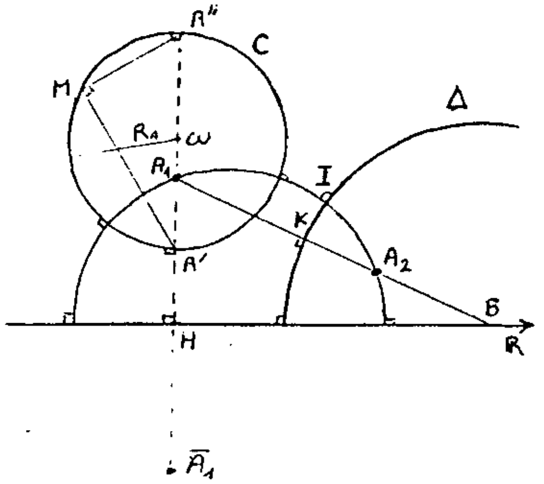
IV) GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

A) CERCLES ET MÉDIATRICES

Dans tout ce chapitre, et le suivant, P est le demi-plan de Poincaré $P=\{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Im}\, z>0\}$ muni de la métrique hyperbolique définie au chapitre III, §B, et notée à présent δ.



Le "cycle" C de centre A_1 et de rayon r, c'est-à-dire le lieu des points à distance $r>0$ de $A_1=x_1+iy_1\in P$ est un cercle du faisceau $\mathcal{F}_{A_1}$ à points limites A_1 et $\bar{A}_1=x_1-iy_1$, c'est-à-dire du faisceau engendré par l'horizon et A_1 ; c'est le cercle de diamètre $A'A''$, avec $A'=x_1+iy_1'$, $A''=x_1+iy_1''$, $y_1'<y_1''$, $y_1'y_1''=y_1^2$, et si H est la projection verticale de A_1 sur $\mathbb{R}$,
$(A_1,A'',\infty,H)=(y_1,y_1'',\infty,0)=e^r$
et $(A',A_1,\infty,H)=(y_1',y_1,\infty,0)=e^r$,
soit $y_1'=y_1e^{-r}$ et $y_1''=y_1e^r$.

Le point $M=x+iy$ appartient à C si et seulement si l'angle $\widehat{A'MA''}$ est droit, soit: $\dfrac{(x-x_1)+i(y-y_1')}{(x-x_1)+i(y-y_1'')}\in i\mathbb{R} \iff (x-x_1)^2+(y-y_1')(y-y_1'')=0$

$$\iff x^2+y^2-2x_1x-(y_1'+y_1'')y+x_1^2+y_1^2=0$$

Le cycle $C=C(A_1,r)$ a donc pour équation cartésienne

$$\boxed{X^2+Y^2-2x_1X-2y_1\,\mathrm{Ch}\,r\,Y+x_1^2+y_1^2=0}$$

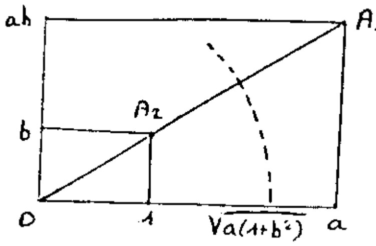
en particulier il est de rayon $R_1=\dfrac{y_1''-y_1'}{2}=y_1\,\mathrm{Sh}\,r$ et centré en $\omega=x_1+iy_1\,\mathrm{Ch}\,r$

On obtient donc l'équation de la médiatrice Δ de A_1A_2, avec $A_2=x_2+iy_2$ en éliminant r entre l'équation ci-dessus de $C(A_1,r)$, et la même écrite pour $C(A_2,r)$; si $y_1\neq y_2$, il vient:

$$\boxed{(y_1-y_2)(X^2+Y^2)-2(x_2y_1-x_1y_2)X+y_1(x_2^2+y_2^2)-y_2(x_1^2+y_1^2)=0}\ (\text{et } Y>0)$$

C'est le cercle du faisceau $\mathcal{F}_{A_1,A_2}$, à points-limites A_1 et A_2, qui est centré sur $\mathbb{R}$

Preuve: Il est clair que les homothéties centrées sur $\mathbb{R}$ et de rapport positif, les translations de vecteur parallèle à $\mathbb{R}$, et les réflexions par rapport à une droite orthogonale à $\mathbb{R}$ sont des isométries de P (elles conservent le birapport qui définit δ) ; par suite, il suffit de vérifier l'assertion lorsque $A_2=1+ib$ et $A_1=a(1+ib)$ avec $a,b>0$, et dans ce cas l'équation



de Δ s'écrit $b(a-1)(X^2+Y^2) = ab(a-1)(1+b^2)$, et il s'agit bien du cercle de rayon $\sqrt{a(1+b^2)}$, moyenne géométrique de $|OA_1|$ et $|OA_2|$. ■

Le centre de Δ est donc $A_1A_2 \cap \mathbb{R} = B$, et son rayon est la moyenne géométrique de $|BA_1|$ et $|BA_2|$, autrement dit Δ est orthogonale au cercle de diamètre A_1A_2, et par suite à tous les cercles passant par A_1 et A_2.

Si $K = \Delta \cap A_1A_2$, on a, si par exemple $BA_1 > BA_2$, $KA_1 = BA_1 - BK$, $KA_2 = BK - BA_2$, et $BK^2 = BA_1 \cdot BA_2$, d'où

$$\frac{KA_1}{KA_2} = \frac{BA_1 - \sqrt{BA_1 \cdot BA_2}}{\sqrt{BA_1 \cdot BA_2} - BA_2} = \sqrt{\frac{BA_1}{BA_2}}$$

Δ est donc encore le lieu des points de P dont le rapport des distances (euclidiennes !) à A_1 et A_2 est la racine carrée de celui de $B = A_1A_2 \cap \mathbb{R}$.

Mais remarquons que le vrai "pied" de la médiatrice Δ n'est pas K, mais le point I intersection de Δ et de la géodésique passant par A et B, "milieu" du "segment" (hyperbolique) A_1A_2 (cf. le début du §D).

Enfin, si par contre $y_1 = y_2$, l'équation de Δ devient : $\boxed{X = \frac{x_1+x_2}{2}}$ (et $Y>0$), et c'est donc la partie dans P de la médiatrice euclidienne, de pied le milieu (euclidien) du segment (euclidien) A_1A_2.

En évaluant r dans l'équation de $C(A_1, r)$ ci-dessus, on obtient, pour la distance hyperbolique de deux points de P, la formule :

$$\boxed{\delta(A_1,A_2) = 2\,\mathrm{Arg\,Sh}\sqrt{\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4y_1y_2}}}$$

qui, par différenciation, redonne l'"élément de longueur" hyperbolique au point $M = x+iy$:

$$\boxed{ds = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}}$$

d'où aussi la valeur de l'"élément d'aire" au même point : $\boxed{\frac{dx\,dy}{y^2}}$

L'équation de la géodésique passant par A_1 et A_2 est :

$$\boxed{(x_1-x_2)(X^2+Y^2) - [(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)]X + x_2(x_1^2+y_1^2) - x_1(x_2^2+y_2^2) = 0} \quad (\text{et } Y>0)$$

(C'est en effet le demi-cercle dans P centré sur $\mathbb{R}$ passant par A_1 et A_2 : son centre est $\frac{(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)}{2(x_1-x_2)}$ et son rayon vaut $\frac{[(y_1^2+y_2^2+(x_1-x_2)^2)^2 - 4y_1^2y_2^2]^{1/2}}{2|x_1-x_2|}$)

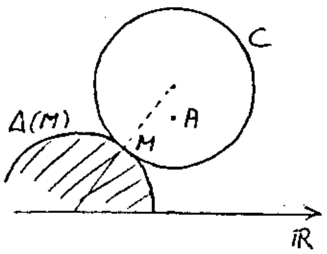
Si $x_1 = x_2$, on trouve la demi-droite $\boxed{X = x_1}$ (et $Y>0$).

Une géodésique découpe P en deux "demi-plans", et la notion de "segment géodésique" $[A_1A_2]$ est claire (puisqu'elle l'est sur toute droite élastique) ; on dispose donc dans P de la notion de convexité, avec toutes ses propriétés habituelles : une région de P est convexe si avec deux points A_1 et A_2 elle contient le segment géodésique $[A_1A_2]$, ou encore si et seulement si c'est une intersection de demi-espaces ;

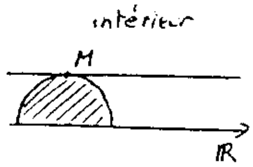
de mêmes : <u>une région de P est convexe si et seulement si elle est connexe et localement convexe</u> (connexe = connexe par arcs ; localement convexe = son intersection avec tout disque assez petit est convexe)

Preuve : c'est bien connu pour le plan euclidien ; comme les segments géodésiques du modèle de Klein sont des segments euclidiens (et que le disque-unité de $\mathbb{C}$ est convexe), c'est donc encore vrai dans le modèle de Klein, donc dans le plan hyperbolique, quel qu'en soit le modèle. ∎

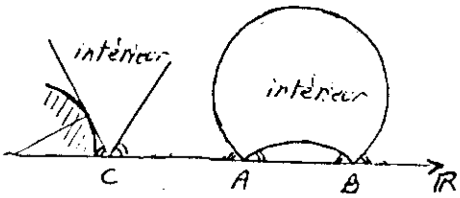
En particulier les <u>disques</u> (pour la distance hyperbolique) sont convexes : en tout point M du cercle C de centre A et de rayon r passe une et une seule géodésique tangente à C, soit $\Delta(M)$, et si $P(M)$ est le demi-plan découpé par $\Delta(M)$ qui contient A, le disque de centre A et de rayon r est $\bigcap_{M \in C} P(M)$



Le même argument s'applique aussi à <u>l'intérieur d'un horocycle</u> : un horocycle est un cercle (euclidien) de P tangent à $\mathbb{R}$, ou une droite (euclidienne) horizontale, c'est-à-dire un cercle tangent à l'horizon au point ∞ ; la description de ce cas dégénéré est plus claire dans le modèle du disque (cf. chapitre III, §B), où les horocycles sont tous les cercles tangents intérieurement à U, que ce soit au point 1 ou ailleurs, et dans ce cas l'intérieur est la partie au dessus de la droite : que l'intérieur de l'horocycle soit l'intersection des demi-plans le contenant découpés par les géodésiques tangentes à l'horocycle, est clair dans ce cas dégénéré ; comme il ne se distingue pas des autres dans le modèle du disque, c'est vrai en général ∎



De même on appellera <u>hypercycle</u> la réunion des arcs $\widehat{AB}$ dans P d'un cercle sécant à $\mathbb{R}$ et de son symétrique par rapport à $\mathbb{R}$, ou, cas dégénéré, de deux demi-droites dans P issues d'un même point C de $\mathbb{R}$ et également penchées sur $\mathbb{R}$ (les deux notions donnent en effet, par l'isométrie h^{-1} du § III.B, la même figure : les arcs dans le disque de Poincaré D de deux cercles sécants à U et qui s'échangent dans l'inversion dont le cercle des points fixes est U ; le cas dégénéré s'obtient quand l'un des points de ces cercles sur U est 1). L'intérieur d'un hypercycle est la <u>lunule</u> entre les deux arcs, le secteur conique dans le cas dégénéré.



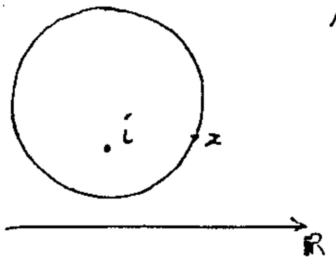
Que <u>l'intérieur d'un hypercycle soit convexe</u> est clair dans le cas dégénéré (cf. figure), et donc vrai dans le cas général.

B) LE GROUPE DES ISOMÉTRIES

Il est clair (et on a déjà utilisé à la page 17) que les homothéties centrées sur $\mathbb{R}$ et de rapport positif, et les translations de vecteur parallèle à $\mathbb{R}$ sont des isométries directes (conservant les angles orientés) du demi-plan de Poincaré, tandis que les réflexions orthogonales par rapport aux demi-droites verticales sont des isométries indirectes (opposant les angles orientés) ; il existe une autre famille d'isométries "évidentes" : les "rotations".
Dans le modèle du disque de Poincaré $\mathcal{D}$, il est clair en effet que toute rotation (euclidienne) de centre O, c'est-à-dire $u \mapsto ue^{i\theta}$ est une isométrie de $\mathcal{D}$ pour la métrique hyperbolique ; transportée par l'homographie h du III.B dans le demi-plan, on obtient la "rotation" hyperbolique de centre $i = h(0)$:

$$z \mapsto r_\theta(z) = i \cdot \frac{1+\frac{z-i}{z+i}e^{i\theta}}{1-\frac{z-i}{z+i}e^{i\theta}} = \frac{i\left(z+i\,\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\right)}{z\cdot\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}+i} = \frac{z+\operatorname{Tg}\theta/2}{1-z\operatorname{Tg}\theta/2} = \frac{z\cos\theta/2+\sin\theta/2}{\cos\theta/2-z\sin\theta/2}$$

On a $\arg\left(\frac{r_\theta(z)-i}{r_\theta(z)+i}\right) = \theta + \arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$, tandis que $\left|\frac{r_\theta(z)-i}{r_\theta(z)+i}\right| = \left|\frac{z-i}{z+i}\right|$,
et quand θ croît de 0 à 2π, $r_\theta(z)$ décrit dans le sens direct le cercle (hyperbolique) de centre i passant par z.



Plus généralement, soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels, de déterminant 1, et h_M l'homographie de $\overline{\mathbb{C}}$ de matrice M : $z \mapsto h_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (h_M ne définit M qu'au signe près, et on note $PSL_2(\mathbb{R})$ le groupe de ces homographies) ; alors

h_M est une isométrie de P :

Preuve : h_M est une homographie de la droite complexe $\overline{\mathbb{C}}$, donc bijective et continue. De plus sa restriction à $\overline{\mathbb{R}}$ est une homographie de la droite projective réelle, donc bijective de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$. Comme

$$\operatorname{Im}\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} > 0 \text{ si } \operatorname{Im} z > 0,$$

on a $h_M(P) \subset P$, et h_M est donc une bijection de P. Comme h_M est une homographie, pour deux points $z, z' \in P$, si p et q sont les horizons (sur $\mathbb{R}$) de la géodésique Δ passant par z et z', $h_M(\Delta)$ est un arc de cercle passant par $h_M(z)$ et $h_M(z')$, et orthogonal en $h_M(p)$ et $h_M(q)$ à $h_M(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$:

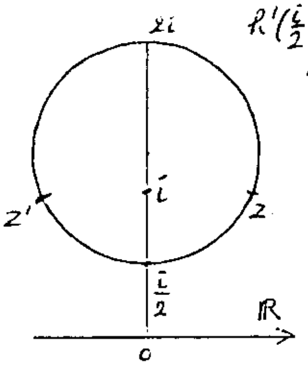
c'est donc la géodésique passant par $h_M(z)$ et $h_M(z')$; par suite :

$$\delta(h_M(z), h_M(z')) = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(h_M(z), h_M(z'), h_M(q), h_M(p)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(z, z', q, p) = \delta(z, z'). \ \blacksquare$$

On va démontrer que toute isométrie (hyperbolique) de P est une homographie de $PSL_2(\mathbb{R})$, ou sa composée avec la réflexion $z \mapsto -\bar{z}$ par rapport à la demi-droite $i\mathbb{R}^+$.

Preuve: Soit h une isométrie de P, et $h(i)=z_0=x_0+iy_0$. Si h_1 et h_2 sont les homographies associées aux matrices $\begin{pmatrix}1&-x_0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{y_0}}&0\\0&\sqrt{y_0}\end{pmatrix}$, on a $h_1(z_0)=iy_0$ et $h_2(iy_0)=i$.

L'isométrie $h'=h_2\circ h_1\circ h$ stabilise donc i. Comme $\delta(i,\frac{i}{2})=\frac{1}{2}\mathrm{Log}(i,\frac{i}{2},0,\infty)=\frac{\mathrm{Log}\,2}{2}$,



$h'(\frac{i}{2})$ est sur le cercle hyperbolique de centre i et de rayon $\frac{\mathrm{Log}\,2}{2}$, donc de la forme $r_\theta(\frac{i}{2})$ pour un certain $\theta\in[0,2\pi[$, et si h_3 est l'homographie de matrice $\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}&-\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}&\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$, $h''=h_3\circ h'=h_3\circ h_2\circ h_1\circ h$ est une isométrie qui stabilise i et $\frac{i}{2}$; comme $2i$ est caractérisé par ses distances à i et $\frac{i}{2}$, on a aussi $h''(2i)=2i$. Si z est un autre point du cercle, $h''(z)=z$ ou z', son symétrique par rapport à $i\mathbb{R}^+$; si $h''(z)=z'$, et si ρ est la réflexion par rapport à $i\mathbb{R}^+$, on aura donc en posant $h'''=\rho\circ h''$, $h'''(z)=z$, $h'''(\frac{i}{2})=\frac{i}{2}$, $h'''(2i)=2i$, $h'''(i)=i$; l'image de l'arc de cercle $\widehat{\frac{i}{2}z2i}$ ne peut donc être que lui-même, et il s'ensuit que h''' conserve tous les points du cercle (de même h'', si $h''(z)=z$). Comme tous les points de $i\mathbb{R}^+$ sont caractérisés par leurs distances à i et $\frac{i}{2}$, on peut refaire le même raisonnement pour tous les cercles du faisceau $\mathcal{F}_i$; comme $P-i\mathbb{R}^+$ a deux composantes connexes, conservées ou échangées par h'', on a $h''=id$ ou $h'''=id$. ∎

La preuve montre en fait qu'une isométrie de P se prolonge à $\overline{\mathbb{C}}$, ou bien en une homographie $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$, avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ et $ad-bc=1$, qui conserve l'orientation, ou bien en une antihomographie $z\mapsto\frac{a'\bar{z}+b'}{c'\bar{z}+d'}$, avec $a',b',c',d'\in\mathbb{R}$ et $a'd'-b'c'=-1$, qui change l'orientation; on parlera d'isométries <u>directes</u> et <u>indirectes</u>.

<u>Le groupe G des isométries directes de P est donc $PSL_2(\mathbb{R})$</u>

La preuve montre aussi que toute isométrie directe de P se décompose de façon unique en produit d'une translation parallèle à $\mathbb{R}$, d'une homothétie de centre 0 et de rapport positif, et d'une rotation hyperbolique de centre i, ce qui démontre en même temps l'existence et l'unicité de la décomposition d'une matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ en produit

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\frac{1}{\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\mu\\0&1\end{pmatrix}$$ avec $\theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\lambda>0$ et $\mu\in\mathbb{R}$

En particulier G est <u>transitif</u> ($\forall z,z'\in P\ \exists g\in G,\ g(z)=z'$), et l'on peut donc remplacer i dans tous les énoncés précédents par n'importe quel autre point de P.

En fait, on a plus précisément: <u>Soient $z_1,z_2,z_1',z_2'\in P$ tels que $\delta(z_1,z_2)=\delta(z_1',z_2')>0$, alors il existe une seule isométrie h de G telle que $h(z_1)=z_1'$ et $h(z_2)=z_2'$.</u>

Preuve: Par transitivité, on peut supposer $z_1=z_1'=i$; alors z_2 et z_2' sont sur le même cercle du faisceau $\mathcal{F}_i$, puisque $\delta(i,z_2)=\delta(i,z_2')>0$, et si h est une isométrie qui convient, $h(i)=i$; donc h est une rotation hyperbolique de centre i, or une seule de ces rotations envoie z_2 sur z_2'. ∎

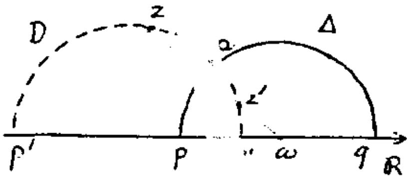
Par contre, la preuve ci-dessus implique que <u>dès qu'une isométrie de P conserve trois points non alignés, c'est l'identité.</u>

C) CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES

Pour toute géodésique Δ de P, on notera ρ_Δ et on appellera réflexion sur Δ

– la restriction à P de l'inversion dont le cercle de points fixes contient Δ, si Δ est un demi-cercle

– la symétrie orthogonale (euclidienne) par rapport à Δ, si Δ est une demi-droite verticale.



Une réflexion est une isométrie indirecte : on le sait déjà dans le second cas, et dans le premier, en conjuguant par une translation et une homothétie centrée sur $\mathbb{R}$, on peut se ramener au cas où Δ est le demi-cercle unité dans P ; mais dans ce cas, $\rho_\Delta(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. ∎

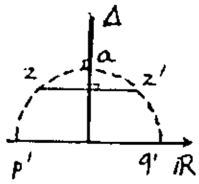
Dans le premier cas, soit $\omega \in \mathbb{R}$ le centre du demi-cercle Δ, et p, q ses horizons. Pour tout $z \in P$, il existe une et une seule géodésique D passant par z et orthogonale à Δ : c'est en effet le cercle du faisceau à points-limites p et q passant par z. Soient p' et q' ses horizons ; la puissance de ω par rapport à D vaut : $\omega p' \cdot \omega q' = |\omega z||\omega \rho_\Delta(z)| = \omega p^2$. (en particulier $z' = \rho_\Delta(z) \in D$)

Donc p' et q' s'échangent dans l'inversion ρ_Δ, et si $a = D \cap \Delta$

$$(a, z', q', p') = (\rho_\Delta(a), \rho_\Delta(z'), \rho_\Delta(q'), \rho_\Delta(p')) = (a, z, p', q') = (z, a, q', p').$$

et $\delta(z, a) = \delta(a, z')$ autrement dit :

ρ_Δ conserve globalement chaque géodésique orthogonale à Δ, et sa restriction à D est la symétrie (pour la distance δ) par rapport à $D \cap \Delta$



Le même résultat vaut encore (cf figure ci-contre), lorsque Δ est une demi-droite verticale.

En fait, dès qu'une isométrie indirecte admet au moins un point fixe, c'est la réflexion sur une géodésique (et en particulier, elle est involutive).

Preuve : Si l'isométrie indirecte $z \xrightarrow{f} \dfrac{-a\bar{z}+b}{-c\bar{z}+d}$ (avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc=1$) admet le point fixe $z = x+iy$, c'est que

$cz\bar{z} - dz - a\bar{z} + b = 0$ soit $c(x^2+y^2) - (a+d)x - i(d-a)y + b = 0$;

comme $y > 0$, nécessairement $d = a$, et le lieu des points fixes est donc un demi-cercle centré sur $\mathbb{R}$ si $c \neq 0$, une demi-droite verticale si $c = 0$; dans tous les cas c'est une géodésique Δ. Si $z' \notin \Delta$, z' et $f(z')$ sont équidistants de tout point de Δ, qui est donc leur médiatrice, et ils s'échangent alors par réflexion sur Δ (cf. B). ∎

Il est clair que le produit de deux telles réflexions est une isométrie directe, mais (comme dans le cas euclidien) la réciproque est vraie.

Toute isométrie directe est produit de deux réflexions sur des géodésiques

Preuve. Une isométrie directe de P est de la forme $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est définie au signe près, et $M \in SL_2(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de M sont les racines de l'équation caractéristique :

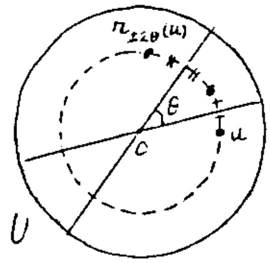
$$X^2-(a+d)X+ad-bc = X^2-(a+d)X+1=0$$

et l'on va discuter trois cas, en comparant la valeur absolue de $\mathrm{tr}\, M = a+d$ à 2 :

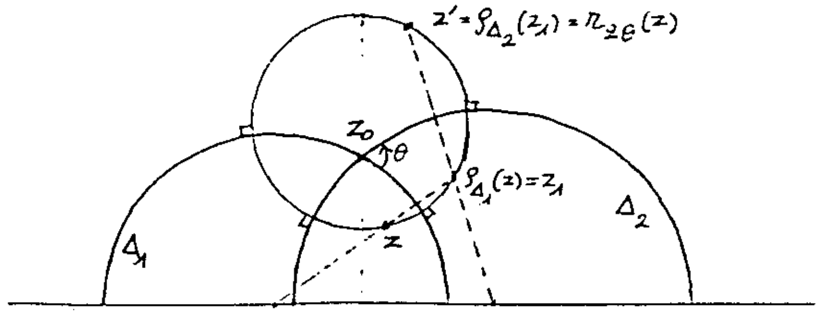
(1) si $\underline{|a+d|<2}$, M a deux valeurs propres complexes conjuguées, et de module 1 puisque de produit 1 ; si $a+d = 2\cos\theta$, ce sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, et M est semblable (dans $GL_2(\mathbb{R})$) à $M_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$: il existe P inversible telle que $P^{-1}MP = M_\theta$; si $\det P>0$ et $P' = \frac{P}{\sqrt{\det P}}$, on a $P'^{-1}MP' = M_\theta$ et $P'\in SL_2(\mathbb{R})$, si $\det P<0$ et $P'' = \frac{P}{\sqrt{|\det P|}}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, on a $P''^{-1}MP'' = M_{-\theta}$ et $P''\in SL_2(\mathbb{R})$.

Mais cela signifie que $h = g\circ r_{\pm 2\theta}\circ g^{-1}$, où g est une isométrie directe.

Dans le modèle du $\underline{\text{disque}}$, il est clair que la rotation de centre O et d'angle 2θ ou -2θ est le produit des réflexions (hyperboliques) sur deux géodésiques qui se coupent en O sous l'angle $\pm\theta$, dans un ordre ou dans l'autre. Par transport dans le demi-plan, on obtient que $r_{2\theta}$ et $r_{-2\theta}$ sont les produits dans un ordre et dans l'autre des réflexions sur deux géodésiques dès que celles-ci se coupent en i sous l'angle θ ; enfin g étant une isométrie et conservant les angles, si $g(i)=z_0$,



<u>h est le produit des réflexions sur deux géodésiques quelconques se coupant en z_0 sous l'angle θ, dans un ordre convenable.</u>

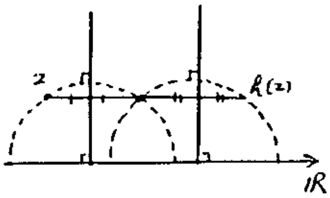


La construction de $h(z)$, en composant deux inversions, est claire sur la figure. h est donc dans ce cas ce qu'on a déjà appelé une "rotation" (hyperbolique) de centre z_0 et d'angle $\pm 2\theta$ ($+2\theta$ si $h = \rho_{\Delta_2}\circ\rho_{\Delta_1}$, avec $(\Delta_1,\Delta_2)=\theta$, les géodésiques étant orientées dans le sens des abscisses croissantes)

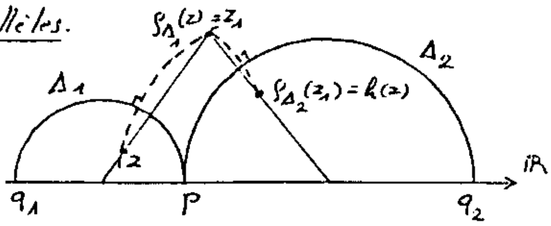
On parle classiquement d'isométrie "<u>de type elliptique</u>" dans ce cas.

(2) si $\underline{|a+d|=2}$, M a la valeur propre double ± 1 ; comme $h_{-M} = h_M$ on peut supposer que c'est 1, et dans ce cas, si h n'est pas l'identité, M n'est pas diagonalisable, mais semblable (dans $GL_2(\mathbb{R})$) à sa forme de Jordan $M_x = \begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}$ avec $x\neq 0$; de nouveau si $P^{-1}MP = M_x$ avec $\det P>0$, M et M_x sont conjuguées dans $SL_2(\mathbb{R})$, mais sinon on a $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}P^{-1}MP\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&x\\0&-1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1&-x\\0&1\end{pmatrix}$, avec $\det\left(P\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)>0$, et <u>au signe près</u>, M est conjuguée dans $SL_2(\mathbb{R})$ à M_{-x}.

Dans les deux cas $h = g\circ t_{\pm x}\circ g^{-1}$, où g est une isométrie directe, et $t_{\pm x} = h_{M_{\pm x}}$ est une translation de direction réelle. Une telle translation est visiblement le produit de deux réflexions par rapport à des demi-droites verticales distantes (pour la distance euclidienne) de $\frac{x}{2}$; leurs images par g sont deux géodésiques

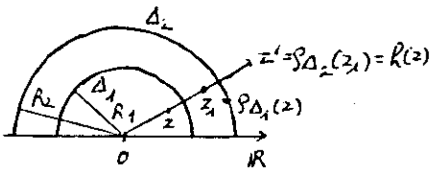


parallèles, c'est-à-dire ayant un horizon p commun, ($p=\infty$ pour deux demi-droites) disons Δ_1 et Δ_2, et $h = \rho_{\Delta_2}\circ\rho_{\Delta_1}$ est le produit des réflexions sur deux géodésiques parallèles.

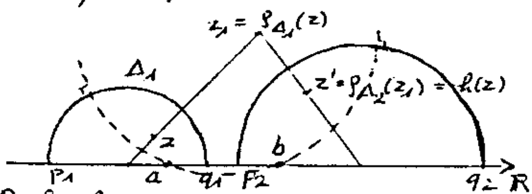


$h(z)$ se construit donc en composant deux inversions dont les cercles de points fixes sont tangents. Il s'agit d'une "translation" (hyperbolique). Classiquement, on parle dans ce cas d'isométrie "de type parabolique".

(3) si $|a+d|>2$, M a deux valeurs propres réelles de produit 1 ; quitte à changer M de signe, on peut supposer que c'est a et $\frac{1}{a}$, avec $a>0$; donc M est semblable (dans $GL_2(\mathbb{R})$) à la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}$, et là encore, si $P^{-1}MP = M_a$ avec $\det P>0$, M est conjuguée à M_a dans $SL_2(\mathbb{R})$, et sinon $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} P^{-1}MP \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = M_{\frac{1}{a}}$ et $\det\left(P\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)>0$, de sorte que dans les deux cas $h = g\circ \ell\circ g^{-1}$, où ℓ est une homothétie de centre 0 et de rapport a^2 (ou $\frac{1}{a^2}$), et g est une isométrie directe. Mais ℓ est alors le produit $\rho_{\Delta_2}\circ\rho_{\Delta_1}$ des réflexions sur des géodésiques Δ_j qui sont des demi-cercles de centre 0 et de rayons R_j ($j=1,2$) tels que $\frac{R_2}{R_1}=a$. Leurs images par g sont deux géodésiques disjointes,



et h est donc dans ce cas le produit des réflexions sur deux géodésiques disjointes. Il s'agit d'une "homothétie" hyperbolique, qui se construit aisément en composant deux inversions dont les cercles de points fixes sont disjoints. Classiquement on parle dans ce cas d'une isométrie "de type hyperbolique".



Remarque : Si h est une isométrie directe de P, $h=h_M$ avec $M\in SL_2(\mathbb{R})$. En particulier h se prolonge en une homographie de $\mathbb{C}$, dont la restriction à $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ est une homographie de $P\mathbb{R}^2=\overline{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire une homographie de l'horizon, obtenue par prolongement continu de h de P à $\overline{P} = P\cup\overline{\mathbb{R}}$.

Les directions propres de M sont alors les points fixes de h dans $P\mathbb{C}^2=\overline{\mathbb{C}}$, d'où les trois cas : — elles sont non réelles, et h a un seul point fixe dans P, et le point fixe conjugué dans $\overline{\mathbb{C}}-P$.

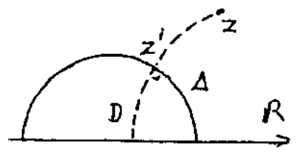
— elles sont réelles et distinctes, et h n'a aucun point fixe dans P, mais deux points fixes à l'horizon

— elles sont confondues, et h a un point fixe "double" à l'horizon.

En conclusion : si h est une isométrie directe de P, distincte de l'identité

- ou bien elle est de type elliptique (c'est une "rotation", produit de deux réflexions par rapport à des géodésiques sécantes en ω le centre de la rotation), et alors elle a un seul point fixe (ω) dans P, et n'en a pas à l'horizon.
- ou bien elle est de type parabolique (c'est une "translation", produit de deux réflexions sur des géodésiques parallèles d'horizon commun p), et alors elle n'a pas de point fixe dans P, et un seul à l'horizon (p).
- ou bien elle est de type hyperbolique (c'est une "homothétie", produit de deux réflexions sur des géodésiques disjointes, et alors elle n'a pas de point fixe dans P, mais deux points fixes distincts à l'horizon (a et b, les points-limites du faisceau engendré par les deux géodésiques, puisque $(p_1,q_1,a,b) = (p_2,q_2,a,b) = -1$ implique $\rho_{\Delta_j}(a)=b$, et $\rho_{\Delta_j}(b)=a$ pour $j=1,2$.)

D) FAISCEAUX DE GÉODÉSIQUES

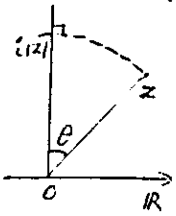


Soit z' la projection orthogonale d'un point z de P sur une géodésique Δ, c'est-à-dire $z' = \Delta \cap D$, où D est la géodésique orthogonale à Δ passant par z. Alors

$$\boxed{\delta(z,\Delta) = \inf_{w\in\Delta} \delta(z,w) = \delta(z,z')}$$

et cette distance n'est atteinte qu'en z'.

Preuve: On peut se ramener au cas où $\Delta = i\mathbb{R}^+$. Si alors $z = x+iy$, $z' = i\sqrt{x^2+y^2} = i|z|$.

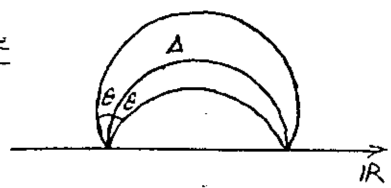


L'équation d'un cercle donnée au début du chapitre (§A, p.17) donne que, pour $t>0$

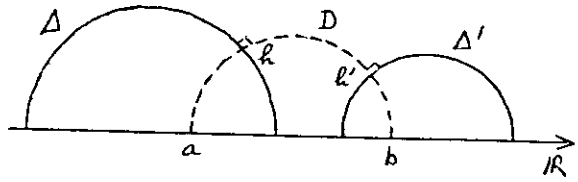
$$\mathrm{Ch}\,\delta(z,it) = \frac{x^2+y^2+t^2}{2yt} = \frac{|z|}{2y}\left(\frac{|z|}{t} + \frac{t}{|z|}\right) \geq \frac{|z|}{y}$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $t = |z|$. ■

En particulier $\mathrm{Ch}\,\delta(z,L) = \frac{1}{\cos\theta}$, où θ est l'angle que fait Δ avec la droite (euclidienne) Oz. Transportant ce résultat par une isométrie quelconque, on obtient que le lieu des points de P à distance donnée δ d'une géodésique Δ est l'hypercycle de mêmes horizons dont les arcs font avec Δ l'angle $\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{1}{\mathrm{Ch}\,\delta}$.

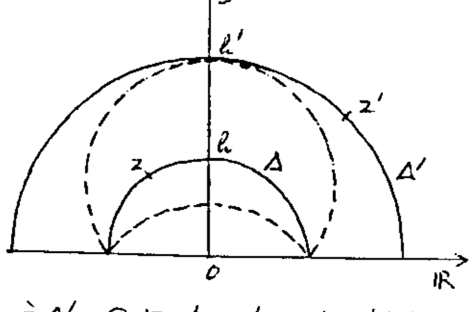


Considérons maintenant deux géodésiques disjointes Δ et Δ'; il existe une et une seule géodésique D orthogonale aux deux (c'est le demi-cercle de diamètre ab, où a et b sont les points-limites du faisceau engendré par Δ et Δ'); on l'appelle la perpendiculaire commune à Δ et Δ'.



Posons $h = \Delta\cap D$ et $h' = \Delta'\cap D$. Alors:

$$\boxed{\delta(\Delta,\Delta') = \inf_{z\in\Delta,\, z'\in\Delta'} \delta(z,z') = \delta(h,h')}$$

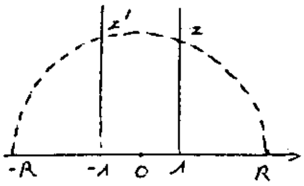


Preuve. On peut se ramener au cas où Δ et Δ' sont des demi-cercles de centre O, de rayons R et R', et dans ce cas $D = i\mathbb{R}^+$, $h = iR$, $h' = iR'$, et $\delta(h,h') = |\mathrm{Log}\,(iR, iR', \infty, 0)| = |\mathrm{Log}\,\frac{R'}{R}| = \delta$

Le lieu des points de P à distance $\leq \delta$ de Δ est alors la lunule limitée par l'hypercycle de mêmes horizons que Δ et tangent en h' à Δ'. Cette lunule est strictement convexe, et dès que $z' \in \Delta'$, $z' \neq h'$, on a

$$\delta(z',\Delta) = \inf_{z\in\Delta} \delta(z',z) > \delta = \delta(h',h). \blacksquare$$

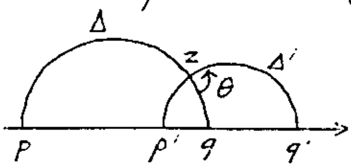
Par contre deux géodésiques parallèles n'ont pas de perpendiculaire commune (si ce n'est l'horizon), et bien que sans intersection, sont à distance nulle l'une de l'autre. En effet on peut supposer que ce sont les demi-droites verticales d'abscisse 1 et -1; si z et z' sont leurs points sur le



demi-cercle de centre O et de rayon R, on a $z = 1 + i\sqrt{R^2-1}$, $z' = -1 + i\sqrt{R^2-1}$, puis, toujours par la même formule

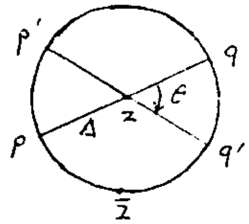
$$\mathrm{Ch}\,\delta(z,z') = \frac{2R^2}{2(R^2-1)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 1, \text{ d'où } \delta(z,z') \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 .$$ ■

Quant à deux géodésiques sécantes, elles sont clairement de distance nulle et sans perpendiculaire commune ; si p,q et p',q' sont leurs horizons, avec $p<q<p'<q'$, et si θ est l'angle orienté qu'elles font quand on les a orientées dans le sens des abscisses croissantes, alors



$$\boxed{(p,p',q,q') = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

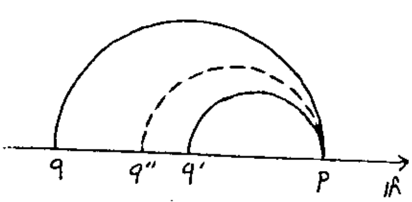
Preuve : Une inversion de pôle $\bar z$ et de puissance $|\mathrm{Im}\, z|^2$ par exemple (on peut aussi se référer au modèle du disque) transforme la figure en celle ci-contre, et conserve (p,p',q,q'), qui est réel. On peut, pour le calculer, supposer par exemple $p = e^{-i\theta}$, $p'=1$, $q = -e^{-i\theta}$, $q'=-1$, et il vient

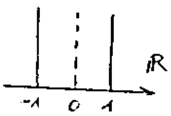


$$(e^{-i\theta}, 1, -e^{-i\theta}, -1) = \frac{4e^{-i\theta}}{(e^{-i\theta}+1)^2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} .$$ ■

Enfin calculons la bissectrice de deux géodésiques, c'est-à-dire le lieu des points équidistants des deux : il s'agit d'une ou deux géodésiques suivant leur position mutuelle :

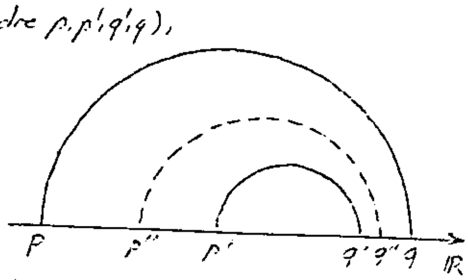
- si elles sont parallèles, il s'agit d'une seule : si p,q et p,q' sont leurs horizons, c'est celle d'horizons p,q'' tels que $(p,q'',q,q') = -1$

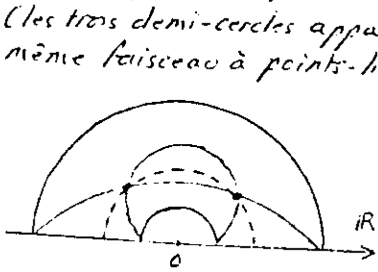




En effet on peut se ramener au cas où ce sont les demi-droites verticales d'abscisses 1 et -1, et la conclusion (que la bissectrice est alors $i\mathbb{R}^+$) résulte du début du paragraphe.

- si elles sont disjointes, c'est encore une seule : si p,q et p',q' sont leurs horizons, (dans l'ordre p,p',q',q), c'est celle d'horizons p'',q'' tels que $(p'',q'',p,p') = (p'',q'',q,q') = -1$. (Les trois demi-cercles appartiennent au même faisceau à points-limites)





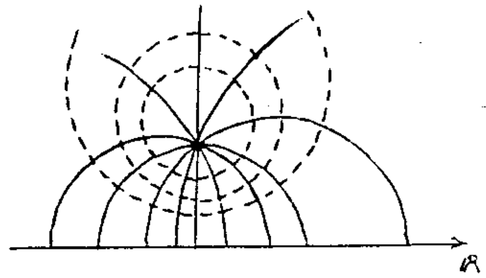
On peut en effet se ramener au cas de deux demi-cercles de centre O et de rayons 1 et R. Dans ce cas la formule du début du paragraphe montre que les hypercycles à une même distance δ des deux géodésiques se coupent à distance $\sqrt{R}$ de l'origine.

- enfin, si elles sont sécantes en z, il s'agit des deux géodésiques passant par z et y faisant avec les deux premières des angles égaux : c'est cette fois évident sur le modèle du disque, quand $z = 0$.

La famille $\mathcal{F}'$ des courbes orthogonales à toutes les géodésiques du faisceau $\mathcal{F}$ engendré par deux d'entre elles, est le faisceau dual, formé de cycles, horocycles ou hypercycles suivant le cas; mais dans tous les cas cette famille est stable par réflexion sur n'importe quelle géodésique de $\mathcal{F}$, et donc formée de courbes "à distance constante" les unes des autres; enfin deux points de P sont sur la même courbe de $\mathcal{F}'$ si et seulement si leur médiatrice appartient à $\mathcal{F}$.

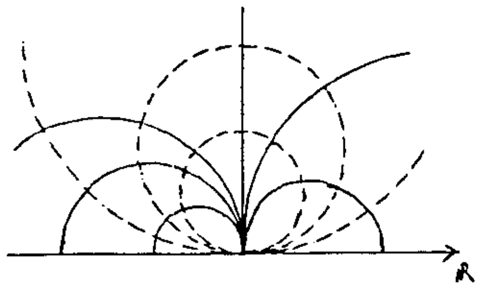
Cas de géodésiques sécantes:

$\mathcal{F}'$ est l'ensemble des cycles de centre le point d'intersection

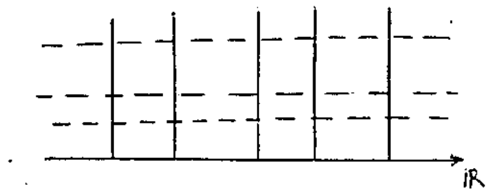


Cas de géodésiques parallèles :

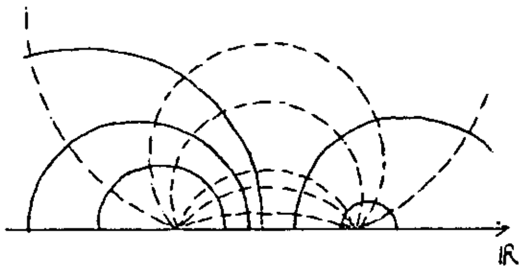
$\mathcal{F}'$ est l'ensemble des horocycles de même horizon



Cela contient le cas particulier où l'horizon commun est ∞ :

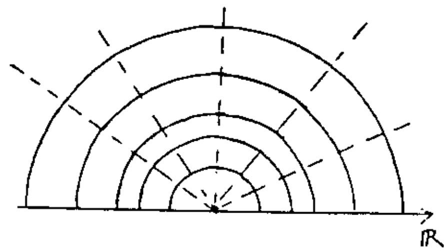


Cas de géodésiques disjointes:



$\mathcal{F}'$ est l'ensemble des hypercycles dont les horizons sont les points-limites de $\mathcal{F}$

Cela contient le cas particulier où l'un de ces points-limites est ∞ :



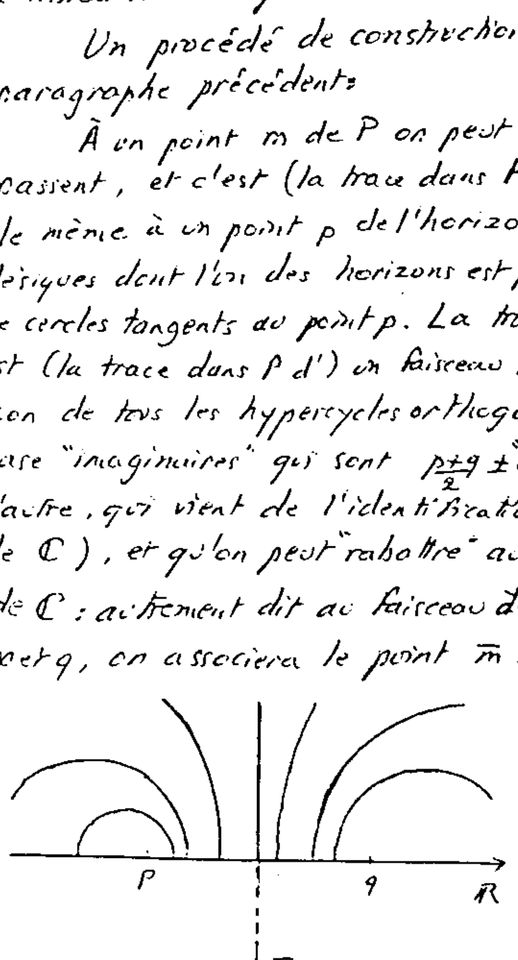
E) AU DELÀ DU MIROIR

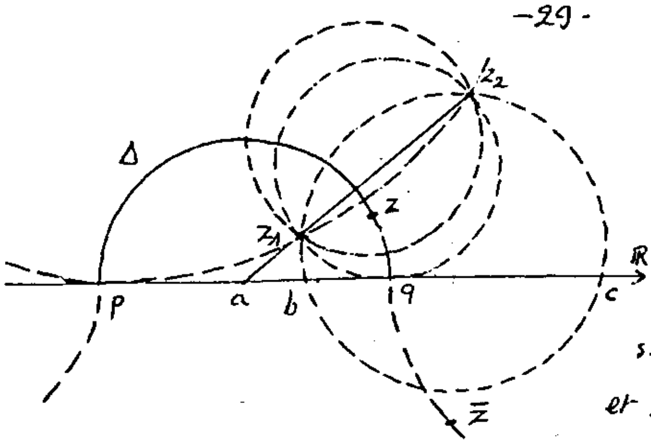
Il est étrange que tous les modèles qu'on a présentés du plan de Lobachevski nous apparaissent en compagnie d'un double naturel, une "ombre" que l'on néglige : l'extérieur de la conique horizon dans le modèle de Klein, le complémentaire du disque dans $\overline{\mathbb{C}}$, la demi-sphère "au-dessous" dans le modèle Σ^+, le demi-plan inférieur pour celui de Poincaré, l'autre nappe de l'hyperboloïde relativiste. Le plan de Lobachevski serait-il muni d'un "au delà de l'horizon", qui en serait une sorte de réplique automatique ?

Mais rajouter à Σ^+ le reste de Σ, ou à P le reste $\overline{\mathbb{C}}$ sans plus "réfléchir" reviendrait à rigidifier les droites élastiques jusqu'à leur faire franchir l'horizon, et la géométrie hyperbolique serait remplacée par la géométrie sphérique ... une autre histoire. Il s'agit plutôt ici de considérer le "verso" du plan hyperbolique tout en lui gardant sa nature élastique, qui fait de l'horizon un miroir infranchissable (on a déjà fait allusion à ses propriétés de "réflexion" en définissant les hypercycles comme réunions de deux arcs de cercle), et le double à introduire ne peut donc être qu'"imaginaire".

Un procédé de construction nous est fourni par les considérations du paragraphe précédent:

À un point m de P on peut associer le faisceau de géodésiques qui y passent, et c'est (la trace dans Pd') un faisceau à point de base m (dans P); de même à un point p de l'horizon, on peut associer le faisceau de géodésiques dont l'un des horizons est p, et c'est (la trace dans Pd') un faisceau de cercles tangents au point p. La troisième espèce de faisceau de géodésiques est (la trace dans Pd') un faisceau à points-limites : les points p et q à l'horizon de tous les hypercycles orthogonaux ; un tel faisceau a deux points de base "imaginaires" qui sont $\frac{p+q}{2} \pm i\left|\frac{p-q}{2}\right|$ (ce "i"-là n'a rien à voir avec l'autre, qui vient de l'identification du plan hyperbolique au demi-plan P de $\mathbb{C}$), et qu'on peut "rabattre" autour de $\mathbb{R}$ dans le demi-plan inférieur de $\mathbb{C}$: autrement dit au faisceau de géodésiques disjointes à points-limites p et q, on associera le point $\overline{m} = \frac{p+q}{2} - i\left|\frac{p-q}{2}\right| \in \mathbb{C} - \{P \cup \mathbb{R}\}$. Mais cela n'a d'intérêt que si l'on définit le prolongement imaginaire, au delà de l'horizon, d'une géodésique, de telle sorte que celles du faisceau à points-limites p et q soient précisément celles qui "passent" par $\overline{m}$. C'est ce qu'on va faire, en considérant une géodésique comme une médiatrice.





Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ sont dans P, la médiatrice de z_1 et z_2 est le demi-cercle de centre $a = z_1z_2 \cap \mathbb{R}$ et de rayon $\sqrt{|pz_1||pz_2|}$, c'est-à-dire la trace dans P du cercle du faisceau à points-limites z_1 et z_2 qui est centré sur $\mathbb{R}$, ou encore le demi-cercle Δ d'équation (cf §A):

si $y_1 = y_2$, $X = \frac{x_1+x_2}{2}$ (et $Y > 0$),

et si $y_1 \neq y_2$:

$$(*) \quad (y_1 - y_2)(X^2+Y^2) - 2(x_2y_1 - x_1y_2)X + y_1(x_2^2+y_2^2) - y_2(x_1^2+y_1^2) = 0 \quad (\text{et } Y>0)$$

Chaque point z de Δ est le centre d'un cycle (cercle pour la distance hyperbolique) qui passe par z_1 et z_2, de rayon $r = \delta(z, z_1) = \delta(z, z_2)$. Quand z parcourt Δ, on obtient ainsi tous les cercles du faisceau à points de base z_1 et z_2 qui ne rencontrent pas $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tous les cycles passant par z_1 et z_2, et le point z de P qui leur est associé est le point-limite (dans P) du faisceau qu'ils engendrent avec l'horizon.

De même les horizons p et q de Δ sont les points-limites des faisceaux qu'engendrent avec l'horizon les deux horocycles passant par z_1 et z_2, c'est-à-dire les deux cercles du faisceau à points de base z_1 et z_2 tangents à l'horizon (aux points p et q).

Aux hypercycles passant par z_1 et z_2, c'est-à-dire aux cercles passant par z_1 et z_2 et sécants à l'horizon, disons en b et c, on va donc associer le point-limite du faisceau qu'ils engendrent avec $\mathbb{R}$ (faisceau de cercles à points de base b et c), ou plutôt son rabattement dans $\mathbb{C} - \{P \cup \mathbb{R}\} = P'$

$\bar{z} = \frac{b+c}{2} - i\,\frac{|b-c|}{2}$; ses coordonnées $\frac{b+c}{2}$ et $\frac{|b-c|}{2}$ satisfont donc encore à l'équation $(*)$, mais avec iY au lieu de Y (dû au rabattement).

Autrement dit l'équation du prolongement imaginaire Δ' de la médiatrice Δ dans P' s'écrit

$$(y_1 - y_2)(X^2 - Y^2) - 2(x_2y_1 - x_1y_2)X + y_1(x_2^2+y_2^2) - y_2(x_1^2+y_1^2) = 0 \quad (\text{et } Y<0)$$

(si $y_1 \neq y_2$, et $X = \frac{x_1+x_2}{2}$ (et $Y<0$), si $y_1 = y_2$)

Mais il s'agit là de la trace dans P' d'une hyperbole équilatère de centre a et passant par p et q, si bien que Δ et Δ' se recollent en une courbe continue $\bar{\Delta} = \Delta \cup \{p, q\} \cup \Delta'$ dans $\mathbb{C}$, qui aura par construction la propriété suivante :

Soient $z_1, z_2, z_3 \in P$ et Δ_{ij} la médiatrice de z_i et z_j pour $\{i,j\} \subset \{1,2,3\}$. Alors $\bar{\Delta}_{12}$, $\bar{\Delta}_{23}$ et $\bar{\Delta}_{31}$ sont concourantes en un point de $\mathbb{C}$, qui est dans P, sur $\mathbb{R}$, ou dans P', selon que le cercle circonscrit à $z_1z_2z_3$ est extérieur, tangent, ou sécant à $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire selon que c'est un cycle, un horocycle, ou un hypercycle).

Si maintenant $z_1 = x_1 + iy_1 \in P$ et $z_2 = x_2 - iy_2 \in P'$, les cercles du faisceau à points de base z_1 et z_2 sont tous sécants à $\mathbb{R}$, et si on leur associe de la même façon leur point-limite imaginaire rabattu dans P', ce point $\bar{z}$ décrit la "médiatrice imaginaire" de z_1 et z_2, dont l'équation s'obtient en remplaçant y_2 par $-y_2$, et simultanément Y par iY dans (*), soit:

$$(y_1+y_2)(X^2-Y^2) - 2(x_2 y_1 + x_1 y_2)X + y_1(x_2^2+y_2^2) + y_2(x_1^2+y_1^2) = 0$$

Il s'agit cette fois de la branche dans P' de l'hyperbole équilatère de centre $a = z_1 z_2 \cap \mathbb{R}$, d'axe principal $\mathbb{R}$, et de sommet $\bar{z}_0$, rabattement des points-limites imaginaires du faisceau engendré par $\mathbb{R}$ et le cercle de centre a et de rayon $\sqrt{|az_1||az_2|}$.