9 Séance 9

Exercice 9.1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x + 1.$$

La fonction f admet-elle un maximum global ? un minimum global ? Si oui, en quel(s) point(s) est-il atteint ?

Exercice 9.2. Soit f la fonction définie par l'expression

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x - 6}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Tracer l'allure du graphe de f, ses asymptotes, ainsi que la tangente au graphe au point d'abscisse 1 dont on déterminera l'équation.
3. Soit a un nombre réel. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.
4. Déterminer $f([0,1])$ et $f^{-1}([0,1])$.

Exercice d'entraînement 9.1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \exp\left(\frac{3}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1\right).$$

La fonction f admet-elle un maximum global ? un minimum global ? Si oui, en quel(s) point(s) est-il atteint ?

Exercice d'entraînement 9.2. Soit f la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x^9 - 9x + 1} \end{array}.$$

1. Soit a un nombre réel. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.
2. Déterminer $f([0,1])$ et $f^{-1}([e, +\infty[)$.

Exercice fait en amphi 9.1 (Extrema locaux et dérivée)**.** Soient $a < b$ des nombres réels, $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle $]a,b[$ et x_0 un point de l'intervalle $]a,b[$. On suppose que la fonction f est dérivable en x_0 et admet un maximum local en x_0. Montrer que $f'(x_0) = 0$.

Exercice fait en amphi 9.2 (Démonstration du théorème des accroissements finis)**.** Soient $a < b$ deux nombres réels. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct et on note A et B les points du plan de coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

1. Déterminer une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ affine telle que la droite (AB) a pour équation $y = h(x)$.
2. On note g la fonction définie sur $[a,b]$ par

   $$\forall x \in [a,b],\ g(x) = f(x) - h(x).$$

   Appliquer le théorème de Rolle à g. Qu'en déduit-on ?

Exercice supplémentaire 9.1 (Égalité de Taylor-Lagrange)**.** Soient $a < b$ des nombres réels. Soit f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ telle que la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe un nombre réel c dans l'intervalle $]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

On pourra appliquer le théorème de Rolle à une fonction de la forme

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \lambda,$$

où λ est un paramètre réel bien choisi.

10 Séance 10

Exercice 10.1 (Recollement de fonctions)**.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad f(x) &= 2x + e^{-\frac{1}{x^2}} \\ f(0) &= \gamma \\ \forall x < 0, \quad f(x) &= \tfrac{x^2+\alpha x+\beta}{1-x}, \end{aligned}$$

où α, β et γ sont des paramètres réels qui seront déterminés dans l'exercice.

1. Déterminer des paramètres α, β et γ de sorte que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser le théorème de prolongement de la dérivée.
2. La fonction f admet-elle un minimum global ? un maximum global ? Le cas échéant, préciser en quel(s) point(s) il est atteint.

Exercice 10.2 (Fonctions de classe C^∞)**.** Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x^3)$ est de classe C^∞. Indication : on pourra montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, f est n fois dérivable et, la dérivée n-ième de f est de la forme $P_n(x)\cos(x^3) + Q_n(x)\sin(x^3)$, où P_n et Q_n sont deux fonctions polynomiales.

Exercice d'entraînement 10.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, \quad f(x) &= (x-\beta)^2 - 2 \\ \forall x < 0, \quad f(x) &= \alpha\sin(x), \end{aligned}$$

où α et $\beta > 0$ sont des paramètres réels qui seront déterminés dans l'exercice.

1. Déterminer α et β de sorte que la fonction f soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f admet-elle un minimum global ? un maximum global ? Le cas échéant, préciser en quel(s) point(s) il est atteint.

Exercice d'entraînement 10.2. Montrer à l'aide d'une récurrence que la fonction $f : x \mapsto e^{x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice fait en amphi 10.1. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Montrer que la fonction f est croissante sur I si et seulement si, pour tout point x de I, $f'(x) \geq 0$.

Exercice fait en amphi 10.2 (Prolongement de la dérivée)**.** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide et x_0 un point de I qui n'est pas une borne de I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$. En utilisant la définition du nombre dérivé et le théorème des accroissements finis, montrer que la fonction f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = l$.

Exercice supplémentaire 10.1 (Fonctions plateaux)**.** On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'existence d'une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $]-1,1[$ et strictement positive sur $]-1,1[$.
3. En déduire l'existence d'une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $]-2,2[$ et strictement positive sur $]-2,2[$ et qui est constante égale à 1 sur $[-1,1]$.

Exercice supplémentaire 10.2 (Formule de Leibniz)**.** Soit $n \geq 1$ un entier. Soient f et g des fonctions n fois dérivables sur un intervalle I d'intérieur non-vide de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que le produit fg est n fois dérivable et que

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

2. Soit $h : J \to I$, une fonction n fois dérivable sur un intervalle J d'intérieur non-vide. Montrer que $f \circ h$ est n fois dérivable.

11 Séance 11

Exercice 11.1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+2x+3. \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [2,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2+2x+3. \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{rcl} [-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+2x+3. \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^7+x. \end{array}$$

Exercice 11.2. Soit f la fonction définie par l'expression

$$f(x) = \frac{x+2}{2x+3}.$$

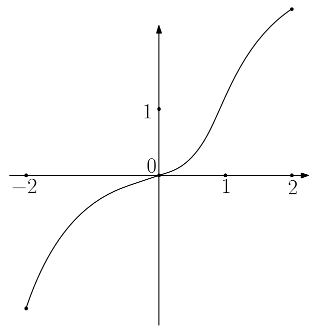
1. Déterminer l'ensemble de définition A de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de A sur un ensemble B à déterminer de deux manières différentes
   (a) à l'aide d'une étude de fonction.
   (b) en résolvant directement une équation de la forme $y = f(x)$.

Exercice d'entraînement 11.1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0,2] \\ x & \mapsto & \cos(x)+1. \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5. \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+x}. \end{array}$$

La fonction $f_4 : [-2,2] \to \mathbb{R}$ donnée par le graphe suivant.



Exercice fait en amphi 11.1 (Dérivabilité de l'application réciproque : démonstration)**.** Soit $f : I \to f(I)$ une fonction strictement monotone et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non-vide. On suppose que

$$\forall x \in I, f'(x) \neq 0.$$

Montrer, en utilisant la définition du nombre dérivé, que l'application $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable sur $f(I)$ et, pour tout point x de l'intervalle $f(I)$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Exercice supplémentaire 11.1. Soit $u : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F. On suppose qu'il existe une application $v : F \to E$ telle que $u \circ v = Id_F$ et $v \circ u = Id_E$.

1. Montrer que l'application u est bijective d'application réciproque v.
2. Le résultat reste-t-il vrai si l'on suppose seulement que $u \circ v = Id_F$ ou que $v \circ u = Id_E$? Sinon, que peut-on dire de u sou chacune de ces deux hypothèses ?

12 Séance 12

Exercice 12.1. 1. Calculer, pour $x \in [-1,1]$, $\cos(\arccos(x))$.

2. Calculer, pour $x \in [-\pi, 3\pi]$, $\arccos(\cos(x))$.

Exercice 12.2 (La fonction arctangente)**.** On rappelle que la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

1. En utilisant le tableau des variations de la fonction tan établi lors de l'exercice 2.1, montrer que la fonction tangente réalise une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle arctan la bijection réciproque de cette bijection.
2. Montrer que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.
3. Tracer l'allure du graphe de arctan à l'aide de l'allure du graphe de tan.
4. Calculer $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\arctan(1)$ et $\arctan(\sqrt{3})$.
5. Montrer que
$$\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 12.3 (Les fonctions racines n-ièmes pour n impair)**.** Soit n un entier impair.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction $\sqrt[n]{\cdot} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la bijection réciproque de cette application.
2. Tracer l'allure du graphe de $\sqrt[3]{\cdot}$ et $\sqrt[5]{\cdot}$.
3. Montrer que $\sqrt[n]{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa fonction dérivée (en utilisant un résultat obtenu lors de la séance 7, on peut montrer que cette fonction n'est pas dérivable en 0).

Exercice d'entraînement 12.1. Calculer, pour $x \in [-\frac{7\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(x))$.

Exercice d'entraînement 12.2. On rappelle que les fonctions cosh et sinh sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

et

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. En utilisant les résultats de l'exercice 3.1, montrer que le sinus hyperbolique réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et que le cosinus hyperbolique réalise une bijection de A vers $[1, +\infty[$, où A est un intervalle qui contient le point 1 à déterminer. On note argsh et argch les bijections réciproques respectives de ces bijections.
2. En utilisant le théorème de dérivation des fonctions réciproques, sur quels ensembles peut-on dire que les fonctions argch et argsh sont dérivables ? Calculer leurs fonctions dérivées (on pourra utiliser la formule $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ établie dans l'exercice 3.1).

Exercice fait en amphi 12.1 (Dérivabilité de la fonction exponentielle)**.** En utilisant le théorème de dérivabilité des applications réciproques, montrer que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\exp' = \exp$.

Exercice fait en amphi 12.2 (Dérivabilité des fonctions arccos et arcsin)**.** En utilisant le théorème de dérivabilité des applications réciproques, montrer que la fonction arccosinus est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa fonction dérivée. Même question pour la fonction arcsinus.

Exercice supplémentaire 12.1. En résolvant directement l'équation $y = \cosh(x)$ et $y = \sinh(x)$ donner une expression de $\operatorname{argsh}(x)$ et $\operatorname{argch}(x)$ à l'aide des fonctions logarithme népérien et exponentielle.