application $t \mapsto \mathcal{I}(\varphi^t(x))$ est constante sur chaque intervalle où elle est définie.*

Cela signifie que chaque orbite de X incluse dans V est contenue dans l'une des lignes de niveau de $\mathcal{I}$. Par conséquent, dessiner les lignes de niveau de $\mathcal{I}$ va aider à tracer le portrait de phase.

Quand l'application $\mathcal{I}$ est différentiable, pour démontrer que $\mathcal{I}$ est une intégrale première du système différentiel (S), il suffit de démontrer que la dérivée de $t \mapsto \mathcal{I}(\varphi^t(x))$ s'annule en tout point où elle est définie.

Annexe A

Quelques rappels/compléments de topologie

Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$. On appelle *ouvert de A* toute partie de A de la forme $U \cap A$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On appelle *fermé de A* toute partie de A de la forme $F \cap A$, où F est un fermé de $\mathbb{R}^d$. Les fermés de A sont donc les complémentaires dans A des ouverts de A, et vice-versa.

Définition A.1. *On dit que la partie A est* non-connexe *s'il existe deux ouverts non-vides U et V de A tels que*

$$\begin{cases} A = U \cup V \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$

Intuitivement, cela signifie que A est constitué de deux morceaux : celui constitué des éléments de U et celui constitué des éléments de V. Une partie *connexe* sera donc une partie en un seul morceau.

La définition d'une partie connexe, donnée ci-dessous, est la négation de la définition précédente.

Définition A.2. *On dit que la partie A est* connexe *si, pour tous ouverts U et V de A tels que*

$$\begin{cases} A = U \cup V \\ U \cap V = \emptyset, \end{cases}$$

on a $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

Dans le cadre du cours, on a utilisé la proposition suivante (voir exercice 4.10).

Proposition A.3. *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes.*

Démonstration. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Notons U et V deux ouverts disjoints de $\mathbb{R}$ tels que $I \subset U \cup V$, c'est-à-dire que $I \cap U$ et $I \cap V$ sont deux ouverts disjoints de I et $I = (I \cap U) \cup (I \cap V)$. Il s'agit de montrer que $I = I \cap U$ ou $I = I \cap V$, c'est-à-dire que $I \subset U$ ou $I \subset V$.

On fixe un point x_0 de I. Quitte à échanger les rôles de U et V, on peut supposer que $x_0 \in U$. On va maintenant montrer que $I \subset U$.

L'ensemble

$$A_+ = \{x \in I \cap [x_0, +\infty[\mid [x_0, x] \subset U\}$$

contient le point x_0 donc est non-vide. On peut donc définir $x_+ = \sup(A_+) \in \overline{I} \cup \{+\infty\}$.

Supposons que $x_+ \in I$. Comme $I \cap U = I \setminus I \cap V$ est un fermé de I, $x_+ \in I \cap U$. Comme U est ouvert, on en déduit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $[x_+ - \alpha, x_+ + \alpha] \subset U$. En utilisant la définition de x_+, on obtient que $[x_0, x_+ + \alpha] \subset U$, en contradiction avec la définition de U sauf si $x_+ = \sup(I)$. De plus $[x_0, x_+] \subset U$.

Si $x_+ \notin I$, la définition de x_+ implique que $x_+ = \sup(I)$ et $[x_0, x_+[\subset U$.

De même, si l'on note

$$A_- = \{x \leq x_0 \mid [x, x_0] \subset U\}$$

et $x_- = \inf(A_-)$, on montre que $x_- = \inf(I)$ et, si $x_- \in I$, $[x_-, x_0] \subset U$ et, si $x_- \notin I$, $]x_-, x_0] \subset U$. Ainsi, $I \subset U$. □

Proposition A.4. *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration. On a déjà vu que les intervalles étaient des parties connexes de $\mathbb{R}$. Il s'agit maintenant de démontrer que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles.

On utilise la caractérisation suivante des intervalles de $\mathbb{R}$ (qui sont les parties convexes de $\mathbb{R}$). Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous points $x < y$ de $\mathbb{R}$, $[x, y] \subset I$.

On raisonne par contraposition. Soit C une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle. Alors il existe deux points $x < y$ de C et un point $z \in [x, y]$ qui n'appartient pas à C. Ainsi,

$$C = (C \cap]-\infty, z[) \cup (C \cap]z, +\infty[).$$

Les parties $(C \cap]-\infty, z[)$ et $(C \cap]z, +\infty[)$ sont des ouverts disjoints de C. Ils sont de plus non-vides car x appartient au premier ouvert et y appartient au deuxième. Ainsi, la partie C n'est pas connexe. □

Signalons la propriété suivante, qui généralise le théorème des valeurs intermédiaires et dont la démonstration consiste en une application des définitions de la continuité et de la connexité.

Théorème A.5. *L'image d'une partie connexe par une application continue est connexe.*

Démonstration. Soit $f : A \to B$ une application continue. On suppose A connexe. Soient U et V deux ouverts de $f(A)$ d'intersection vide tels que $f(A) = U \cup V$. Par continuité de f, les parties $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ sont deux ouverts de A. De plus, ils sont d'intersection vide et recouvrent A. Par connexité de A, soit $f^{-1}(U)$ est vide, soit $f^{-1}(V)$ est vide. Or, comme U et V sont contenus dans $f(A)$, $U = f(f^{-1}(U))$ et $V = f(f^{-1}(V))$ d'où U est vide ou V est vide. Ainsi, $f(A)$ est connexe. □

Notons la propriété suivante.

Proposition A.6. *Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de $\mathbb{R}^d$. Si*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset,$$

alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

Démonstration. Soient U et V des ouverts disjoints de $\bigcap_{i\in I} A_i$ qui recouvrent cet ensemble. Soit p un point de $\bigcap_{i\in I} A_i$. Quitte à échanger les rôles de U et V, on peut supposer que $p \in U$. Soit $i \in I$. Comme $A_i = (A_i \cap U) \cup (A_i \cap V)$, $A_i \cap U \neq \emptyset$ (cet ensemble contient le point p) et comme la partie A_i est connexe, alors $A_i \cap V = \emptyset$. Cela étant vrai pour tout indice i, on obtient que

$$V = V \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \emptyset.$$

Ainsi, la partie $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe. $\square$

On fixe une partie A de $\mathbb{R}^d$. On définit une relation binaire sur A par $x \equiv y$ si et seulement si il existe une partie de connexe C de A qui contient les points x et y. La propriété précédente permet de démontrer que la relation $\equiv$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence pour cette relation d'équivalence sont des parties connexes appelées les composantes connexes de A : on le montre en utilisant la propriété précédente. Ces composantes connexes forment une partition de A. Ce sont les plus grands connexes contenus dans A.

En utilisant la notion de composante connexe et le fait que l'image d'un arc continu $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ est connexe (par connexité du segment $[0,1]$), on peut montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^d$ qui est connexe par arcs est connexe.