Option mathématique 3 : l'essentiel du cours

Emmanuel Militon

Chapitre 1

Équations différentielles linéaires

Dans cette parties, on note I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On note $a : I \to \mathbb{K}$, $b : I \to \mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues. Une *équation différentielle linéaire d'ordre 1* est une équation de la forme

$$(E) \quad c(t)y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

Ici, la fonction inconnue est notée y. Cette notation est traditionnelle en maths. La variable est parfois notée t, parfois notée x (la variable t est utilisée pour représenter le temps). Parfois, on n'écrit pas la dépendance de la fonction inconnue y en la variable. L'équation (E) se réécrit donc $c(t)y' + a(t)y = b(t)$.

Définition 1.1.1 (Solutions d'une équation différentielle)**.** *Une solution sur I de l'équation différentielle (E) est une fonction $\varphi : I \to \mathbb{K}$ dérivable telle que*

$$\forall t \in I, c(t)\varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = b(t).$$

On va maintenant étudier plus spécifiquement le cas où $c = 1$ (on peut se ramener à ce cas lorsque c ne s'annule pas en divisant par c). On veut donc étudier l'équation différentielle

$$(E_1) \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

La fonction b est appelée le *second membre* de cette équation. Lorsque le second membre est nul ($b = 0$), une telle équation est dite *homogène*. L'équation

$$(E_1^0) \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

est appelée l'*équation homogène associée à* (E_1).

Exemple 1.1.2. *Voir exo 1.1.*

On note $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive sur I de a. On peut prendre $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$, avec $t_0 \in I$.

Théorème 1.1.3 (Solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 1)**.** *L'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle (E_1^0) est l'ensemble des fonctions de la forme*

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & Ce^{-A(t)}, \end{array}$$

où C est une constante réelle.

Exemple 1.1.4. *Voir exos 1.2 et 1.3.*

Démonstration. Voir exo 1.7. □

Voici une proposition utile pour déterminer les solutions de (E_1), une fois que l'on connaît les solutions de (E_1^0).

Proposition 1.1.5 (Solution générale de l'équation= solution particulière de l'équation + solution générale de l'équation homogène associée)**.** *Supposons que l'on connaisse une solution $y_0 : I \to \mathbb{K}$ de l'équation (E_1) sur I. L'ensemble des solutions de (E_1^0) est alors l'ensemble des fonctions de la forme $y_0 + y_h$, où y_h décrit l'ensemble des solutions de (E_1^0), l'équation homogène associée à (E_1).*

Cette proposition signifie que, si l'on connait *une seule* solution de l'équation (E_1), alors on en connaît *toutes* les solutions en utilisant la proposition ci-dessus et le théorème 1.1.3.

Exemple 1.1.6. *Voir exo 1.3.1.*

Démonstration. Voir exo 1.8. □

Pour trouver une solution particulière, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante.

Méthode de la variation de la constante. On cherche une solution y_0 de (E_1) sous la forme $y_0(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ (on fait « varier » la constante qui apparait dans le théorème 1.1.3, au sens où on la fait dépendre de t). Comme $y'(t) + a(t)y(t) = \lambda'(t)e^{-A(t)}$, il suffit pour trouver une solution particulière de (E_1) de trouver une solution λ de l'équation $\lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t)$: il suffit de prendre pour λ une primitive de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$.

Exemple 1.1.7. *Voir exos 1.3.2 et 1.4.*

1.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On note a et b des éléments de $\mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On s'intéresse ici aux équations différentielles de la forme

$$(E_2) \quad y'' + ay' + by = c(t).$$

La fonction c est appelée le *second membre* de cette équation. Lorsque la fonction c est la fonction nulle, on dit que l'équation est *homogène.* L'*équation homogène associée à* (E_2) est l'équation différentielle

$$(E_2^0) \quad y'' + ay' + by = 0.$$

Définition 1.2.1 (Solutions d'une équation différentielle)**.** *Une solution sur I de l'équation différentielle (E_2) est une fonction $\varphi : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable telle que*

$$\forall t \in I, \varphi''(t) + a\varphi'(t) + b\varphi(t) = c(t).$$

Exemple 1.2.2. *Voir exo 2.1.*

Théorème 1.2.3 (Solutions à valeurs complexes d'une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants)**.** *On suppose que $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. L'équation $r^2 + br + a = 0$ est appelée l'*équation caractéristique associée à (E_2^0).

- *Si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2, alors l'ensemble des solutions de (E_2^0) sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions de la forme*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} \end{array},$$

  où C_1 et C_2 sont des constantes complexes.

— *Si l'équation caractéristique admet une seule solution complexe r, alors l'ensemble des solutions de (E_2^0) sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions de la forme*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (C_1 t + C_2)e^{rt} \end{array},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes complexes.

Exemple 1.2.4. *Voir exo 2.2.*

Démonstration. Voir exo 2.5. □

Théorème 1.2.5 (Solutions à valeurs réelles d'une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants)**.** *On suppose que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.*

— *Si l'équation caractéristique associée à (E_2^0) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors l'ensemble des solutions de (E_2^0) sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles est l'ensemble des fonctions de la forme*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \end{array},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

— *Si l'équation caractéristique associée à (E_2^0) admet une seule solution r (qui est nécessairement réelle), alors l'ensemble des solutions de (E_2^0) sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles est l'ensemble des fonctions de la forme*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (C_1 t + C_2)e^{rt} \end{array},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

— *Si l'équation caractéristique associée à (E_2^0) admet deux solutions complexes conjuguées $\gamma + i\delta$ et $\gamma - i\delta$, alors l'ensemble des solutions de (E_2^0) sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles est l'ensemble des fonctions de la forme*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{\gamma t}(C_1 \cos(\delta t) + C_2 \sin(\delta t)) \end{array},$$

La méthode de la variation de la constante (en cherchant une solution particulière sous la forme $\lambda(t)e^{rt}$, où r est une solution de l'équation caractéristique), ainsi que la proposition selon laquelle une solution générale de (E_2) est la somme d'une solution particulière de (E_2) et d'une solution générale de l'équation (E_2^0) restent valable dans le cadre des équations différentielles d'ordre 2.

Exemple 1.2.6. *Voir exo 2.3.*

Chapitre 2

Séries entières

2.1 Rappels sur les séries numériques

2.1.1 Généralités sur les séries

Définition 2.1.1 (Série de complexes et convergence)**.** *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes. On appelle* série de terme général a_n *et on note* $\sum a_n$ *la suite* $(\sum_{n=0}^{N} a_n)_{N\in\mathbb{N}}$*. Pour* $N \in \mathbb{N}$*, le nombre* $\sum_{n=0}^{N} a_n$ *est appelé somme partielle d'ordre* N *de la série* $\sum a_n$*. On dit que la série* $\sum a_n$ converge *si la suite* $(\sum_{n=0}^{N} a_n)_{N\in\mathbb{N}}$ *converge. Dans ce cas, la limite de cette suite est notée* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *et est appelée la* somme *de la série* $\sum a_n$*. Si la série* $\sum a_n$ *ne converge pas, on dit qu'elle diverge.*

Dans le cadre de ce cours, pour éviter les confusions entre série (qui représente une suite) et somme d'une série (qui est un nombre complexe), on notera $\sum a_n$ la série de terme général a_n et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ la somme de cette série.

Parfois, on considérera des suites $(a_n)_{n\geq n_0}$ qui ne sont définies qu'à partir d'un certain rang n_0. Dans ce cas, on notera la série de terme général a_n sous la forme $\sum_{n\geq n_0} a_n$ et on notera sa somme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate des théorèmes d'opérations sur les limites.

Proposition 2.1.2 (Combinaison linéaire de séries numériques)**.** *Soient* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *des séries de nombres complexes. Soient* λ *et* μ *des nombres complexes. Si les séries* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *convergent, alors la série* $\sum \lambda a_n + \mu b_n$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Proposition 2.1.3 (Divergence grossière)**.** *Soit* $\sum a_n$ *une série de complexes.*
Si la série $\sum a_n$ *converge, alors la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0*.*
Par contraposée, si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* 0*, alors la série* $\sum a_n$ *diverge. Dans ce cas, on dit que la série* $\sum a_n$ *diverge grossièrement.*

La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse : comme on le rappellera plus tard, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge alors que son terme général converge vers 0.

Proposition 2.1.4 (Modification d'un nombre fini de termes d'une série)**.** *La nature d'une série de complexes ne change pas si on en change un nombre fini de termes. Autrement dit, si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux suites qui ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors la série* $\sum a_n$ *converge si et seulement si la série* $\sum b_n$ *converge.*

En particulier, pour $n_0 \in \mathbb{N}$ la série $\sum a_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ converge.

Proposition 2.1.5 (Séries géométriques)**.** *Soit* $a \in \mathbb{C}$*. La série* $\sum a^n$ *converge si et seulement si* $|a| < 1$*. Dans ce cas, la somme de cette série est* $\frac{1}{1-a}$*.*

2.1.2 Séries de réels positifs

Proposition 2.1.6 (Convergence d'une série de réels positifs)**.** *Une série* $\sum a_n$ *de réels positifs converge si et seulement si la suite* $(\sum_{n=0}^{N} a_n)_{N\in\mathbb{N}}$ *des sommes partielles est majorée. Dans le cas où cette suite n'est pas majorée, elle a pour limite* $+\infty$ *lorsque* $N \to +\infty$*.*

Proposition 2.1.7 (Comparaison de séries de réels positifs)**.** *Soient* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *des séries de réels positifs.*

1. *Si* $a_n = O(b_n)$ *et si la série* $\sum b_n$ *converge, alors la série* $\sum a_n$ *converge.*
2. *Si* $a_n = O(b_n)$ *et si la série* $\sum a_n$ *diverge, alors la série* $\sum b_n$ *diverge.*
3. *Si* $a_n \sim b_n$*, alors les séries* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *ont même nature.*

Proposition 2.1.8 (Séries de Riemann)**.** *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*. La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > -1$*.*

Définition 2.1.9 (Suite non-lacunaire)**.** *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite non-lacunaire si ses termes sont non-nuls à partir d'un certain rang. Autrement dit, il existe un rang* $N \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout entier* $n \geq N$*,* $u_n \neq 0$*.*

Proposition 2.1.10 (Critère de d'Alembert)**.** *Soit* $\sum a_n$ *une série de réels positifs. On suppose que la suite* (a_n) *est non-lacunaire et que la suite* (a_{n+1}/a_n) *converge vers une limite* L*.*

1. *Si* $L < 1$*, alors la série* $\sum a_n$ *converge.*
2. *Si* $L > 1$*, alors la série* $\sum a_n$ *diverge.*

2.1.3 Séries de complexes

Définition 2.1.11 (Convergence absolue)**.** *Une série de complexes* $\sum a_n$ *converge absolument si la série de réels positifs* $\sum |a_n|$ *converge.*

La proposition suivante permet, dans la grande majorité des cas, de ramener l'étude de la convergence d'une série de complexes à l'étude de la convergence d'une série de réels positifs.

Théorème 2.1.12 (Convergence absolue $\Rightarrow$ Convergence)**.** *Si une série de complexes converge absolument, alors elle converge.*

Définition 2.1.13. *Une série de réels* $\sum a_n$ *est dite alternée si :*

1. *soit, pour tout entier* n*,* $a_n = (-1)^n |a_n|$*.*
2. *soit, pour tout entier* n*,* $a_n = (-1)^{n+1} |a_n|$*.*

Théorème 2.1.14 (Théorème des séries alternées)**.** *Soit* $\sum a_n$ *une série alternée. On suppose que la suite* $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et converge vers* 0*. Alors la série* $\sum a_n$ *converge et sa somme* S *a même signe que* a_0*. De plus,* $|S| \leq |a_0|$*.*

Définition 2.1.15 (Produit de Cauchy de séries numériques). *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries de complexes. Le produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est la série numérique $\sum c_n$ avec*

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

Théorème 2.1.16 (Produit de Cauchy de séries absolument convergentes). *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries de complexes. Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est absolument convergent et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n).$$

2.2 Séries entières et rayon de convergence

2.2.1 Généralités sur les séries entières

Définition 2.2.1. *On appelle série entière d'une variable complexe une série de fonctions $\sum f_n$, où, pour tout n, la fonction f_n est de la forme*

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a_n z^n \end{array},$$

où $a_n \in \mathbb{C}$. Une telle série entière est notée $\sum a_n z^n$.

On prenant des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ au lieu de fonctions définies sur $\mathbb{C}$, on obtient des séries entières d'une variable réelle. Une série entière d'une variable complexe est notée $\sum a_n z^n$, la lettre z désignant par convention la variable. Par contre, si l'on a fixé un nombre complexe z particulier au préalable, $\sum a_n z^n$ désigne une série numérique. Pour les séries entières d'une variable réelle, la convention est de noter la variable t ou x. Ainsi $\sum a_n x^n$ ou $\sum a_n t^n$ désigne une série entière d'une variable réelle.

Une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^{2n}$ n'est pas à proprement parler une série entière puisque le terme d'ordre n est de degré $2n$ mais on désignera de cette manière la série entière $\sum b_n z^n$, avec $b_n = 0$ si n est impair et $b_n = a_{n/2}$ si n est pair. Le même type de convention s'appliquera aux séries entières de la forme $\sum a_n z^{\varphi(n)}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une injection.

Identification polynômes-séries entières. Si $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_d z^d$ est un polynôme, on l'identifiera avec la série entière $\sum a_n z^n$ en posant $a_n = 0$ si $n > d$.

2.2.2 Définition du rayon de convergence

Lemme 2.2.2 (Lemme d'Abel). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe. On suppose qu'il existe un nombre complexe z_0 tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors, pour tout nombre complexe z avec $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge.*

Théorème 2.2.3 (Définition du rayon de convergence). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe. Il existe un unique élément R dans $[0, +\infty]$ avec les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout nombre complexe z avec $|z| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument (donc la suite $(a_n z^n)_n$ converge vers 0 et est bornée).*
2. *Pour tout nombre complexe z avec $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée (donc la suite $(a_n z^n)_n$ ne converge pas vers 0 et la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement).*

Exemple 2.2.4. *Voir exo 4.1.*

Démonstration. Voir exos 4.7 et 4.8. □

Proposition 2.2.5 (Rayon de convergence et multiplication par un scalaire)**.** *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière d'une variable complexe de rayon de convergence* R*. Soit* $C \neq 0$*. La sé rie entière* $\sum C a_n z^n$ *a pour rayon de convergence* R*.*

2.2.3 Critère de d'Alembert

La proposition suivante constitue un moyen pratique de calculer le rayon de convergence d'une série entière dans les cas les plus simples.

Proposition 2.2.6 (Critère de d'Alembert pour les séries entières)**.** *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. On suppose que :*

1. *La suite* $(a_n)_n$ *est non lacunaire.*
2. *La suite* $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_n$ *a une limite* $L \in [0, +\infty]$*.*

Alors $R = \frac{1}{L}$ *(avec la convention* $\frac{1}{0} = +\infty$ *et* $\frac{1}{+\infty} = 0$*).*

Exemple 2.2.7. *Voir exo 4.2.*

Démonstration. Voir exo 4.9. □

Lorsque la suite $(a_n)_n$ est lacunaire, on peut dans certains cas appliquer directement le critère de d'Alembert pour les séries numériques pour pouvoir calculer le rayon de convergence de la série entière (cf exo 4.3).

2.2.4 Rayon de convergence et relations de comparaison

Proposition 2.2.8 (Rayon de convergence et comparaison)**.** *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *des séries entières de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b*.*
Si $|a_n| = O(|b_n|)$*, alors* $R_a \geq R_b$*.*
Si $|a_n| \sim |b_n|$*, alors* $R_a = R_b$*.*

Exemple 2.2.9. *Voir exo 4.4.*

Démonstration. Voir exo 4.10. □

2.2.5 Rayon de convergence et opérations

Proposition 2.2.10 (Rayon de convergence et somme)**.** *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *des séries entières de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b*. Notons* R_{a+b} *le rayon de convergence de la série entière* $\sum (a_n + b_n) z^n$*.*

1. $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$*.*
2. *Si* $R_a \neq R_b$*, alors* $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$*.*

Exemple 2.2.11. *Voir exo 4.5.*

Démonstration. Voir exo 4.11. □

Définition 2.2.12 (Produit de Cauchy de séries entières)**.** *Le* produit de Cauchy *des séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *est la série entière* $\sum c_n z^n$ *définie par :*

$$\forall n, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{p,q\geq 0,\ p+q=n} a_p b_q.$$

Proposition 2.2.13 (Rayon de convergence et produit de Cauchy)**.** *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *des séries entières de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b*. Notons* R_{ab} *le rayon de convergence de leur produit de Cauchy* $\sum c_n z^n$*. Alors* $R_{ab} \geq \min(R_a, R_b)$ *et, pour tout nombre complexe* z *dans le disque ouvert de centre* 0 *et de rayon* $\min(R_a, R_b)$*, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n).$$

Exemple 2.2.14. *Voir exo 4.6.*

Démonstration. Voir exo 4.12. □

2.3 Rappel sur les séries de fonctions

2.3.1 Deux types de convergence

On fixe une partie $A \subset \mathbb{C}$.

Définition 2.3.1 (Série de fonctions)**.** *Une série de fonctions* $A \to \mathbb{C}$ *est une suite de fonctions de la forme* $(\sum_{n=0}^{N} f_n)_{N\in\mathbb{N}}$*, où, pour tout entier* n*,* f_n *désigne une fonction* $A \to \mathbb{C}$*. Une telle série de fonctions est notée* $\sum f_n$*.*

Dans toute la suite, on fixe une série $\sum f_n$ de fonctions $A \to \mathbb{C}$. La définition suivante présente la notion la plus intuitive de convergence d'une série de fonctions.

Définition 2.3.2 (Convergence simple d'une série de fonctions)**.** *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ converge simplement *sur* A *si, pour tout nombre complexe* z *dans* A*, la série numérique* $\sum f_n(z)$ *converge. Dans ce cas, on appelle* somme *sur* A *de la série de fonctions* $\sum f_n$ *la fonction*

$$S : \begin{array}{ll} A & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) \end{array}.$$

Exemple 2.3.3. *Voir exo 5.1.*

La définition ci-dessus est intuitive mais ne présente pas de propriété vraiment intéressante (voir la partie sur la continuité et la dérivation d'une somme de séries de fonctions).

Définition 2.3.4 (Convergence normale)**.** *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ converge normalement *sur* A *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour tout entier* n*, la fonction* f_n *est bornée sur* A*.*
2. *La série numérique* $\sum \|f_n\|_{\infty,A}$ *converge, où pour tout entier* n *:*

$$\|f_n\|_{\infty,A} = \sup_{z\in A} |f_n(z)|\,.$$

Exemple 2.3.5. *Voir exos 5.2 et 5.3.*

Proposition 2.3.6 (Convergence normale $\Longrightarrow$ Convergence simple)**.** *Si la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge normalement sur* A*, alors elle converge simplement sur* A*.*

Exemple 2.3.7. *La réciproque est fausse (voir exo 5.3).*

Démonstration. Voir exo 5.6. □

Il y a une troisième notion de convergence des séries de fonctions, appelée *convergence uniforme* qui est intermédiaire entre la convergence simple et la convergence normale des séries de fonctions. Cette notion a été vue l'année dernière et, comme on n'en a pas vraiment besoin dans le cadre de ce cours, on ne la rappellera pas.

2.3.2 Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Continuité

On fixe toujours une partie $A \subset \mathbb{C}$ et une série $\sum f_n$ de fonctions $A \to \mathbb{C}$.

Théorème 2.3.8 (Continuité de la somme d'une série de fonctions)**.** *On suppose que*

1. *pour tout entier n, la fonction f_n est continue sur A ;*
2. *la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A.*

Alors la fonction

$$S : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array}$$

est bien définie et continue.

L'hypothèse de convergence normale dans le théorème précédent peut être remplacée par une hypothèse de convergence uniforme.

Exemple 2.3.9. *Voir exo 5.4.*

Démonstration. Voir exo 5.7. □

Primitive

Théorème 2.3.10 (Primitive d'une somme de série de fonctions)**.** *Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in [a, b]$. On note $\sum f_n$ une série de fonctions définies et continues sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.*
On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$. Alors la série de fonctions $\sum x \mapsto \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ converge normalement sur $[a, b]$ et

$$\forall x \in [a, b], \quad \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt.$$

Remarquer que le membre de gauche de l'inégalité ci-dessus est la primitive de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sur $[a, b]$ qui s'annule en x_0. Là encore, l'hypothèse de convergence normale dans le théorème précédent peut être remplacée par une hypothèse de convergence uniforme.

Démonstration. Voir exo 5.8. □

Dérivée

Théorème 2.3.11 (Dérivation d'une somme de série de fonctions)**.** *Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in [a, b]$. On note $\sum f_n$ une série de fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que*

1. *la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a, b]$.*
2. *la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b]$.*

Alors la somme S de la série de fonctions $\sum f_n$ est de classe C^1 sur $[a, b]$ et

$$\forall x \in [a, b], \;\; S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

Encore une fois, l'hypothèse de convergence normale dans le théorème précédent peut être remplacée par une hypothèse de convergence uniforme.

Exemple 2.3.12. *Voir exo 5.5.*

Démonstration. Voir exo 5.8. □

2.4 Propriétés de la somme d'une série entière

Proposition 2.4.1 (Convergence normale d'une série entière)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout réel ρ avec $0 < \rho < R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon ρ.*

Démonstration. Voir exo 5.2. □

De cette proposition et des théorèmes rappelés dans la section précédente, on déduit les deux propositions suivantes.

Proposition 2.4.2 (Continuité de la somme d'une série entière)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme est bien définie et continue sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R.*

Proposition 2.4.3 (Primitive de la somme d'une série entière)**.** *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ de somme S. Alors la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ a pour rayon de convergence R et la fonction*

$$\begin{array}{rcl}]-R, R[& \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \end{array}$$

est la primitive de S sur $]-R, R[$.

Démonstration. Voir exo 6.5 pour la partie sur le rayon de convergence. □

Proposition 2.4.4 (Dérivée de la somme d'une série entière)**.** *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ de somme S. Alors la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$ a pour rayon de convergence R, la fonction S est dérivable sur $]-R, R[$ de dérivée la fonction*

$$\begin{array}{rcl}]-R, R[& \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \end{array}.$$

Démonstration. Voir exo 6.5. □

Exemple 2.4.5. *Voir exos 6.1, 6.2.*

2.5 Construction de la fonction exponentielle

Ce que l'on a vu sur les séries entières va nous permettre de construire la fonction exponentielle et les fonctions cosinus et sinus. En TD, on va retrouver certaines propriétés déjà vues auparavant de ces fonctions.

2.5.1 Rappel : la formule du binôme de Newton

Théorème 2.5.1 (Formule du binôme de Newton)**.** *Soient a et b des nombres complexes et n un entier naturel. On a*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. Voir exo 7.1. □

2.5.2 La fonction exponentielle

La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. On peut donc définir, pour tout nombre complexe z,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 2.5.2 (Propriétés principales de la fonction exponentielle)**.**

1. *La fonction* $\exp$ *est continue sur* $\mathbb{C}$.
2. *Pour tous nombres complexes z et z', on a* $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.
3. *La restriction à* $\mathbb{R}$ *de* $\exp$ *est à valeurs réelles strictement positives, est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp' = \exp$.

Dans les exercices 7.2 et 7.3, on démontre les propriétés ci-dessus ainsi que d'autres propriétés qui ont été vues lors des années précédentes.

2.5.3 Les fonctions trigonométriques

On définit les fonctions cos et sin sur $\mathbb{C}$ par

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

Pour tout nombre réel θ, $\cos(\theta) = \mathcal{R}e(\exp(i\theta))$ et $\sin(\theta) = \mathcal{I}m(\exp(i\theta))$. Les formules ci-dessus et les propriétés de la fonction exponentielle permettent de retrouver les formules de trigonométries vues les années précédentes (voir exo 7.4). Dans l'exo 7.5, on étudie les restrictions à $\mathbb{R}$ des fonctions cos et sin : on retrouve les tableaux de variation vu lors des années précédentes.

2.6 Développement en série entière

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 2.6.1 (Développement en série entière au voisinage de 0)**.** *On dit que f est* développable en série entière au voisinage de 0 *s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $\geq r$ tels que*

1. $]-r, r[\subset I$;
2. *Pour tout $x \in]-r, r[$,*
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dans ce cas, la série entière $\sum a_n x^n$ est appelée un développement en série entière de f au voisinage de 0.

Exemple 2.6.2. *On a déjà démontré lors de l'exercice 7.2 que les fonctions exponentielles, cosinus et sinus étaient développables en série entière. Les exercices 8.1, 8.2 et 8.3 donnent différentes méthodes pour développer des fonctions en série entière au voisinage de 0. On y voit aussi de nombreux exemples de fonctions développables en série entière au voisinage de 0.*

On fixe un nombre réel a.

Définition 2.6.3 (Développement en série entière au voisinage de a)**.** *On dit que f est* développable en série entière au voisinage de a *s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $\geq r$ tels que*

1. $]a-r, a+r[\subset I$;
2. *Pour tout $x \in]-r, r[$,*
$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n.$$

Dans ce cas, la série entière $\sum a_n x^n$ est appelée un développement en série entière de f au voisinage de a.

Remarquons que f est développable en série entière au voisinage de a si et seulement si $h \mapsto f(a+h)$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Exemple 2.6.4. *Voir exo 8.4.*

Proposition 2.6.5 (Unicité du développement en série entière)**.** *Supposons que f soit développable en série entière au voisinage de a et qu'un développement en série entière de f au voisinage de a soit donné par la série entière $\sum a_n x^n$. Alors f est de classe C^∞ au voisinage de a (sur un intervalle ouvert contenant a) et, pour tout entier n,*
$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n$ est appelée la *série de Taylor de f en a.*

Démonstration. Voir exo 8.5. □

Exemple 2.6.6. *L'exercice 8.6 donne un exemple de fonction qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.*

Chapitre 3

Systèmes différentiels linéaires

3.1 Systèmes différentiels linéaires : généralités

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On note

$$A: \begin{array}{ccc} I & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & (a_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n} \end{array}$$

une application continue, c'est-à-dire que chaque coefficient $a_{i,j}$ définit une fonction continue $I \to \mathbb{R}$. On note

$$B: \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

une application continue.

Un *système différentiel linéaire* d'inconnues les fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1'(t) & = & a_{11}(t)x_1(t) & + & a_{12}(t)x_2(t) & + & \ldots & + & a_{1n}(t)x_n(t) & + & b_1(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}(t)x_1(t) & + & a_{22}(t)x_2(t) & + & \ldots & + & a_{2n}(t)x_n(t) & + & b_2(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}(t)x_1(t) & + & a_{n2}(t)x_2(t) & + & \ldots & + & a_{nn}(t)x_n(t) & + & b_n(t) \end{array} \right. .$$

En posant

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

le système différentiel se réécrit

$$(S) \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

La fonction B est appelée le *second membre* du système différentiel (S). Lorsque ce second membre est l'application nulle, le système différentiel est dit *homogène*. Enfin, le système différentiel homogène associé à (S) est le système différentiel

$$(S_0) \quad X'(t) = A(t)X(t).$$

Définition 3.1.1. *Une* solution *sur I du système différentiel (S) est une application $X : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable telle que*

$$\forall t \in I, \ X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

Exemple : Les systèmes différentiels les plus simples à résoudre sont les systèmes triangulaires supérieurs dont on étudie des exemples dans l'exercice 9.1.

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires, on a la proposition suivante

Proposition 3.1.2 (Solution générale de (S)= solution particulière de (S)+ solution générale de (S_0))**.** *Soit $X_0 : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (S). L'ensemble des solutions sur I de (S) est l'ensemble des applications de la forme $X_0 + X_h$, où X_h est une solution sur I de (S_0).*

Démonstration. Voir exo 9.5. □

Le théorème suivant est profond et central dans la théorie des équations différentielles. Sa démonstration est hors de portée au niveau L2.

Théorème 3.1.3 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** *Soient $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Il existe une unique solution sur I au* problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}.$$

Ce théorème signifie que, si l'on fixe une condition initiale, il y a une unique solution de notre système différentiel qui vérifie cette condition initiale. On voit une première application de ce théorème dans l'exercice 9.6. À ce stade, il ne s'agit pas de comprendre ce théorème dans toute sa profondeur. Néanmoins, ce théorème nous sera utile par la suite dans ce cours.

3.2 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

On fixe une matrice A dans $M_n(\mathbb{R})$ et une application $B : I \to \mathbb{R}^n$ continue. On a vu lors de l'exercice 9.1 que de tels systèmes ne sont pas difficiles à résoudre lorsque la matrice A est diagonale ou triangulaire supérieure. Dans le cas d'une matrice A quelconque, la méthode pour résoudre ce type de système consiste à se ramener au cas d'une matrice diagonale ou triangulaire supérieure en diagonalisant/trigonalisant A.

Supposons que l'on dispose d'une base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A (*i.e.* A est diagonalisable). On note λ_i la valeur propre de A associée au vecteur propre u_i. On décompose l'application inconnue X et l'application B suivant cette base : pour tout réel t de I,

$$\begin{array}{l} X(t) = y_1(t)u_1 + y_2(t)u_2 + \ldots + y_n(t)u_n = \sum_{i=1}^n y_i(t)u_i \\ B(t) = c_1(t)u_1 + c_2(t)u_2 + \ldots + c_n(t)u_n = \sum_{i=1}^n c_i(t)u_i \end{array}.$$

Le système différentiel se réécrit alors

$$\sum_{i=1}^n y_i'(t)u_i = A(\sum_{i=1}^n y_i(t)u_i) + \sum_{i=1}^n c_i(t)u_i.$$

En utilisant le fait que u_i est vecteur propre de A de valeur propre associée λ_i, on voit que le système différentiel se réécrit

$$\sum_{i=1}^n (y_i'(t) - \lambda_i y_i(t) - c_i(t))u_i = 0.$$

Comme $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ constitue une base de $\mathbb{R}^n$ (et est donc une famille libre), on est ramené à résoudre les n équations différentielles

$$y_i'(t) - \lambda_i y_i(t) - c_i(t) = 0,$$

pour $1 \leq i \leq n$. On sait résoudre de telles équations, ce qui nous permet de déterminer les solutions de notre système différentiel.Une autre manière de voir cette dernière étape est de dire que, en posant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

et

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix},$$

on s'est ramené à résoudre le système différentiel diagonal

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} Y(t) + C(t).$$

Dans les exercices 9.2 et 9.3, on met en pratique la méthode ci-dessus.

3.3 Retour sur les équations différentielles d'ordre $k \geq 2$.

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ des applications continues d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Notons (E) l'équation différentielle

$$y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

et (S) le système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

où

$$\begin{array}{rccc} B: & I & \to & \mathbb{R}^k \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} A: & I & \to & M_k(\mathbb{R}) \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \dots & \dots & \dots & -a_k(t) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Proposition 3.3.1 (Équivalence équation différentielle d'ordre supérieur et système différentiel d'ordre 1)**.** *Soit $X : I \to \mathbb{R}^k$. L'application X est solution de (S) si et seulement si il existe une solution y de (E) sur I telle que*

$$\forall t \in I,\ X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

On applique ces propositions dans les exos 9.4 et 9.8 de TD et on démontre cette proposition lors de l'exercice 9.7. Notamment, on voit lors de l'exercice 9.8 que si l'on applique la proposition ci-dessus et le théorème de Cauchy-Lipschitz vu plus haut, on obtient le théorème suivant.

Théorème 3.3.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz : cas des équations différentielles d'ordre supérieur). *On fixe des nombres réels $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ et un nombre réel $t_0 \in I$. Il existe une unique solution sur I à valeurs réelles du problème de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{r} y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = b(t) \\ \forall 0 \leq i \leq k-1,\ y^{(i)}(t_0) = y_i \end{array} \right. .$$

3.4 Systèmes différentiels et séries entières

3.4.1 Utilisation des séries entières pour résoudre une équation différentielle

Quand on veut résoudre une équation différentielle à coefficients polynômiaux, on peut chercher une solution particulière de cette équation sous forme de somme de série entière.

Plus précisément, supposons que l'on cherche une solution particulière f d'une équation différentielle.

Étape 1 On pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et on suppose que f est bien définie sur un voisinage de 0 et est solution de notre équation différentielle. Lorsque l'on injecte le développement en série entière de f dans l'équation, cela nous donne une relation de récurrence sur les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Étape 2 Si possible, déterminer une suite $(a_n)_n$ explicite non-nulle qui vérifie la relation de récurrence.

Étape 3 Déterminer le rayon de convergence de la série obtenue pour vérifier que la série entière définit bien une fonction solution de l'équation différentielle.

Ensuite, on peut appliquer la méthode de la variation de la constante pour déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle.

L'exercice 10.1 est un exemple d'application de cette méthode.

3.4.2 Application des équations différentielles au développement en série entière

Supposons que l'on veuille démontrer qu'une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0. Lorsque les méthodes standards ont échoué, on peut recourir à la méthode suivante.

Étape 1 Montrer que f est solution au voisinage de 0 d'une équation différentielle à coefficients polynomiaux. Pour ce faire, on calcule f' et on essaie de trouver une relation entre f et f'. Si cela échoue, on calcule f'' et on cherche une relation entre f, f' et f'', etc...

Étape 2 On détermine une fonction g somme de série entière telle que g est solution de l'équation différentielle obtenue lors de la première étape et telle que $g(0) = f(0)$ (et $f'(0) = g'(0)$ dans le cas d'une équation d'ordre 2). Pour ce faire, on a recours à la méthode exposée lors de la section précédente.

Étape 3 Comme f et g sont solutions de la même équation différentielle sur un intervalle ouvert contenant 0 et comme $f(0) = g(0)$ (et $f'(0) = g'(0)$ dans le cas d'une équation d'ordre 2), alors, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $f = g$ sur cet intervalle. Ainsi, la fonction f est développable en série entière et la série entière qui définit g est le développement en série entière de f.

Les exercices 10.2 et 10.3 sont des exemples d'application de cette méthode.