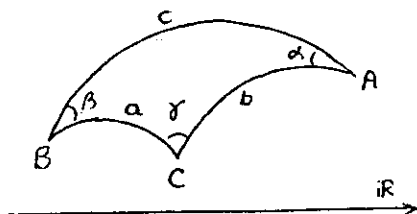


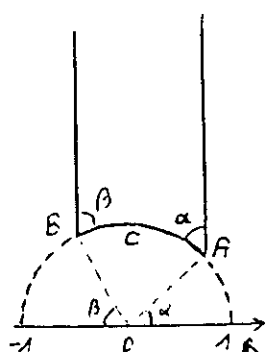
I) TRIGONOMETRIE HYPERBOLIQUE

A) LES TROIS RELATIONS FONDAMENTALES



Dans un triangle ABC , c'est-à-dire le domaine convexe du plan hyperbolique limité par trois segments de géodésiques, les angles aux sommets α, β, γ et les longueurs des côtés a, b, c , sont liés par certaines relations.

On considérera aussi des triangles dont un ou plusieurs sommets sont à l'horizon, l'angle au sommet correspondant étant alors nécessairement nul.

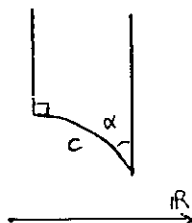


Si C par exemple est à l'horizon, on peut par une isométrie se ramener au cas où $C = \infty$ (donc $\gamma = 0$, et a et b sont infinis) et A et B sont sur le cercle de centre O et de rayon 1 (il y a en effet une isométrie qui envoie une géodésique donnée sur ce cercle, et A sur $e^{i\alpha}$). Dans ce cas on a $A = e^{i\alpha}$, $B = e^{i(\pi-\beta)}$, et la formule du chapitre IV, §A, donnant la distance entre deux points s'écrit ici

$$\text{Sh}^2 \frac{c}{2} = \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2}{4 \sin \alpha \sin \beta} = \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \alpha \sin \beta}$$

et l'on en tire

$$\text{Ch} c = \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \quad \text{et} \quad \text{Sh} c = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}$$



En particulier pour un triangle rectangle, par exemple si $\beta = \frac{\pi}{2}$, il vient:

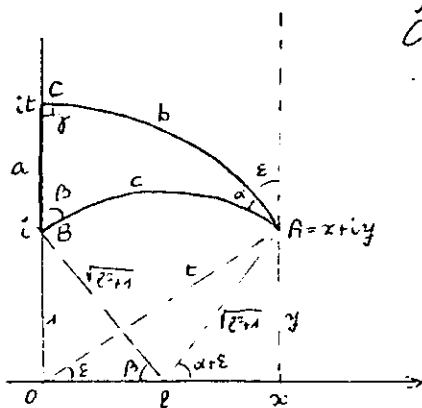
$$\text{Ch} c = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \text{Sh} c = \cot \alpha, \quad \text{d'où} \quad \text{Th} c = \cos \alpha$$

Envisageons maintenant le cas d'un vrai triangle rectangle c'est-à-dire dont les trois sommets A, B, C sont dans P , les trois côtés a, b, c sont de longueur finie, et les trois angles α, β, γ non nuls, avec $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

On peut par une isométrie amener B en i et C en it tel que $a = \text{Log}(i, it, c, 0) = \log t$ (donc $t > 1$)

Si $\ell \in \mathbb{R}$ est le centre du cercle qui porte c , les angles α, β et l'angle ϵ que fait b avec la verticale en A se lisent en des points de $\mathbb{R}$ comme l'indique la figure. On a alors, si $A = x + iy$:

$$x = \frac{\ell^2 - 1}{2\ell} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{\ell^2 - x^2} \quad (\text{car } 1 + \ell^2 = (x - \ell)^2 + y^2, \text{ et } x^2 + y^2 = t^2), \text{ puis: } \sin \epsilon = \frac{y}{\ell} \quad \text{et} \quad \cos \epsilon = \frac{x}{\ell}.$$



De plus, par la relation (euclidienne) bien connue, dans le triangle $O, l, x+y$:

$$\frac{t}{\sin(x+\varepsilon)} = \frac{l}{\sin x} = \frac{\sqrt{l^2+1}}{\sin \varepsilon}, \text{ d'où : } \sin(x+\varepsilon) = \frac{y}{\sqrt{l^2+1}} \text{ et } \cos(x+\varepsilon) = \frac{x-l}{\sqrt{l^2+1}}$$

$$\text{puis : } \sin x = \frac{ly}{t\sqrt{l^2+1}} \text{ et } \cos x = \frac{\sqrt{l^2+l^2x^2}}{t\sqrt{l^2+1}}$$

$$\text{de même : } \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{l^2+1}} \text{ et } \cos \beta = \frac{l}{\sqrt{l^2+1}}$$

Utilisons maintenant les relations déjà vues dans les triangles $ACos$ et $ABos$; il vient :

$$\underline{Chb = \frac{t}{y}} \text{ et } \underline{Shb = \frac{x}{y}} ; \text{ puis } Chc = \frac{1 + \cos(x+\varepsilon)\cos\beta}{\sin(x+\varepsilon)\sin\beta} = \frac{l^2+1+(x-l)l}{y} = \frac{1+l^2}{y} = Chc$$

$$\text{et } Shc = \frac{\cos(x+\varepsilon) + \cos\beta}{\sin(x+\varepsilon)\sin\beta} = \frac{\sqrt{l^2+1}(x-l+l)}{y} = \frac{x}{y}\sqrt{l^2+1} = Shc$$

$$\text{Comme } Cha = \frac{l^2+1}{2t} \text{ et } Sha = \frac{l^2-1}{2t}, \text{ on a :}$$

$$Cha Chb = \frac{l^2+1}{2y} = \frac{1+l^2}{y} \text{ puisque } l^2-1=2lx, \text{ soit } \boxed{Chc = Cha Chb}$$

$$\frac{\cos x \cos \beta}{\sin x \sin \beta} = \frac{\sqrt{l^2+l^2x^2}}{y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+l^2x^2}}{y} = \frac{1+l^2x}{y}, \text{ puisque } (1+l^2x)^2 = 1+2lx+l^2x^2 = l^2+l^2x^2,$$

$$\text{soit } \boxed{Chc = \frac{\cos x \cos \beta}{\sin x \sin \beta}}$$

$$\text{Enfin : } \frac{Sha}{\sin x} = \frac{(l^2-1)\sqrt{l^2+1}}{2ly} = \frac{x}{y}\sqrt{l^2+1} = \frac{Shb}{\sin \beta} = Shc, \text{ soit : } \boxed{Shc = \frac{Shb}{\sin \beta} = \frac{Sha}{\sin x}}$$

c'est-à-dire les trois relations fondamentales dans le triangle rectangle.

La troisième est l'analogue de la relation euclidienne utilisée au haut de la page.

La première est l'équivalent du théorème de Pythagore : si a, b, c sont petits,

$$Chc \sim 1 + \frac{c^2}{2}, \text{ et } Chc = Cha Chb \text{ donne } 1 + \frac{c^2}{2} \sim (1 + \frac{a^2}{2})(1 + \frac{b^2}{2}), \text{ soit } c^2 \sim a^2 + b^2.$$

La deuxième n'a pas d'équivalent euclidien.

En considérant alors un triangle quelconque comme réunion (ou différence) de deux triangles rectangles, on peut établir les trois relations fondamentales de la trigonométrie hyperbolique (avec les notations de la première figure de ce paragraphe :

les deux relations "quasi-euclidiennes" :

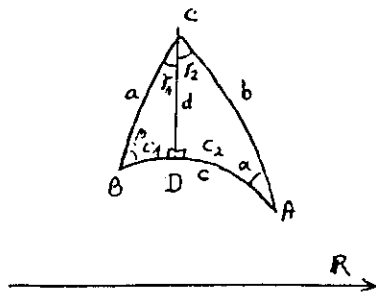
$$(1) \quad \boxed{\frac{Sha}{\sin x} = \frac{Shb}{\sin \beta} = \frac{Shc}{\sin \gamma}} \quad \left(\text{analogue euclidien : } \frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \right)$$

$$(2) \quad \boxed{Chc = Cha Chb - Sha Shb \cos \gamma} \quad \left(\text{analogue euclidien : } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \right)$$

et la relation "cachée" (sans analogue euclidien)

$$(3) \quad \boxed{Chc = \frac{\cos x \cdot \cos \beta + \cos \gamma}{\sin x \cdot \sin \beta}}$$

Par exemple si α, β sont aigus, la perpendiculaire abaissée de C sur la géodésique AB coupe le segment AB en D, et l'on obtient la figure ci-contre (dessinée en se ramenant au cas où CD est vertical); les relations dans les triangles rectangles ACD et BCD s'écrivent



$$\begin{aligned} Chb &= Chc_1 Chd & Cha &= Chc_2 Chd \\ Chb &= \frac{Csc\alpha Csc\gamma_2}{\sin\alpha \sin\gamma_2} & Cha &= \frac{Csc\beta Csc\gamma_1}{\sin\beta \sin\gamma_1} \\ Shb &= \frac{Shd}{\sin\alpha} = \frac{Shc_2}{\sin\gamma_2} & Sha &= \frac{Shd}{\sin\beta} = \frac{Shc_1}{\sin\gamma_1} \end{aligned}$$

avec $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ et $c = c_1 + c_2$.

d'où aussitôt $\frac{Sha}{\sin\alpha} = \frac{Shd}{\sin\alpha \sin\beta} = \frac{Shb}{\sin\beta}$, puis (1) par symétrie.

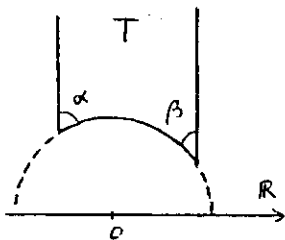
Des preuves de (2) et (3) sont laissées ici au lecteur, qui y trouvera matière à exercer sa sagacité! ■

(À vrai dire, le modèle du disque — on prend alors un des sommets à l'origine — est ici plus pratique pour démontrer (2) et (3); c'est aussi le cas pour discuter des propriétés des polygones au paragraphe suivant, sauf pour le premier résultat.)

B) LES ANGLES ET L'AIRES DES POLYGONES

La dernière relation fondamentale démontre que les angles d'un triangle déterminent la longueur de ses côtés: en particulier, dès que deux triangles sont semblables (ont les mêmes angles), ils sont égaux (isométriques); par suite l'aire d'un triangle est aussi déterminée par ses angles: si $a(T)$ est l'aire d'un triangle T d'angles α, β, γ , on a:

$$a(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$



Preuve: Tout triangle étant différence de deux triangles qui ont un sommet à l'horizon (et donc un angle nul), il suffit de prouver la formule dans ce cas; pour un tel triangle, on peut par une isométrie se ramener au cas (de la figure) où l'un des sommets est co , les autres étant sur le cercle-unité, disons en $e^{i\beta}$ et $e^{i(\pi-\alpha)}$, si

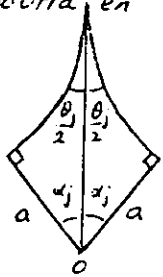
α et β sont les deux angles non nuls. L'élément d'aire dans le modèle du demi-plan a été calculé au chapitre II, §A: c'est $\frac{dx dy}{y^2}$; il vient donc:

$$a(T) = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi - \alpha - \beta. \quad \blacksquare$$

Un polygone "simple" (l'intérieur d'une "courbe simple de Jordan", formée de segments géodésiques) peut se découper en triangles; on en tire (grâce à la relation d'Euler): l'aire d'un polygone simple à n côtés et d'angles aux sommets intérieurs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vaut $(n-2)\pi - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$

Il est clair qu'un tel polygone ne peut être convexe que si tous ses angles θ_j sont saillants (la métrique hyperbolique devient la métrique euclidienne au voisinage infinitésimal d'un sommet). Réciproquement, pour toute famille $\theta_1, \dots, \theta_n$ telle que $0 < \theta_j < \pi$ pour $j = 1, \dots, n$, et $\theta_1 + \dots + \theta_n < (n-2)\pi$, il existe un polygone convexe dans P , d'angles intérieurs les θ_j dans cet ordre.

Preuve: Si l'on sait construire pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ un triangle rectangle d'angles α_j et $\frac{\theta_j}{2}$, et de côté opposé à $\frac{\theta_j}{2}$ de longueur a indépendante de j , on pourra en les recollant d'abord deux par deux sur l'hypoténuse, puis les quadrilatères obtenus chacun au suivant sur leurs côtés de longueur a (cf. la figure ci-contre, dessinée dans le modèle de disque, quand O est l'origine), construire un polygone solution, pourvu que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \pi$.



Par la relation (3) du paragraphe A, on a $\text{Ch } a = \frac{\cos \frac{\theta_j}{2}}{\sin \alpha_j}$.

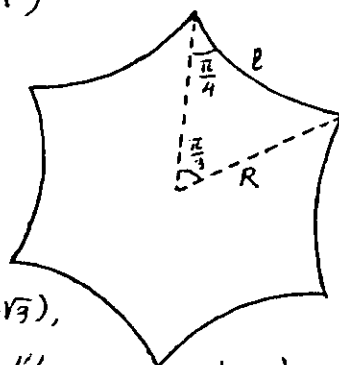
La fonction $f(t) = \sum_{j=1}^n \text{Arc Sin} \left(\frac{\cos \frac{\theta_j}{2}}{\text{Ch } t} \right)$ est continue et décroît de $f(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\pi - \theta_j}{2} = \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2}(\theta_1 + \dots + \theta_n) > \pi$ jusqu'à 0 quand t croît de 0 à $+\infty$; il existe donc $a > 0$ tel que $f(a) = \pi$.

Remarquons qu'admettre des angles nuls revient à admettre des sommets à l'horizon, ce qui n'empêche pas que l'aire du polygone reste toujours finie, en fait majorée par $(n-2)\pi$, et cette borne n'est atteinte que pour les polygones dont tous les sommets sont à l'horizon. Ainsi déjà l'aire d'un triangle est toujours inférieure à π (de même que la somme de ses angles!), et elle ne vaut π que si les trois sommets sont à l'horizon. Par contre l'aire et la somme des angles d'un triangle même à distance finie peuvent prendre n'importe quelle valeur de $]0, \pi[$.

Par contre la formule précédente implique qu'il n'y a pas de rectangles dans le plan hyperbolique (cas $n=4$), c'est-à-dire de quadrilatères dont tous les angles soient droits, mais par contre il y a des pentagones, et plus généralement des polygones à n côtés dès que $n \geq 5$, "rectangles".

Dès que $n \geq 3$, un polygone n'est plus déterminé à isométrie près par ses angles (le découper en triangles), mais les pentagones rectangles et les hexagones rectangles voient les longueurs de leurs côtés reliées par de nombreuses relations trigonométriques, qui ont été longuement étudiées.

Par exemple, il existe (à isométrie près) un seul hexagone rectangle régulier: si ℓ est la longueur de ses côtés et R le rayon de son cercle circonscrit, on a en effet, en le découpant en six triangles d'angles $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, par la relation cachée du §A:



$\ell = \text{Arg Ch } 2 = \text{Log}(2 + \sqrt{3})$, $R = \text{Arg Ch } \sqrt{3} = \text{Log}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, (le rayon du cercle inscrit est $\text{Log}(1 + \sqrt{2})$, et l'aire de l'hexagone est π).

En recollant quatre à quatre en chaque sommet de tels hexagones, on obtient un pavage régulier du plan hyperbolique, dessiné ci-dessous dans le modèle du disque à partir d'un hexagone centré à l'origine.

Le groupe de symétries de ce pavage est évidemment le sous-groupe discret du groupe des isométries engendré par la rotation de

centre l'origine et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la réflexion sur

l'un des côtés de l'hexagone "central",

c'est-à-dire (toujours dans le

modèle du

disque) les

transformations

$$z \mapsto \frac{(1+i\sqrt{3})z}{2}$$

$$\text{et } z \mapsto \frac{6\sqrt{2}\bar{z}-1}{8\bar{z}-6\sqrt{2}}$$

par exemple.

Si l'on dessine par étapes ce pavage à partir du premier hexagone, en rajoutant

à chaque étape les hexagones qui touchent ceux déjà tracés par au moins un sommet, le nombre d'arêtes au bord est multiplié par sept à chaque étape, et si s_n, a_n, f_n sont les nombres de sommets, d'arêtes et de pavés à la n -ième étape, il vient $s_n = 7^{n+1} - 1, a_n = 9 \cdot 7^n - 3, f_n = 2 \cdot 7^n - 1$ (avec $s_0 = a_0 = 6$ et $f_0 = 1$) : ce pavage est donc à croissance exponentielle en ce sens que le nombre de pavés contenus dans un disque croît en fonction exponentielle de son rayon.

Naturellement on obtient de même un pavage régulier du plan hyperbolique en polygones réguliers rectangles à n côtés, pour tout $n \geq 5$, en particulier le pentagone régulier rectangle, obtenu en joignant cinq triangles isocèles d'angles $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, est de côté

$\ell = \text{Arg Ch} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ et le rayon R de son cercle circonscrit

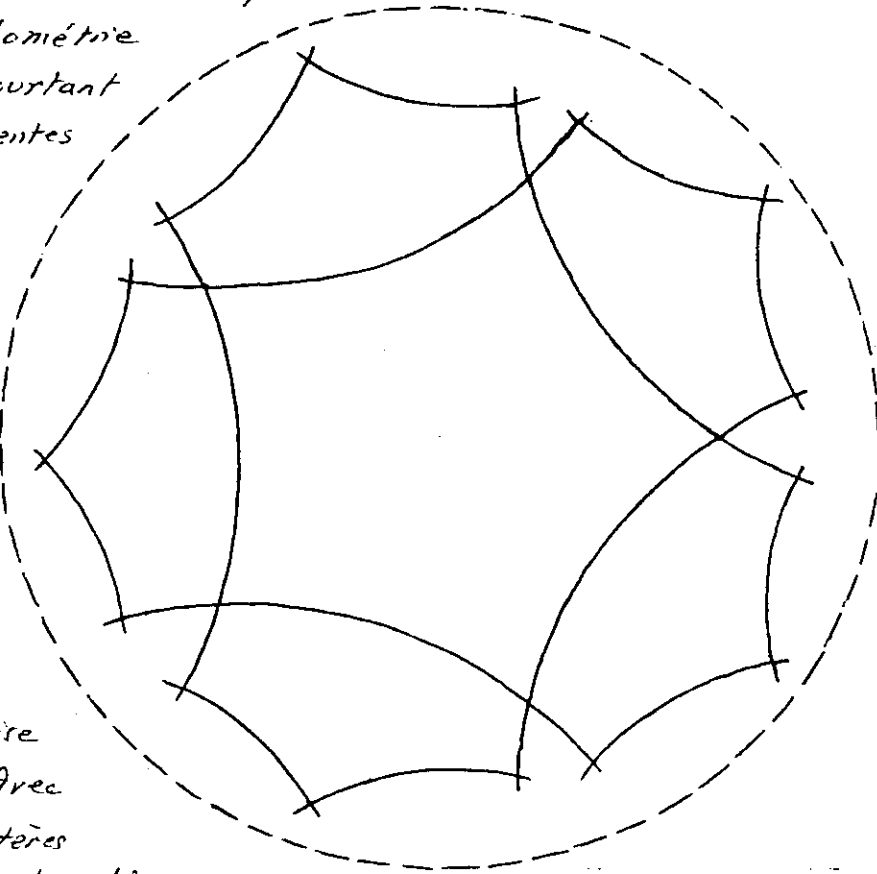
vaut $\text{Arg Ch} \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. On trouvera à la page suivante



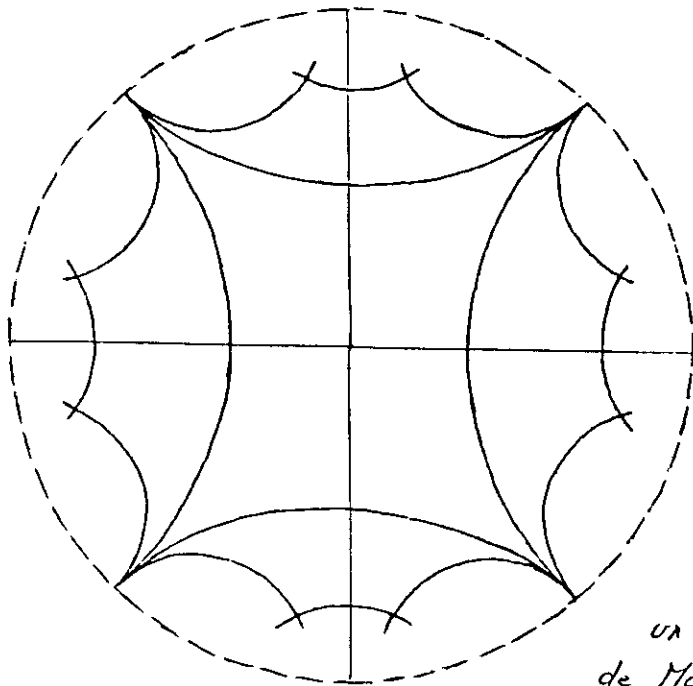
un dessin (dans le modèle du disque et à partir d'un pentagone centré à l'origine) du début de ce pavage, lui aussi à croissance exponentielle et dont le groupe de symétries est un groupe discret à deux générateurs faciles à calculer. Le dessin rappelle

certaines symétries d'ordre cinq, impossibles en géométrie euclidienne, et pourtant discrètement présentes dans la nature

Par contre le plan hyperbolique n'accueille aucun carré. Mais on peut y dessiner des quadrilatères à trois angles droits, et fabriquer ainsi beaucoup de pavages, quand le dernier angle divise exactement 2π . Avec



de tels quadrilatères isocèles trirectangle dégénérés, par exemple, c'est-à-dire dont le dernier angle est nul, allant jusqu'à l'horizon, mais d'aire finie $\frac{\pi}{2}$, les cotés finis étant alors de longueur $\text{ArgCh } \sqrt{2}$, on peut fabriquer le pseudo-pavage ci-dessous, lui aussi à croissance exponentielle dans un sens analogue au précédent.



Remarquons ici aussi qu'il existe beaucoup de pavages du plan hyperbolique en triangles équilatéraux: si en effet un tel triangle est de côté a et d'angle α , les relations du §A donnent

$$\text{Ch } a = \text{Ch}^2 a - \text{Sh}^2 a \cos \alpha,$$

$$\text{soit } \cos \alpha = \frac{\text{Ch } a}{\text{Ch } a + 1}$$

et un tel triangle pavera le plan si α est de la forme $\frac{2\pi}{n}$, c'est-à-dire $\cos n\alpha = 1$ pour

un certain entier $n > 6$: la formule de Moivre donne alors les valeurs possibles de a par une équation algébrique à l'inconnue $\text{Ch } a$.

Que tous les pavages du plan hyperbolique soient à croissance exponentielle résulte d'ailleurs de ce que l'aire d'un disque de rayon R vaut $\pi \operatorname{Sh}^2 R$, tandis que la longueur de sa circonférence vaut $\pi \operatorname{Sh} 2R$.

Preuve: calculons dans le modèle du disque l'aire du disque de rayon R centré à l'origine; il vient:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\operatorname{Th} R} \frac{\rho d\rho d\theta}{(1-\rho^2)^2} = \pi \frac{\operatorname{Th}^2 R}{1-\operatorname{Th}^2 R} = \pi \operatorname{Sh}^2 R, \text{ tandis que la longueur de sa circonférence est } \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Th} R d\theta}{1-\operatorname{Th}^2 R} = 2\pi \operatorname{Sh} R \operatorname{Ch} R = \pi \operatorname{Sh} 2R. \blacksquare$$

Quand R tend vers l'infini, la plus grande partie de l'aire du disque se concentre donc vers le bord; une conséquence est que la précision de l'approximation du disque par le polygone régulier à n cotés inscrit, contrairement au cas euclidien, ne dépend pas que de n , mais aussi du rayon R ; d'ailleurs un tel polygone a, d'après les relations du paragraphe A, pour aire

$$(n-2)\pi - 2n \operatorname{Arc} \operatorname{Cotg} \left[\operatorname{Ch} R \operatorname{Tg} \frac{\pi}{n} \right] < (n-2)\pi.$$

Décrire tous les pavages réguliers, dégénérés ou non, du plan hyperbolique, revient à décrire les sous-groupes discrets du groupe des isométries et leurs "domaines fondamentaux" (les pavés permis), donc encore à décrire les sous-groupes discrets du groupe de matrices $SL_2(\mathbb{R})$. Ceux-ci, baptisés groupes "fuchsiens" par Poincaré, ont fait couler beaucoup d'encre: via le modèle du demi-plan, ce sont en effet les groupes de périodes possibles des "fonctions automorphes", ou encore, à peu de choses près, les groupes fondamentaux des "surfaces de Riemann."

On les classe d'après l'ordre de leurs éléments de type elliptique, et leurs sous-groupes formés d'éléments de types parabolique et hyperbolique. Il y en a énormément, en contraste frappant avec le plan euclidien, qui n'admet que dix-sept groupes de pavage.

C) QUELQUES QUESTIONS IMPRUDENTES

On livre ici à la sagacité (et à la patience) du lecteur quelques questions de géométrie hyperbolique dont l'équivalent euclidien fait l'objet d'un résultat bien connu :

- Quel est le lieu des points du plan qui voient deux points donnés sous un angle donné ? (ou quel est l'équivalent du théorème des angles inscrits?)
"Dualement", quel est le lieu des points du plan dont le rapport des distances à deux points donnés est une constante donnée ?
 - Quels sont les équivalents des théorèmes de Ménélaüs et de Ceva ? (étant donné un triangle ABC et des points P, Q, R sur les côtés BC, CA, AB , quelle condition sur les rapports dans lesquels P, Q, R divisent les segments BC, CA , et AB , exprime que les trois points sont alignés, ou que les trois droites AP, BQ, CR sont concourantes?)
 - Définir et étudier le cercle inscrit à un triangle. A-t-il des cercles exinscrits ?
 - Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont-ils alignés ? (équivalent du théorème de Newton)
 - Quel est l'équivalent du théorème (euclidien) de Ptolémée : le produit des diagonales d'un quadrilatère convexe est égal à la somme des produits des côtés opposés si et seulement si les sommets sont cocycliques ?
 - Définissons un parallélogramme comme un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. Quelles relations trigonométriques lient les côtés et les angles d'un parallélogramme ? Quels sont les parallélogrammes qui parent le plan ?
 - Y a-t-il des équivalents hyperboliques des théorèmes euclidiens "profonds" comme les théorèmes de Pappus et de Desargues ?
 - Quelle est la bonne notion de "conique" dans le plan hyperbolique ? Que donnent les différentes définitions géométriques usuelles ? Par exemple quel est le lieu des points équidistants d'un point et d'une droite ?
 - Les homothéties sont faciles à définir. Comment se composent-elles ? Quel est l'équivalent du groupe des dilatations ?
 - Étudier le groupe des similitudes, c'est-à-dire des bijections qui multiplient les distances par un rapport fixe ; se décomposent-elles canoniquement ? quel est leur effet sur les angles ? sur les coniques ?
-

VI) UN BOND DANS L'ESPACE

A) L'ESPACE DE LOBACHEVSKI

C'est un espace à trois dimensions dont toutes les droites sont élastiques et munies de deux points à l'horizon, et se regroupent dans des plans de Lobachewski munis d'horizons quasi-circulaires.

Un "modèle de Klein" de l'espace de Lobachewski est fourni par l'intérieur d'une quadrique projective propre convexe (l'ensemble des directions isotropes d'une forme quadratique de signature $(+++)$): les droites sont les segments intérieurs des droites projectives, et les plans les parties intérieures des plans projectifs; leurs points à l'horizon sont leurs intersections avec la quadrique-horizon: deux points pour chaque droite, une conique propre pour chaque plan.

Muni de la distance hyperbolique $\mathcal{D}(A, B) = \frac{1}{2} \log (A, B, B_{\infty}, A_{\infty})$, où A_{∞} et B_{∞} sont les horizons de la droite AB , de B vers A et de A vers B , l'espace de Lobachewski est un espace métrique (l'inégalité triangulaire a été démontrée au § II.A)

A une homographie près qui conserve toutes ces notions, on peut supposer que ce modèle est l'intérieur de la boule-unité B de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$: $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, et son horizon est alors la sphère-unité $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Il résulte de l'étude faite (en II et III) du plan de Lobachewski que

- par deux points passe une seule droite et par trois points non alignés un seul plan, qui contient la droite passant par deux de ses points
- les droites sont les géodésiques (lignes de plus court chemin) pour la métrique hyperbolique
- deux droites distinctes se trouvent dans un des quatre cas de figure suivants, et un seul:
 - elles sont concurrentes en un point de B (donc coplanaires)
 - elles sont parallèles, c'est-à-dire ont un point à l'horizon commun (et sont donc coplanaires)
 - elles sont disjointes, c'est-à-dire sans point ni horizon commun, mais toujours coplanaires
 - elles sont non coplanaires
- les angles étant définis par des produits scalaires infinitésimaux, la perpendiculaire menée d'un point à un plan est la droite dont le prolongement euclidien passe par le pôle du plan; lorsque celui-ci tourne autour d'une droite, ces perpendiculaires balayent le plan passant par la polaire de la droite (par rapport à l'horizon)...

- le lieu des points à distance donnée d'un point donné est un ellipsoïde ... ; en particulier le modèle de Klein n'est pas conforme.

On peut encore en déduire un modèle conforme (mais plongé dans $\mathbb{R}^4$) en relevant verticalement B sur l'hémisphère-unité

$$\Sigma^+ = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \text{ et } t > 0\}$$

par $(x, y, z) \mapsto (x, y, z, \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2})$; l'horizon H est conservé, les droites et les plans se relèvent en des demi-cercles et demi-2-sphères qui sont "verticaux", c'est-à-dire orthogonaux à B ; le même calcul qu'en I.C. donne encore que l'élément de longueur hyperbolique transporté sur Σ^+ est l'élément de longueur euclidien divisé par la hauteur t ; en particulier il ne dépend que du point, et le modèle Σ^+ est conforme.

L'inversion (dans $\mathbb{R}^4$) de pôle $(0, 0, 0, 1)$ et de puissance 2 est alors une transformation conforme de Σ^+ en B , qui conserve les angles, la cocyclicité de trois points et la cosphéricité de quatre. Le nouveau modèle obtenu de l'espace de Lichnerowicz est conforme et plongé dans $\mathbb{R}^3$: c'est la boule de Poincaré B :

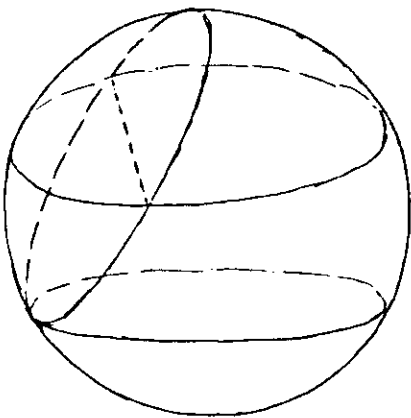
$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, d'horizon $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$; la "droite" passant par deux points A et B est l'arc intérieur à B du cercle euclidien passant par A et B et orthogonal à H , et s'il coupe H en A_0 et B_0 , ce sont ses points à l'horizon, et

$$\delta(A, B) = |\text{Log}(A, B, A_0, B_0)|$$

le birapport étant celui de quatre points d'une conique propre; le "plan" passant par trois points A, B, C non alignés est la calotte à l'intérieur de B de la sphère euclidienne passant par A, B, C et orthogonale à H , et son horizon est le cercle suivant lequel il coupe H .

Remarquons enfin ici que la position mutuelle de deux plans est l'une des trois suivantes (selon la position mutuelle de leurs horizons, qui sont des cercles de H):

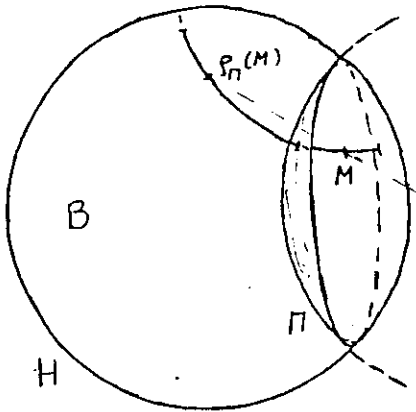
- ou bien ils sont sécants, ayant en commun une droite et ses deux points à l'horizon
- ou bien ils sont "parallèles", n'ayant en commun qu'un seul point à l'horizon
- ou bien enfin ils sont disjoints, n'ayant aucun point commun, même à l'horizon.



B) LE POINT DE VUE DE HÖBBIUS

Dans le modèle de la boule B de Poincaré, une "sphère" de centre A , c'est-à-dire le lieu des points à distance donnée de A , est une sphère (euclidienne) du faisceau engendré par la sphère-point A et la sphère horizon H , puisque par conformité elle est orthogonale à tous les cercles passant par A et orthogonaux à H , donc à toutes les sphères passant par A et orthogonales à H , c'est-à-dire à tous les "plans" (hyperhélicques) passant par A .

Soit Π une sphère de $\mathbb{R}^3$: l'inversion dont la sphère de points fixes est Π conserve globalement une sphère Σ si et seulement si Σ et Π sont orthogonales; une telle inversion $\mathcal{I}_\Pi$ conserve donc H , et par suite B , globalement si et seulement si Π est orthogonale à H .



Cette inversion $\mathcal{I}_\Pi$ est alors une isométrie de B , la "réflexion sur le plan Π ":

elle conserve en effet globalement tout cercle orthogonal à Π et à H , c'est-à-dire toute géodésique de B orthogonale au plan Π , et le reste a alors déjà été vérifié au début de § IV-C.

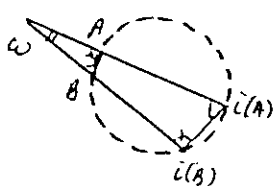
Les inversions engendrent le "groupe de Möbius" de transformations de $\mathbb{R}^3$ (complété par un seul point à l'infini). Ce groupe conserve la cocyclicité de quatre points et la

cosphéricité de cinq points, ainsi que les angles; il contient les réflexions orthogonales sur un plan (conjuguées d'une inversion de sphère Σ par une inversion de pôle sur Σ), donc toutes les isométries (euclidiennes); de même il contient les homothéties (produits d'inversions de sphères concentriques), donc aussi toutes les similitudes (euclidiennes).

On peut encore le caractériser comme le groupe des transformations de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ qui conservent le birapport de quatre points défini comme le birapport de leurs distances euclidiennes (avec la convention habituelle pour ∞):

$$(A, B, C, D) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|}$$

Preuve: Une inversion i de pôle ω et de puissance k^2 y satisfait, puisque



$$\frac{|i(A)i(B)|}{|AB|} = \frac{|\omega i(A)|}{|\omega A|} = \frac{k^2}{|\omega A||\omega B|}; \text{ donc tout élément du groupe}$$

de Möbius aussi. Réciproquement une transformation f de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ conservant le birapport, on peut supposer, grâce à la composition avec une inversion, que $f(\infty) = \infty$, et dans ce cas

f conserve, pour quatre points A, B, C, D de $\mathbb{R}^3$, le quotient

$$\frac{(\infty, B, C, D)}{(A, B, \infty, D)}, \text{ c'est-à-dire } \frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|f(A)f(D)|}{|f(B)f(C)|}, \text{ d'où } \frac{|f(A)f(D)|}{|AD|} = \frac{|f(B)f(C)|}{|BC|},$$

et f est donc une similitude. ■

Soit G le sous-groupe du groupe de Möbius des transformations de Möbius qui conservent globalement la sphère-unité H et son intérieur B .

G n'est autre que le groupe des isométries de l'espace hyperbolique (dans son modèle la boule B de Poincaré)

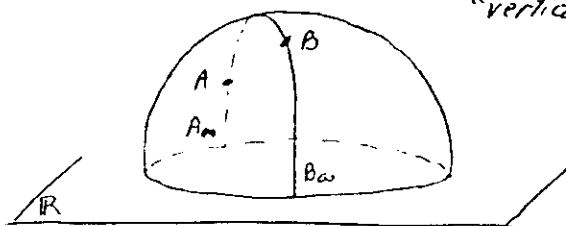
Preuve. Soit $f \in G$; quitte à la composer avec une réflexion sur un plan Π (sphère orthogonale à H) convenable (le "plan médiateur" de $O f(O)$), on peut supposer que $f(O) = O$. Si Σ est un plan passant par O , $f(\Sigma)$ est alors une sphère passant par O et orthogonale à H , donc encore un plan passant par O ; on en déduit que $f(Os) = Os$ (Os étant le seul point commun à tous ces plans); il résulte alors de la preuve précédente que f est une similitude; comme $f(O) = O$ et $f(H) = H$, f est une isométrie conservant O , donc un produit de réflexions orthogonales par rapport à des plans passant par O ; mais celles-ci sont des isométries (hyperboliques) de B .

Réciproquement, une isométrie hyperbolique de B est un produit d'au plus quatre réflexions sur des plans hyperboliques (on le prouve en la composant avec de telles réflexions, par un raisonnement analogue à celui qu'en a fait dans le plan à la fin du §IX-B, page 21), c'est-à-dire des inversions de sphères orthogonales à H , ou réflexions sur des plans diamétraux, toutes transformations de Möbius conservant H et B . ■

(En fait la preuve montre que G est engendré par les inversions qu'il contient.)

Outre une description relativement explicite du groupe des isométries de l'espace hyperbolique, ce "point de vue de Möbius" nous fournit un moyen de fabriquer aussi un nouveau modèle, par transport de structure de B sur son image par une transformation de Möbius; en particulier on construit ainsi l'analogue du demi-plan de Poincaré à trois dimensions: l'inversion de pôle $(0, 0, -1)$ et de puissance 2 transforme H en $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ (plus ∞), et B en le demi-espace

$E^+ = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t > 0\}$, nouveau modèle de l'espace hyperbolique, où les géodésiques sont les demi-cercles verticaux et orthogonaux à $\mathbb{R}$, la distance $d(A, B)$ étant $|\text{Log}(A/B, B_\infty, A_\infty)|$. A_∞ et B_∞ étant les horizons de la géodésique AB (intersections avec $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$), et où les "plans" hyperboliques sont les demi-sphères centrées sur $\mathbb{R}$ et les demi-plans "verticaux".



Dans le modèle B , il était clair (pour restriction à un plan diamétral) que l'élément de longueur au point M était $\frac{dH}{1-|OM|^2}$, et on en tire par le même

calcul qu'au §II-A que dans le modèle E^+ , l'élément de longueur au point (x, y, t) est $\frac{ds}{t}$, et par suite l'élément de volume est $\frac{dx dy dt}{t^3}$

Comme les plans hyperboliques du modèle E^+ de l'espace se présentent naturellement dans les modèles " Σ^+ " ou "demi-plan de Poincaré", une bonne partie des chapitres II et V se généralise sans aucun calcul. Ainsi par exemple il est clair que les "sphères" (hyperboliques) de centre $A \in E^+$ sont les sphères du faisceau engendré par la sphère-point A et la sphère horizon R^2 ; on obtient sans peine leurs équations, ainsi que celles des plans médiateurs de deux points, etc.

Il faut d'ailleurs remarquer ici que le point de vue de Möbius fournit aussitôt une réalisation de l'espace hyperbolique de toute dimension n , ainsi qu'une description de son groupe d'isométries, et qu'en avait déjà pu en tirer parti pour décrire le plan hyperbolique ($n=2$), et même la droite élastique ($n=1$), et ceci au moins sous les deux formes "boule-unité" et "demi-espace".

Cependant ce traitement "unifiant" cache des propriétés particulières de l'espace hyperbolique de dimension 1, 2, et 3; mentionnons:

- ce n'est qu'en dimension 1 que l'espace hyperbolique est isométrique à un espace euclidien
- en dimension 2, le plan hyperbolique est susceptible de beaucoup de modèles conformes plongés dans le plan euclidien, aussi "biscornus" que l'on veut, comme on l'a déjà remarqué au début du § III-B, alors qu'à partir de la dimension 3, seuls sont permis les deux modèles décrits ci-dessus, boule et demi-espace; cela vient de ce que le "groupe conforme" (groupe des transformations qui conservent les angles) se réduit dans ce cas au groupe de Möbius, alors qu'il est beaucoup plus gros en dimension 2 (transformations bi-holomorphes et anti-holomorphes).
- le cas de l'espace hyperbolique de dimension 3 est évidemment particulièrement intéressant, puisqu'il s'agit de notre univers, ou plutôt de sa "photo": la vision spatiale instantanée de l'espace-temps relativiste (la généralisation du § III-C est immédiate, à toute dimension d'ailleurs).

On vient d'expliquer pourquoi un modèle conforme de cet espace est beaucoup plus rigide que pour le plan. Mais sa structure s'enrichit aussi d'une propriété qui lui est tout-à-fait particulière: l'existence du corps des quaternions permet en effet une présentation de cet espace, et une description particulièrement simple du groupe de ses isométries, qui ne vaut qu'en dimension 3, et est développée ici au paragraphe D, après les rappels nécessaires (§C).

C) LE CORPS DES QUATERNIONS

Dans l'anneau $M_2(\mathbb{C})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients complexes, considérons l'ensemble $\mathbb{H}$ des matrices de la forme $q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$, avec $z, w \in \mathbb{C}$. $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre de dimension 4, et de base

"canonique" $\left\{ 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$

pour le produit induit par $M_2(\mathbb{C})$, pour lequel 1 est l'unité et $ij = k, jk = i, ki = j; ji = -k, kj = -i, ik = -j; i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

Un "quaternion", c'est-à-dire un élément q de $\mathbb{H}$ s'écrit de façon unique $q = z + wj$, avec $z, w \in \mathbb{C}$, et comme $jz = \bar{z}j$, il vient

$$(z + wj)(\bar{z} - wj) = |z|^2 + |w|^2 = \det q$$

Posant alors $|q|^2 = \det q$, et pour $q = z + wj = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$, $q^* = \bar{z} - wj = \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix}$ on voit que $\mathbb{H}$ est un corps (non commutatif) normé (on a $|qq'| = |q||q'|$)

cù $q \neq 0 \Rightarrow q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$, et dont les éléments de norme 1 forment un groupe $\mathbb{H}_1$, pour la multiplication; il est clair que $\mathbb{H}_1 \subset SL(2, \mathbb{C})$, et qu'il est compact pour la topologie de la norme, qui est la même que celle induite par $M_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^4$. Ce groupe n'est autre que le groupe spécial unitaire:

$$SU(2) = \mathbb{H}_1 = \mathbb{H} \cap SL(2, \mathbb{C})$$

Preuve: Si $q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_1 = \mathbb{H} \cap SL(2, \mathbb{C})$, on a $|z|^2 + |w|^2 = 1$,

d'où $q^*q = \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc q est unitaire, et $\det q = |q|^2 = 1$

Réciproquement si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$, comme

$$\begin{aligned} |a - \bar{d}|^2 + |b + \bar{c}|^2 &= (a - \bar{d})(\bar{a} - d) + (b + \bar{c})(\bar{b} + c) \\ &= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 - (ad - bc) - (\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}) \\ &= \operatorname{tr}(A^*A) - 2\operatorname{Re}(\det A) = \operatorname{tr} I - 2 = 0, \end{aligned}$$

on a $d = \bar{a}$ et $c = -\bar{b}$, donc $A \in \mathbb{H} \cap SL(2, \mathbb{C}) = \mathbb{H}_1$. ■

(En particulier $SU(2)$ s'identifie ainsi à la sphère-unité S^3 de $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$)

La représentation de conjugaison ρ de $SU(2)$ dans $M_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} q &\mapsto \rho_q : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto qMq^{-1} \end{aligned}$$

commute à l'adjonction: $\rho_q(M^*) = qM^*q^* = (qMq^*)^* = (\rho_q(M))^*$

et conserve la norme de Hilbert-Schmidt:

$$\operatorname{tr}(\rho_q(M)^*\rho_q(M)) = \operatorname{tr} qM^*q^*qMq^* = \operatorname{tr} M^*M$$

C'est donc une représentation unitaire de $SU(2)$ dans $\mathbb{C}^4$, qui se restreint aux matrices antihermitiennes d'une part, aux quaternions d'autre part, donc au $\mathbb{R}$ -espace vectoriel intersection des deux, qui n'est autre que l'espace $\mathbb{H}'$ des quaternions "imaginaires purs": $\mathbb{H}' = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k = \{q \in \mathbb{H} \mid q^* = -q\}$, d'où un morphisme de $SU(2)$ dans $SO(3)$, qui n'est autre que le revêtement universel de celui-ci.

D) ISOMÉTRIES DE L'ESPACE

L'existence du corps des quaternions permet une description du groupe des isométries de l'espace de Lobachewski (de dimension 3) entièrement analogue à celle qu'on a donnée dans le cas du plan (chapitre IV, §B). On plonge $\mathbb{C}$ dans le sous-espace (réel) de $\mathbb{H}$ des quaternions de la forme $z + tj$, avec $z \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$; l'inversion de pôle $-j$ et de rapport 2 est une isométrie entre les deux modèles de l'espace hyperbolique décrits au §B : la boule-unité et le demi-espace supérieur $E^+ = \{z + tj \mid t > 0\}$.

Le groupe G^+ des isométries directes de l'espace hyperbolique dévient alors le groupe des transformations de la forme :

$$E^+ \ni p = z + tj \xrightarrow{h_M} h_M(p) = (a(z + tj) + b)(c(z + tj) + d)^{-1}$$

où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$. (Le produit, non commutatif, se calcule dans $\mathbb{H}$).

En particulier G^+ est isomorphe à $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm \text{id}\}$.

En effet, d'après le §B, G est engendré par les inversions de sphères fixes centrées dans $\mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}} = \partial E^+$, et des produits de deux telles inversions donnent tous les "translations horizontales", $p \mapsto p + z_0$ ($z_0 \in \mathbb{C}$), et les "homothéties" de rapport positif de centre 0, $p \mapsto ap$ ($a > 0$); or celles-ci correspondent aux matrices M de $SL(2, \mathbb{C})$ de la forme $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$, et suffisent à ramener n'importe quel point $p \in E^+$ au point j .

On peut donc ne discuter que des isométries h de E^+ telles que $h(j) = j$. Mais si $h_M(j) = j$, soit $aj + b = j(cj + d) = \bar{c}j^2 + \bar{d}j = -\bar{c} + \bar{d}j$, il vient $d = \bar{a}$ et $c = -\bar{b}$, et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \cap \mathbb{H} = \mathbb{H}_1 = SU(2)$.

Un transport dans le modèle de la boule change alors $SU(2)$ en le groupe de toutes ses isométries conservant le centre 0, et on est ramené à la discussion du §B ... ■

Quelques remarques s'imposent, en guise de conclusion.

— Cette esquisse de démonstration n'éclaire pas la géométrie de l'espace hyperbolique : il conviendrait de développer dans l'espace l'analogue, très riche, des chapitres IV et V : classification des isométries, après les avoir décomposées en produits de réflexions, formulaire trigonométrique, groupes discrets et pavages ...

— Comme dans le cas du plan, la preuve ci-dessus démontre en même temps et en quelque sorte "géométriquement" une formule de décomposition (dite d'Iwasawa) de $SL(2, \mathbb{C})$: tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ s'écrit de façon unique $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $A \in SU(2)$.

Comme une telle décomposition a un analogue en remplaçant G par n'importe quel groupe de Lie semi-simple, l'espace hyperbolique apparaît comme un exemple d'une structure plus générale, qui en admet beaucoup d'autres (exemples !): la notion d'espace riemannien symétrique (de type non compact) G/K , où G est son groupe d'isométries, et K le sous-groupe stabilisateur d'un point (G est alors un groupe de Lie semi-simple, et K un sous-groupe compact maximal): autant de géométries fascinantes à étudier (une référence de base est alors le livre de S. Helgason "Groups and geometric analysis", Acad. Press 1984). La partie "arithmétique" de la théorie (sous-groupes discrets, fonctions périodiques et parages) devient alors infiniment riche et mystérieuse.

— Revenant à nos moultins hyperboliques, la partie compacte du groupe, ici $SU(2)$, donne un riche groupe de "rotations": on peut démontrer que toute matrice de $SU(2)$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix} \quad (\varphi, \psi, \theta \in \mathbb{R})$$

les extrêmes donnent la transformation de E^+

$$z + tj \mapsto e^{2i\varphi} z + tj \quad (\text{rotation "horizontale"}),$$

l'autre l'analogue formel des "rotations" hyperboliques du plan, qui ne se distingue plus des autres dans le modèle de la boule...

— L'écriture " $SL(2, \mathbb{C})$ " des isométries de l'espace hyperbolique est un puissant outil de calcul (mais délicat: non commutativité des produits écrits) qui n'a pas d'analogue dans les dimensions suivantes: elle n'est due en effet qu'à l'existence du corps des quaternions, point singulier dans la famille des $\mathbb{R}$ -algèbres, auquel l'espace hyperbolique H_3 (c'est-à-dire le nôtre!) est donc lié. Pour s'en convaincre, on peut remarquer que le produit des quaternions n'est autre que le produit "géométrique" suivant de l'"espace-temps" $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$:

$$(t, \vec{v})(t', \vec{v}') = (tt' - \vec{v} \cdot \vec{v}', t\vec{v}' + t'\vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{v}')$$

c'est donc lui qui "crée" les notions de produits scalaire et vectoriel qui permettent l'écriture de beaucoup de lois physiques...

(En d'autres termes: Dieu n'avait pas le choix!)

