5 Séance 5

Exercice 5.1. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes à l'aide d'encadrements.

1. $\lim_{x \to -\infty} 1 - 2\dfrac{\cos(x) + x}{x^3 + 2}$.
2. $\lim_{x \to -\infty} x + \dfrac{\cos(x)x^2}{x^2 + 2}$.
3. $\lim_{x \to 1^-} \sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right) e^{\frac{1}{x-1}} + \dfrac{x^2 - \ln(x)}{x^2 - x}$.
4. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{g(x) + x\ln(x)}{(g(x) + 10)e^x}$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout nombre réel x,
$$-5 \leq g(x) \leq 2.$$

Exercice d'entraînement 5.1. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes à l'aide d'encadrements.

1. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x) + 3}{x} + \dfrac{e^x + x}{e^{2x} + 1}$.
2. $\lim_{x \to +\infty} x^2 \sin(x) + e^x$.
3. $\lim_{x \to +\infty} g(x)\dfrac{\ln(x)^2 + 1}{\ln(x) + 2} + x$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout nombre réel x,
$$-5 \leq g(x) \leq 2.$$

Exercice fait en amphi 5.1.

1. À l'aide d'une étude de fonction, montrer que, pour tout nombre réel $x \geq 0$,
$$e^x - x \geq 1.$$
2. En déduire que
   (a) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
   (b) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.
   (c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^{\frac{1}{2}}} = +\infty$.
   (d) pour tout nombre réel $a > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^a} = +\infty$.
   (e) pour tout nombre réel $a > 0$, $\lim_{x \to -\infty} \mid x \mid^a e^x = 0$.

Exercice supplémentaire 5.1. Soient $a < b$ des nombres réels. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante définie sur $[a, b]$ telle que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$.

6 Séance 6

Exercice 6.1 (Continuité d'une fonction)**.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f d'une variable réelle définie par l'expression

$$f(x) = \frac{\cos(\ln(x^2 + x + 1))}{x^2 - 4x - 2} + (x+1)e^x.$$

Sur quel ensemble la fonction f est-elle continue ? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des théorèmes de votre cours.

Exercice 6.2 (Recollement de fonctions)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} t\sin(\frac{1}{t}) \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \\ \frac{t^2+t^3}{t+t^3} \text{ si } t < 0 \end{cases}.$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Si la réponse est non, sur quel ensemble la fonction f est-elle continue ? Justifier soigneusement votre réponse.

Exercice 6.3 (Applications du théorème des valeurs intermédiaires)**.**

1. Montrer que l'équation $\cos(x) - x = 0$ admet au moins une solution sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que l'équation $2x^3 + 7x^2 - 2x = 2$ admet au moins deux solutions sur $[-1, 1]$.

Exercice d'entraînement 6.1 (Continuité d'une fonction)**.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f d'une variable réelle définie par l'expression

$$f(x) = e^x \ln(x^2 + 4x + 1) + \cos(x).$$

Sur quel ensemble la fonction f est-elle continue ? Justifier soigneusement votre réponse à l'aide des théorèmes de votre cours.

Exercice d'entraînement 6.2 (Recollement de fonctions)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{l} \forall z > 0,\ f(z) = \frac{z^4+2z^2}{z^6+z^2} \\ \forall z \leq 0,\ f(z) = 1 - \cos(z). \end{array}$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Si la réponse est non, sur quel ensemble la fonction f est-elle continue ?

Exercice d'entraînement 6.3 (Application du théorème des valeurs intermédiaires)**.**

1. Montrer que l'équation $2^x - 2x = 3$ admet au moins une solution sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 5x + 2 = 1$ a au moins deux solutions sur $[0, 2]$.

Exercice supplémentaire 6.1.

1. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) \in [0, 1]$ et $f(1) \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un point $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$ (on pourra faire un dessin).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que la fonction f admet un minimum.
3. Montrer que les polynômes de degré 3 (à coefficients réels) ont toujours au moins une racine réelle (*i.e.* un point a où le polynôme P vérifie $P(a) = 0$). Que peut-on dire des polynômes de plus grand degré ?

7 Séance 7

Exercice 7.1 (Définition du nombre dérivé)**.** En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer dans chacun des cas si la fonction f est dérivable au point $a \in \mathbb{R}$.

1. $$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^2 - 3 \end{array}$$
   en $a = 2$.
2. $$f: \begin{array}{rcl} [-1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$$
   en $a = -1$ puis en $a > -1$ quelconque.
3. $$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{|x|}{x+1} \end{array}$$
   en $a = 0$.
4. On a vu lors d'un exercice précédent que, pour $\beta > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\beta = 0$. On fixe $\alpha > 0$.
   $$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} x^\alpha \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$
   en $a = 0$.

Exercice 7.2. En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(x)^2 - \ln(2)^2}{x^2 - 4}$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x \ln(x))}{x}$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$

Exercice d'entraînement 7.1. En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer dans chacun des cas si la fonction f est dérivable au point $a \in \mathbb{R}$.

1. $$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -3x^2 + 1 \end{array}$$
   en $a = 1$.
2. $$f: \begin{array}{rcl}]-1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{x+1} \end{array}$$
   en $a = 1$ puis en $a > -1$ quelconque.
3. $$f: \begin{array}{rcl} [-1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x+2}{\sqrt{x+1}+2} \end{array}$$
   en $a = -1$.
4. $$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{\sqrt{x+1}+2} \end{array}$$
   en $a = -1$.

Exercice d'entraînement 7.2. En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos(x)^2 - \cos(a)^2}{x^2 - a^2}$, où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{e^x - 1}$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x\sin(x))}{\sin(x)}$.

Exercice supplémentaire 7.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dérivable en un point x_0 de $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$
A-t-on une réciproque à cet énoncé ?

8 Séance 8

Exercice 8.1 (Calculs de dérivées)**.** Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner son ensemble de définition, étudier la dérivabilité de la fonction et calculer sa fonction dérivée.

1. La fonction f_1 définie par l'expression
$$f_1(x) = \ln(x^2 + x - 1)\sin(x).$$
2. La fonction f_2 est définie par l'expression
$$f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}.$$
3. La fonction f_3 est définie par les expressions
$$\begin{cases} f_3(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ f_3(0) = 0 \end{cases}.$$
4. La fonction f_4 est définie par l'expression
$$f_4(x) = e^{|x|}.$$

Exercice d'entraînement 8.1 (Calculs de dérivées)**.** Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner son ensemble de définition, étudier la dérivabilité de la fonction et calculer sa fonction dérivée.

1. La fonction f_1 est définie par l'expression
$$f_1(x) = x^e \sqrt{x^2 - 3x}.$$
2. La fonction f_2 est définie par l'expression
$$f_2(x) = 2^{3^{\cos(x)}}.$$
3. La fonction f_3 est définie par les expressions
$$\begin{cases} f_3(x) = x^2 \ln(|x|\sqrt{|x|}) \text{ si } x \neq 0 \\ f_3(0) = 0 \end{cases}.$$

Exercice fait en amphi 8.1 (Opérations sur les dérivées)**.** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide. On suppose que f et g sont dérivables en x_0.

1. On fixe des nombres réels λ et μ. Montrer que la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0 et déterminer $(\lambda f + \mu g)'(x_0)$.
2. Montrer que la fonction fg est dérivable en x_0 et déterminer $(fg)'(x_0)$.
3. Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide. On suppose que $u(J) \subset I$. Soit t_0 un point de J. On suppose que la fonction u est dérivable en t_0 et que $u(t_0) = x_0$. Montrer que $f \circ u$ est dérivable en t_0 et déterminer $(f \circ u)'(t_0)$.

Exercice supplémentaire 8.1 (Théorème de Darboux)**.**

1. Soient $a < b$ des nombres réels. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. (Indication : faire un dessin.)
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non-vide. En utilisant la question précédente, démontrer que $f'(I)$ est un intervalle, c'est-à-dire que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.