TD de fondements mathématiques 1

1 Séance 1

Exercice 1.1. Représenter graphiquement la fonction sinus et la fonction inverse. En déduire la représentation graphique des fonctions d'une variable réelle suivantes.

1. $x \mapsto \sin(x) + 2$.
2. $x \mapsto \sin(x + \frac{\pi}{2})$.
3. $x \mapsto |\sin(x)|$.
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x} - 1$.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$.
6. $x \mapsto \left|\dfrac{1}{x} - 1\right|$

Exercice 1.2. Dans chacun des cas suivants, l'application $g \circ f$ existe-t-elle ? Si c'est le cas, déterminer cette application. Dans le cas contraire, à quel ensemble peut-on restreindre l'application f ou g pour que la composée soit bien définie ?

1. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin(t). \end{array}$$
2. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \cos(z) \end{array} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t}. \end{array}$$
3. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 3x + 2 \end{array} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$

Exercice 1.3.

1. Notons f l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + 2. \end{array}$$
Déterminer $f([0, 2])$ et $f^{-1}([-1, 1])$.
2. Notons g l'application
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x+2}. \end{array}$$
Déterminer $g^{-1}([-1, 1])$ et $g([0, 1])$.

Exercice d'entraînement 1.1. Représenter graphiquement la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

En déduire les représentations graphiques des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes

1. $x \mapsto x^2 - 1$.
2. $x \mapsto (x + 2)^2$.
3. $x \mapsto |x^2 - 1|$.

Exercice d'entraînement 1.2. Dans chacun des cas suivants, l'application $g \circ f$ existe-t-elle ? Si c'est le cas, déterminer cette application. Dans le cas contraire, à quel ensemble peut-on restreindre l'application f ou g pour que la composée soit bien définie ?

1.
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 2y \end{array} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x. \end{array}$$

2.
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x). \end{array}$$

Exercice d'entraînement 1.3. Notons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 1 \end{array}.$$

Déterminer $f^{-1}([0,1])$ et $f([1,2])$.

Exercice supplémentaire 1.1. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous nombres réels x et y,

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

2 Séance 2

Exercice 2.1 (La fonction tangente)**.** On appelle fonction tangente et on note tan la fonction définie par l'expression

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

On rappelle que, dans un triangle ABC rectangle en A, si $\hat{B} = \theta$, alors

$$\tan(\theta) = \frac{AC}{AB} (= \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de la fonction tangente.
2. Calculer $\tan(0)$, $\tan(\frac{\pi}{6})$, $\tan(\frac{\pi}{4})$ et $\tan(\frac{\pi}{3})$.
3. Étudier la parité et la périodicité de la fonction tan. Sur quel intervalle J suffit-il d'étudier cette fonction ? Comment en déduit-on le graphe de la fonction tan sur I en entier ?
4. Montrer que la fonction tan est dérivable sur I et calculer sa fonction dérivée en fonction de tan puis en fonction de cos.
5. Établir le tableau des variations de la fonction tan sur J (sans oublier les limites aux bornes). En déduire l'allure du graphe de la fonction tan sur l'intervalle $]-2\pi, 2\pi[$.

Exercice 2.2. On considère la fonction f définie par l'expression

$$f(x) = \cos(3x) - \cos(3x)^2.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f. Sur quel intervalle J suffit-il d'étudier f ?
3. Montrer que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer f'.
4. Établir le tableau de variations de f sur J et tracer l'allure du graphe de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Exercice d'entraînement 2.1 (La fonction cotangente)**.** On appelle fonction cotangente et on note cot la fonction définie par l'expression

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de la fonction cotangente.
2. Calculer $\cot(\frac{\pi}{6})$, $\cot(\frac{\pi}{4})$, $\cot(\frac{\pi}{3})$ et $\cot(\frac{\pi}{2})$.
3. Étudier la parité et la périodicité de la fonction cot. Sur quel intervalle J suffit-il d'étudier cette fonction ? Comment en déduit-on le graphe de la fonction cot sur I en entier ?
4. Montrer que la fonction cot est dérivable sur I et calculer sa fonction dérivée en fonction de cot puis en fonction de sin.
5. Établir le tableau des variations de la fonction cot sur J. En déduire l'allure du graphe de la fonction cot sur l'intervalle $]-2\pi, 2\pi[$.

Exercice d'entraînement 2.2. Mêmes questions que dans l'exercice 2.2 avec la fonction f définie par l'expression

$$f(x) = \frac{\cos(5x)}{\cos(5x)+1}.$$

On tracera l'allure du graphe de f sur $[-\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}]$.

Exercice supplémentaire 2.1 (Interprétation géométrique des fonctions tangente et cotangente)**.**

1. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon 1 et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = 1$ (tangente au cercle). On fixe un angle θ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On note M_θ le point de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{AOM_\theta} = \theta$ et N_θ le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et (OM_θ). Faire un dessin et déterminer les coordonnées du point N_θ.
2. Trouver une interprétation géométrique de la cotangente dans un triangle rectangle puis en utilisant le cercle trigonométrique.

Exercice supplémentaire 2.2. Soit $n \geq 0$ un entier et θ un nombre réel. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Indication : utiliser l'exponentielle complexe.

3 Séance 3

Exercice 3.1 (Propriétés des puissances réelles)**.** Montrer que, pour tous nombres réels a, b, $s > 0$ et $t > 0$,

1. $s^a t^a = (st)^a$.
2. $s^a s^b = s^{a+b}$.
3. $\ln(s^a) = a\ln(s)$.
4. $(s^a)^b = s^{ab}$.

Exercice 3.2 (Fonctions puissance)**.** Soit a un nombre réel. Montrer que la fonction

$$f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a \end{array}$$

est dérivable et calculer sa dérivée. Étudier la fonction f_a.

Exercice 3.3 (Fonction exponentielle en base a)**.** Soit $a > 0$. Montrer que la fonction

$$g_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a^x \end{array}$$

est dérivable et calculer sa fonction dérivée. Étudier la fonction g_a.

Exercice d'entraînement 3.1 (Fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique)**.** On note cosh et sinh les fonctions définies par les expression

$$\left\{ \begin{array}{l} \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array} \right. .$$

1. Étudier les fonctions cosh et sinh (ensemble de définition, parité, variations, limites) et représentez-les graphiquement.
2. Montrer que, pour tous nombres réels x et y

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$$

$$\cosh(x+y) + \sinh(x+y) = (\cosh(x) + \sinh(x))(\cosh(y) + \sinh(y))$$
$$\cosh(x+y) - \sinh(x+y) = (\cosh(x) - \sinh(x))(\cosh(y) - \sinh(y)).$$

En déduire des expressions de $\cosh(x+y)$ et $\sinh(x+y)$ en fonction de $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(y)$, $\sinh(y)$.

Exercice fait en amphi 3.1.

1. On fixe un nombre réel $y > 0$. On note f_y la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, \ f_y(x) = \ln(xy) - \ln(x).$$

Montrer que la fonction f_y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa fonction dérivée.
2. En déduire que, pour tous nombres réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
3. En déduire que, pour tout nombre réel $x > 0$, $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.
4. En déduire que, pour tout nombre réel $x > 0$ et pour tout entier relatif n, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Exercice fait en amphi 3.2.

1. Démontrer que $\exp(0) = 1$.
2. En utilisant les propriétés du logarithme népérien, démontrer que, pour tous nombres réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
3. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
4. Montrer que, pour tout entier relatif n, $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

Exercice supplémentaire 3.1. Résoudre l'équation

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x.$$

Exercice supplémentaire 3.2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, avec f à valeurs strctement positives. Montrer que la fonction $f^g : x \mapsto f(x)^{g(x)}$ est alors dérivable sur I et calculer sa fonction dérivée. Application : déterminer la dérivée de $x \mapsto (\cos(x)+2)^{x^2}$.

4 Séance 4

Exercice 4.1. Calculer, si elles existent, les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-x+1}{2x^2+3x+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+xe^x}{x^3\ln(x)+x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\dfrac{\ln(x)+x^2}{e^x+x+1}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{2^x-3^x}{1+3^x}\right)$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln(x)+x+e^x}{x+e^{-x}}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x)-\ln(x+1)$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x^3+3x}-x$.
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}$.

Exercice d'entraînement 4.1. Calculer, si elles existent, les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x+1}{x+3}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(x)+x}{2x+4}$.
3. $\lim\limits_{x\to -2} \cos\left(\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x+x}{e^x+1}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x)}{3\ln(x)+(\ln(x))^2}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\ln(x)$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$.

Exercice supplémentaire 4.1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout nombre réel x,

$$f(2x) = f(x).$$