CHAPITRE I - LES INVARIANTS DU GROUPE ENGENDRÉ PAR UNE MATRICE DE JORDAN

§1 LA BIGRADUATION NATURELLE

<u>1.1</u> K est un corps de caractéristique nulle. Soit $\Gamma = \{\exp tJ \mid t \in K\}$ le groupe à un paramètre d'automorphismes de K^n de générateur infinitésimal la "matrice de Jordan"
$$J = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Γ agit sur $K[x_1, \dots, x_n]$ et $K(x_1, \dots, x_n)$ et dans chaque cas l'algèbre des invariants est le noyau de l'opérateur différentiel
$D = D_n = x_1\partial_2 + x_2\partial_3 + \dots + x_{n-1}\partial_n$ (on note $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$).

On notera ici $\mathcal{P}_n = K[x_1, \dots, x_n]$, $\mathcal{J}_n$ le noyau de D dans $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{R}_n$ son noyau dans $K(x_1, \dots, x_n)$. On appellera <u>degré</u> p et <u>poids</u> k du monôme $x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, les entiers

$$p = p(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$
$$k = k(\alpha) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n .$$

On notera $\mathcal{P}_n^p$ le sous-espace de $\mathcal{P}_n$ des polynômes homogènes de degré p, et $\mathcal{P}_n^{p,k}$ celui des polynômes bi-homogènes de degré p et de poids k, puis $\mathcal{J}_n^p = \mathcal{P}_n^p \cap \mathcal{J}_n$, $\mathcal{J}_n^{p,k} = \mathcal{P}_n^{p,k} \cap \mathcal{J}_n$, et enfin $d_n^p, d_n^{p,k}, s_n^p, s_n^{p,k}$ les dimensions respectives de $\mathcal{P}_n^p, \mathcal{P}_n^{p,k}, \mathcal{J}_n^p, \mathcal{J}_n^{p,k}$.

On a $\mathcal{P}_n = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n^p$; $\mathcal{P}_n^p = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n^{p,k}$; mais aussi $\mathcal{J}_n = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_n^p$, et $\mathcal{J}_n^p = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_n^{p,k}$, puisque visiblement $D(\mathcal{P}_n^{p,k}) \subset \mathcal{P}_n^{p,k-1}$.

1.2 On montre par une simple récurrence que $d_n^p = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!}$; par contre aucune formule explicite n'est connue pour $d_n^{p,k}$, δ_n^p, $\delta_n^{p,k}$.
Les $d_n^{p,k}$ sont les coefficients de la "série génératrice"

$$\sum_{p,k \in \mathbb{N}} d_n^{p,k} U^p V^k = \prod_{j=1}^{n} (1 - UV^j)^{-1}$$

Il est clair que $d_n^{p,k} > 0$ si $p \leq k \leq np$, $d_n^{p,k} = 0$ sinon, $d_n^{p,p} = d_n^{p,np} = 1$, enfin que $d_n^{p,k} = d_n^{p,(n+1)p-k}$ (par la correspondance $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leftrightarrow x_n^{\alpha_1} \dots x_1^{\alpha_n}$).

1.3 $d_n^{p,k}$ est le nombre de solutions $\alpha \in \mathbb{N}^n$ du système d'équations
$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = p \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = k \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} \alpha_2 + 2\alpha_3 + \dots + (n-1)\alpha_n = k-p \\ \alpha_1 = p - (\alpha_2 + \dots + \alpha_n) \end{cases}$
Si donc l'on note $e_n^{p,k}$ le nombre de solutions de $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq p \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = k \end{cases}$
il vient les relations :
$d_n^{p,k} = e_n^{p,k} - e_n^{p-1,k}$, $d_n^{p,k} = e_{n-1}^{p,k-p}$, puis $e_n^{p,k} = e_n^{p-1,k} + e_{n-1}^{p,k-p}$, et
$e_n^{p,k} = d_{n+1}^{p,k+p} = \sum_{j=1}^{p} d_n^{j,k}$, où la dernière somme porte en fait sur l'intervalle $\frac{k}{n} \leq j \leq \inf(p,k)$. En classant les monômes suivant les puissances de x_n, on montre aussi : $d_n^{p,k} = d_{n-1}^{p,k} + d_n^{p-1,k-n}$, et $d_n^{p,k} = \sum_j d_{n-1}^{p-j,\,k-nj}$
la dernière somme portant en fait sur l'intervalle $\sup\{0, k-(n-1)p\} \leq j \leq \frac{k-p}{n-1}$.

1.4 Les $d_\infty^{p,k}$ sont étudiés sous un autre nom dans [2], où l'on peut trouver beaucoup de formules de récurrence, et ce sont des fonctions croissantes de k. La monotonie de la fonction $d_n^{p,k}$ de la variable k est précisée ici au §2, ainsi que des formules explicitant δ_n^p et $\delta_n^{p,k}$ en fonction des $d_n^{p,k}$ (corollaire 2.4).

Quelques valeurs numériques utiles sont dispersées dans ce chapitre (2.5, 4.5, fin du §3). Enfin des tables pour $n=6$ ou 7 et $p \leq 20$ figurent au chapitre II.

§2 UNE STRUCTURE DE $\mathfrak{sl}(2,K)$-MODULE

2.1 Posons: $D = D_n = x_1\partial_2 + x_2\partial_3 + \dots + x_{n-1}\partial_n = \sum_{j=2}^{n} x_{j-1}\partial_j$,

$D' = D'_n = (n-1)x_n\partial_{n-1} + 2(n-2)x_{n-1}\partial_{n-2} + \dots + (n-1)x_2\partial_1 = \sum_{j=1}^{n-1} j(n-j)x_{j+1}\partial_j$,

$H = H_n = (n-1)x_1\partial_1 + (n-3)x_2\partial_2 + \dots + (1-n)x_n\partial_n = \sum_{j=1}^{n} (n+1-2j)\, x_j\partial_j$

On a visiblement $[H,D] = 2D$, $[H,D'] = -2D'$, $[D,D'] = H$, et
$D(\mathcal{P}_n^{p,k}) \subset \mathcal{P}_n^{p,k-1}$, $D'(\mathcal{P}_n^{p,k}) \subset \mathcal{P}_n^{p,k+1}$, $H(\mathcal{P}_n^{p,k}) \subset \mathcal{P}_n^{p,k}$.

2.2 Proposition: (a) Les formules $\rho_n\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = H_n$, $\rho_n\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = D_n$, $\rho_n\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = D'_n$ se prolongent par linéarité en une représentation ρ_n de $\mathfrak{sl}(2,K)$ dans $\mathcal{P}_n$.
(b) Le $\mathfrak{sl}(2,K)$-module $\mathcal{P}_n$ ainsi défini est somme directe des sous-modules $\mathcal{P}_n^p$ $(p\in\mathbb{N})$, chacun de dimension finie d_n^p.

Preuve: C'est immédiat par 2.1, et le (b) implique que ρ_n s'intègre en une action rationnelle de $SL(2,K)$ sur $K[x_1,\dots,x_n]$. ■

2.3 Corollaire: (a) $D_n : \mathcal{P}_n^{p,k} \longrightarrow \mathcal{P}_n^{p,k-1}$ est surjectif pour $k \le \frac{(n+1)p}{2}$, injectif pour $k > \frac{(n+1)p}{2}$
(b) $D'_n : \mathcal{P}_n^{p,k} \longrightarrow \mathcal{P}_n^{p,k+1}$ est injectif pour $k < \frac{(n+1)p}{2}$, surjectif pour $k \geq \frac{(n+1)p}{2}$
(c) $H_n : \mathcal{P}_n^{p,k} \longrightarrow \mathcal{P}_n^{p,k}$ est l'homothétie de rapport $(n+1)p-2k$.

Preuve: Le (c) n'est que l'identité d'Euler. Le $\mathfrak{sl}(2,K)$-module de dimension finie $\mathcal{P}_n^p$ est une somme directe finie de $\mathfrak{sl}(2,K)$-modules irréductibles V_j, dans chacun desquels H_n est l'homothétie de rapport $(n+1)p-2k$. Il s'ensuit que la théorie classique des $\mathfrak{sl}(2,K)$-modules irréductibles (telle qu'elle est par exemple exposée dans [7], théorème 1.8.4) s'applique ici: on n'a pas à supposer K algébriquement clos, et si V_j est de dimension ℓ_j+1, on a:
$\dim V_j \cap \mathcal{P}_n^{p,k} = 1$ si $\left|k - \frac{(n+1)p}{2}\right| \le \frac{\ell_j}{2}$, et 0 sinon,
de plus D_n et D'_n sont de rang maximal (1 ou 0) sur chaque $V_j \cap \mathcal{P}_n^{p,k}$.
Le (a) et le (b) s'en déduisent en sommant sur j. ■

<u>Remarque</u> : Si n est pair et p impair, D_n est bijectif, donc encore surjectif pour $k = \left[\frac{(n+1)p}{2}\right] + 1$. (On note $[\cdot]$ une partie entière).

<u>2.4</u> <u>Corollaire</u> : (a) <u>$d_n^{p,k}$ est, pour n et p fixés, une fonction de k nulle en dehors de l'intervalle $\{p, np\}$, croissante sur $\{p, \frac{(n+1)p}{2}\}$, décroissante sur $\{\frac{(n+1)p}{2}, np\}$, paire par rapport à $k - \frac{(n+1)p}{2}$</u>.

(b) $\delta_n^{p,k} = d_n^{p,k} - d_n^{p,k-1}$ <u>si</u> $k \leq \frac{(n+1)p}{2}$, 0 <u>sinon</u>

(c) $\delta_n^p = \sum_k \delta_n^{p,k} = \sup_k d_n^{p,k} = d_n^{p, \left[\frac{(n+1)p}{2}\right]}$

<u>Preuve</u> : Le (a) s'obtient en sommant les dimensions des $V_j \cap \mathcal{P}_n^{p,k}$ sur toutes les composantes irréductibles V_j. Le (b) se déduit du (a) et de 2.3.(a), le (c) aussitôt du (b) et du (a). ∎

<u>2.5</u> <u>Remarque</u> : Il se produit que $\mathcal{P}_n^p$ ait plusieurs composantes irréductibles de même dimension, en tant que $sl(2,K)$-module. Par exemple $d_6^4 = 126$, et $d_6^{4,k} = 1, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 11, 12$ $(4 \leq k \leq 14)$, d'où

$$\delta_6^{4,k} = \begin{cases} 0 \text{ pour } k = 5, 13, \text{ pour } k \leq 3 \text{ et pour } k \geq 15 \\ 1 \text{ pour } k = 4, 6, 7, 9, 11, 14 \\ 2 \text{ pour } k = 8, 10, 12 \end{cases}$$

et $\delta_6^4 = 12 = d_6^{4,14}$. On voit que $\mathcal{P}_6^4$ a deux composantes irréductibles de dimension 5, 7, ou 9.

<u>2.6</u> $\mathcal{P}_n^{p,k}$ est la somme directe de $\operatorname{Im} D : \mathcal{P}_n^{p,k+1} \to \mathcal{P}_n^{p,k}$ et de $\operatorname{Ker} D' : \mathcal{P}_n^{p,k} \to \mathcal{P}_n^{p,k+1}$, puisque c'est vrai dans chaque V_j. Il s'ensuit que $\mathcal{P}_n^p$ d'abord, puis $\mathcal{P}_n$ sont eux-mêmes sommes directes de $\operatorname{Ker} D$ et $\operatorname{Im} D'$. On peut bien sûr échanger les rôles de D et D'.

<u>2.7</u> Fixons un sous-module irréductible V de $\mathcal{P}_n^p$, de dimension $(n-1)p - 2\ell + 1$, et soit P un élément non nul de $V \cap \mathcal{P}_n^{p,k}$. Par 2.3, on a $\ell \leq k$, et par la théorie classique des $sl(2,K)$-modules :

$$DD'P = (k-\ell+1)[(n+1)p - k - \ell]\,P$$
$$D'DP = (k-\ell)\,[(n+1)p - k - \ell + 1]\,P$$
$$HP = [(n+1)p - 2k]\,P$$

D'où toujours par 2.3 et pour $k \leq \frac{(n+1)p}{2}$:

$P \in \operatorname{Ker} D \Leftrightarrow P \in \operatorname{Ker} D'D \Leftrightarrow k = \ell \Leftrightarrow DD'P = [(n+1)p - 2k]\, P$.

C'est dire que $\mathcal{S}_n^{p,k}$ <u>est pour</u> $k \leq \frac{(n+1)p}{2}$ (<u>sinon</u> $\mathcal{S}_n^{p,k} = \{0\}$), <u>l'espace propre de</u> $DD' : \mathcal{P}_n^{p,k} \to \mathcal{P}_n^{p,k}$ <u>pour la valeur propre $(n+1)p - 2k$.</u>

Notons ici que

$$DD' = \sum_{i,j=1}^{n-1} j(n-j)\, x_i x_{j+1} \partial_{i+1} \partial_j \quad + \sum_{j=1}^{n-1} j(n-j)\, x_j \partial_j$$

$$D'D = \sum_{i,j=1}^{n-1} j(n-j)\, x_i x_{j+1} \partial_{i+1} \partial_j \quad + \sum_{j=1}^{n-1} j(n-j)\, x_{j+1} \partial_{j+1}$$

En particulier, dans $\mathcal{P}_n$: $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} D'D$, et $\operatorname{Im} D' = \operatorname{Im} D'D$.
(On aurait de même $\operatorname{Ker} D' = \operatorname{Ker} DD'$ et $\operatorname{Im} D = \operatorname{Im} DD'$).

<u>2.8</u> On peut itérer les raisonnements ci-dessus, et montrer par exemple que $\dim \operatorname{Ker} \{ D^q : \mathcal{P}_n^{p,k} \to \mathcal{P}_n^{p,k-q} \} = \sup(0, d_n^{p,k} - d_n^{p,k-q})$ $(q \in \mathbb{N})$.

<u>2.9</u> Notons ω le projecteur linéaire ("de Reynolds") sur $\operatorname{Ker} D'D$ parallèlement à $\operatorname{Im} D'D$ et G le groupe linéaire algébrique engendré dans $SL(n, K)$ par la matrice-produit

$$\begin{bmatrix} 0 & (n-1) & & & (0) \\ & \ddots & 2(n-2) & & \\ & & \ddots & j(n-j) & \\ & (0) & & \ddots & (n-1) \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & & (0) \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & (0) & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

G agit dans $\mathcal{P}_n$, comme groupe de générateur infinitésimal $D'D$, et ω commute donc à G

Comme $\operatorname{Ker} D'D = \operatorname{Ker} D$, les polynômes G-invariants sont précisément les éléments de $\mathcal{S}_n$.

<u>Lemme</u>. <u>Si $P \in \mathcal{S}_n$ et $Q \in \mathcal{P}_n$, $\omega(PQ) = P\omega(Q)$</u>

<u>Preuve</u>: L'application $Q \mapsto PQ$ est un morphisme de G-modules de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathcal{P}_n$, et commute donc à ω. ∎

2.10 Proposition : *L'algèbre $\mathcal{S}_n$ est de type fini.*

Preuve : Soit I un idéal de $\mathcal{S}_n$; $\mathcal{P}_n I$ est un idéal de l'algèbre noethérienne $\mathcal{P}_n$, donc de type fini : on peut trouver $s \in \mathbb{N}$, puis $Q_1, \dots, Q_s \in \mathcal{P}_n I$, tels que

$$\mathcal{P}_n I = \mathcal{P}_n Q_1 + \dots + \mathcal{P}_n Q_s .$$

En particulier on peut trouver $P_1, \dots, P_s \in I$ tels que

$$I \subset \mathcal{P}_n I = \mathcal{P}_n P_1 + \dots + \mathcal{P}_n P_s .$$

Par lemme 2.9, il vient alors, puisque $\omega(\mathcal{P}_n) = \mathcal{S}_n$

$$I = \omega(I) \subset \mathcal{S}_n P_1 + \dots + \mathcal{S}_n P_s$$

C'est dire que $\mathcal{S}_n$ est noethérienne. Mais c'est l'algèbre des invariants de G dans $\mathcal{P}_n$, et sa bigraduation naturelle est conservée par $D'D$, donc par G. La proposition s'en déduit par un raisonnement classique : l'ensemble $\mathcal{S}_n^+$ des éléments de $\mathcal{S}_n$ sans terme constant est en particulier un idéal de type fini, et il existe $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{S}_n^+$ tels que $\mathcal{S}_n^+ \subset \mathcal{S}_n A_1 + \dots + \mathcal{S}_n A_r$; de plus on peut supposer A_j homogène de degré $p_j > 0$.
Si $P \in \mathcal{S}_n^+$ est homogène de degré $p > 0$, il existe donc $B_1, \dots, B_r \in \mathcal{S}_n$ tels que $P = B_1 A_1 + \dots + B_r A_r$, et en séparant les degrés, on peut supposer C_j homogène de degré $p - p_j < p$ $(j = 1, \dots, r)$. Il est donc clair par récurrence sur p que tout élément de $\mathcal{S}_n$ est un polynôme de $A_1, \dots, A_r$. ∎

2.11 La proposition précédente est en fait un cas particulier de plusieurs énoncés récents, beaucoup moins élémentaires : par exemple elle est contenue dans le théorème du §7, n°4 de l'article de F. Grosshans [11] sur les sous-groupes "observables" des groupes linéaires algébriques, d'après le théorème 3 du même article ; c'est aussi un cas où s'applique le théorème de [14].

§3 LE CORPS DES INVARIANTS RATIONNELS

<u>3.1</u> Le corps $\mathcal{R}_n$ des invariants rationnels, c'est-à-dire le noyau de D dans $K(x_1,\ldots,x_n)$ est, comme on l'a rappelé dans l'introduction, une extension transcendante pure de K de degré $n-1$. Nous dirons qu'un système $\{R_1,\ldots,R_{n-1}\}$ d'éléments de $\mathcal{R}_n$ est une <u>base</u> de $\mathcal{R}_n$ si le morphisme $\varphi : K(x_1,\ldots,x_{n-1}) \longrightarrow \mathcal{R}_n$ défini par $\varphi(x_j) = R_j$ $(j=1,\ldots,n-1)$ est un isomorphisme.

On décrit dans ce paragraphe trois bases explicites de $\mathcal{R}_n$. Comme D est bihomogène, $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{R}_n$ sont engendrés par leurs éléments bihomogènes (de degré et poids donnés), et il est donc naturel de chercher des bases de $\mathcal{R}_n$ formées d'éléments bihomogènes de $\mathcal{S}_n$. C'est le cas de celles citées ici.

<u>3.2</u> Posons $Z_1 = x_1$, et pour $j \geq 2$, $Z_j = x_2^j + \sum_{k=0}^{j-2} \frac{(-1)^{j-k+1}\, j!}{(j-1)\, k!} x_1^{j-k-1} x_2^k x_{j-k+1}$.

Pour $j\geq 2$, on voit que $Z_j \in \mathcal{S}_{j+1}^{j,2j}$, et $Z_j \equiv x_2^j$ modulo x_1 ;

Pour $j,k \geq 2$, $Z_j^k - Z_k^j$ est divisible par x_1^2 dans $K[x_1,\ldots,x_{\sup(j,k)+1}]$.

On aura par exemple :

$Z_2 = x_2^2 - 2x_1x_3$; $Z_3 = x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4$;

$Z_4 = x_2^4 - 4x_1x_2^2x_3 + 8x_1^2x_2x_4 - 8x_1^3x_5$;

$Z_5 = x_2^5 - 5x_1x_2^3x_3 + 15x_1^2x_2^2x_4 - 30x_1^3x_2x_5 + 30x_1^4x_6$;

$Z_6 = x_2^6 - 6x_1x_2^4x_3 + 24x_1^2x_2^3x_4 - 72x_1^3x_2^2x_5 - 144x_1^4x_2x_6 + 144x_1^5x_7$; ...

<u>3.3</u> <u>Proposition</u> : $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}\}$ <u>est une base de</u> $\mathcal{R}_n$.

<u>Preuve</u> : Le jacobien de $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \overset{\alpha}{\longmapsto} (Z_1,x_2,Z_2,\ldots,Z_{n-1})$ vaut $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)!(n-3)!(n-4)!\ldots 1!\, x_1^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}$. En particulier, c'est un changement de coordonnées birationnel. Comme $\alpha_*(D) = Z_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$, il vient $\mathcal{R}_n = \alpha^*(K(Z_1,Z_2,\ldots,Z_{n-1}))$. ■

<u>3.4 Lemme</u> : <u>Une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_n^2$</u> <u>est</u> $\{Z_1^2, Y_2, Y_4, \dots, Y_{2[\frac{n-1}{2}]}\}$

<u>où</u> $Y_{2p} = x_{p+1}^2 - 2x_p x_{p+2} + 2x_{p-1}x_{p+3} + \cdots + (-1)^p 2x_1 x_{2p+1}$.

<u>Preuve</u> : Si $P = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \in \mathcal{P}_n^2$, et $0 = DP = \sum_{j=2}^{n} (a_{1j}+a_{j1}) x_1 x_{j-1} + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}(x_i x_{j-1} + x_{i-1} x_j)$

il vient $P = a_{11}x_1^2 + a_{22}(x_2^2 - 2x_1x_3) + a_{33}(x_3^2 - 2x_2x_4 + 2x_1x_5) + \cdots$ ■

Ainsi par exemple : $Y_2 = x_2^2 - 2x_1x_3 = Z_2$,

$Y_4 = x_3^2 - 2x_2x_4 + 2x_1x_5 = (4Z_1^2)^{-1}(Z_2^2 - Z_4)$,

$Y_6 = x_4^2 - 2x_3x_5 + 2x_2x_6 - 2x_1x_7 = (72Z_1^4)^{-1}(8Z_3^2 - 9Z_2Z_4 + Z_6)$,

$Y_8 = x_5^2 - 2x_4x_6 + 2x_3x_7 - 2x_2x_8 + 2x_1x_9$
$= (2.880\, Z_1^6)^{-1}(45Z_4^2 - 64Z_3Z_5 + 20Z_2Z_6 - Z_8)$

$Y_{10} = x_6^2 - 2x_5x_7 + 2x_4x_8 - 2x_3x_9 + 2x_2x_{10} - 2x_1x_{11}$
$= (201.600\, Z_1^8)^{-1}(224Z_5^2 - 350Z_4Z_6 + 160Z_3Z_7 - 35Z_2Z_8 + Z_{10})$

<u>3.5</u> Posons pour $p \geq 1$ $Q_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k+1}(2p+1-2k)\, x_{k+1} x_{2p+2-k} \in \mathcal{P}_{2p+2}^{2,2p+3}$.

puis $Y_{2p+1} = -x_2 x_{p+1}^2 + \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} x_{k+1}\{2x_2x_{2p+1-k} - (2p+1-2k)x_1x_{2p+2-k}\} \in \mathcal{P}_{2p+2}^{3,2p+4}$

<u>Lemme</u> : $Y_{2p+1} \in \mathcal{S}_{2p+2}^{3,2p+4}$ et $\frac{\partial Y_{2p+1}}{\partial x_{2p+2}} = (-1)^{p+1}(2p+1)x_1^2$.

<u>Preuve</u> : On vérifie aisément que $Y_{2p+1} = x_1 Q_p + x_2 Y_{2p}$,
et que $DQ_p = -Y_{2p}$, d'où $DY_{2p+1} = x_1(DQ_p) + (Dx_2)Y_{2p} = 0$. ■

Par exemple de $Q_1 = -x_2x_3 + 3x_1x_4$, $Q_2 = -x_3x_4 + 3x_2x_5 - 5x_1x_6$,
$Q_3 = -x_4x_5 + 3x_3x_6 - 5x_2x_7 + 7x_1x_8$, $Q_4 = -x_5x_6 + 3x_4x_7 - 5x_3x_8 + 7x_2x_9 - 9x_1x_{10}$,

on tire : $Y_3 = x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4 = Z_3$

$Y_5 = x_2x_3^2 - 2x_2^2x_4 - x_1x_3x_4 + 5x_1x_2x_5 - 5x_1^2x_6 = (6Z_1^2)^{-1}(Z_2Z_3 - Z_5)$

$Y_7 = x_2x_4^2 - 2x_2x_3x_5 + 2x_2^2x_6 - x_1x_4x_5 + 3x_1x_3x_6 - 7x_1x_2x_7 + 7x_1^2x_8$
$= (120Z_1^4)^{-1}(5Z_3Z_4 - 6Z_2Z_5 + Z_7)$

$Y_9 = x_2x_5^2 - 2x_2x_4x_6 + 2x_2x_3x_7 - 2x_2^2x_8 - x_1x_5x_6 + 3x_1x_4x_7 - 5x_1x_3x_8 + 9x_1x_2x_9 - 9x_1^2x_{10}$
$= (5.040\, Z_1^6)^{-1}(21Z_4Z_5 - 35Z_3Z_6 + 15Z_2Z_7 - Z_9)$

3.6 Proposition: $\{Z_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}\}$ est une base de $\mathcal{R}_n$

Preuve: Par le lemme 3.5, le jacobien de $(x_1,\ldots,x_n) \overset{\beta}{\longmapsto} (Z_1, x_2, Y_2, \ldots, Y_{n-1})$ est de la forme $(-1)^a \cdot b \cdot x_1^c$, avec $a,b,c \in \mathbb{N}$. En particulier β est un changement de coordonnées birationnel. Comme $\beta_*(D) = Z_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$, il vient $\mathcal{R}_n = \beta^*(K(Z_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}))$. ∎

3.7 Pour $j \geq 4$, posons $Y'_j = Z_1^{-2}(Z_j - Z_2 Z_{j-2})$

Lemme: $Y'_j \in \mathcal{S}_{j+1}^{j-2,2j-2}$; $Y'_j = 2(j-2)x_2^{j-4}(2x_2x_4 - x_3^2)$ modulo x_1 ; $\dfrac{\partial Y'_j}{\partial x_{j+1}} = (-1)^{j+1}\dfrac{j!}{j-1}\, x_1^{j-1}$.

Preuve: $Z_j - Z_2 Z_{j-2} = x_2^j - j x_1 x_2^{j-2} x_3 + j(j-2) x_1^2 x_2^{j-3} x_4 - j(j-2)(j-3) x_1^3 x_2^{j-4} x_5 + \cdots$
$- (x_2^2 - 2x_1x_3)(x_2^{j-2} - (j-2)x_1 x_2^{j-4} x_3 + (j-2)(j-4) x_1^2 x_2^{j-5} x_4 - (j-2)(j-4)(j-5) x_1^3 x_2^{j-6} x_5 + \cdots)$
$= x_1^2 x_2^{j-4}\{4(j-2)x_2x_4 - 2(j-2)x_3^2\}$ modulo x_1^3. Le reste est clair. ∎

3.8 Proposition: Pour $n \geq 5$, $\{Z_1, Z_2, Z_3, Y'_4, \ldots, Y'_{n-1}\}$ est une base de $\mathcal{R}_n$

Preuve: Utilisant 3.7, elle est analogue à celles des propositions 3.3 et 3.6. ∎

3.9 Le reste du paragraphe est formé de remarques et de calculs.
L'intérêt de la première base introduite, celle des Z_j, est qu'elle nous permettra de décrire la stratification canonique de K^n sous l'action de Γ, parce que $Z_j = x_2^j$ modulo x_1 : voir le paragraphe 5. Par contre Z_j étant de degré j, elle est peu pratique pour une description explicite de l'anneau $\mathcal{S}_n$.

3.10 L'intérêt de la base des Y'_j (3.8) vient du lemme suivant, utilisé dans la suite:

Lemme: Si $n \geq 4$, et $P \in K[x_2, \ldots, x_{n-1}]$ est tel que $P(x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}) \equiv 0$, P est dans l'idéal engendré par $x_{n-1} - x_2 x_{n-3}$, $x_{n-2} - x_2 x_{n-4}$, $\ldots$, $x_4 - x_2^2$, et $x_2^3 - x_3^2$.

Preuve: P s'écrit $(x_{n-1} - x_2 x_{n-3})\, Q(x_2, \ldots, x_{n-1}) + R(x_2, \ldots, x_{n-2})$, où Q et R sont des polynômes et $R(x^2, x^3, \ldots, x^{n-2}) \equiv 0$. On se ramène donc par récurrence au cas $n=4$, où $P \in K[x_2, x_3]$, et $P(x^2, x^3) \equiv 0$.
On peut écrire $P = \sum P_k(x_2, x_3)$, où les P_k sont quasi-homogènes de poids k pour les poids 2 et 3 accordés à x_2 et x_3, et l'on a

$P_k(x^2,x^3)\equiv 0$ pour tout k. Par homogénéité, il existe $Q_k \in K[x,y]$ et des entiers α et β tels que $P_k(x_2,x_3) = x_2^\alpha x_3^\beta Q_k(x_2^3, x_3^2)$. Q_k est homogène, et $Q_k(x^6,x^6)\equiv 0$, donc Q_k est divisible par $x-y$, et $P(x_2,x_3)$ par $x_2^3 - x_3^2$. ■

<u>3.11</u> La base des Y_j (3.6) minimise les degrés, d'après le lemme 3.4. Mais elle est loin de décrire tous les éléments de $\mathcal{S}_n$ de degré au plus 3, comme le montre le calcul suivant.

<u>Exemple</u>: On a $d_{11}^{3,k} = 1,1,2,3,4,5,7,8,10,12,14,15,17,17,18,18$ $(3\le k\le 18)$ et $d_{11}^3 = 286$. Par le corollaire 2.4, on a donc $s_{11}^3 = 18$, et $s_{11}^{3,k} = 1,0,1,1,1,1,2,1,2,2,2,1,2,0,1,0$ $(3\le k\le 18)$.

On peut vérifier qu'une base de l'espace $\mathcal{S}_{11}^3$ est $\{Z_1^3, Z_1Y_2, Y_3, Z_1Y_4, Q_{5,9}, Y_5, Z_1Y_6, Q_{7,11}, Y_7, Q_{8,12}, Z_1Y_8, Q_{9,13}, Q_{9,15}, Y_9, Q_{10,14}, Z_1Y_{10}, Q_{11,15}$, et $Q_{11,17}\}$, où l'on a ordonné ces éléments de $\mathcal{S}_n^{3,k}$ suivant les n puis les k croissants, et où les $Q_{i,j} \in \mathcal{S}_i^{3,j}$ sont:

$$Q_{5,9} = 2x_3^3 - 6x_2x_3x_4 + 6x_2^2x_5 + 9x_1x_4^2 - 12x_1x_3x_5$$

$$Q_{7,11} = x_3x_4^2 - 2x_3^2x_5 - x_2x_4x_5 + 5x_2x_3x_6 - 5x_2^2x_7 + 8x_1x_5^2 - 15x_1x_4x_6 + 10x_1x_3x_7$$

$$Q_{8,12} = 3x_4^3 - 9x_3x_4x_5 + 10x_2x_5^2 + 9x_3^2x_6 - 11x_2x_4x_6 - 7x_2x_3x_7 + 7x_2^2x_8 - 10x_1x_5x_6 + 21x_1x_4x_7 - 14x_1x_3x_8$$

$$Q_{9,13} = 2x_3x_5^2 - 4x_3x_4x_6 - 2x_2x_5x_6 + 4x_3^2x_7 + 6x_2x_4x_7 - 14x_2x_3x_8 + 14x_2^2x_9 + 25x_1x_6^2 - 48x_1x_5x_7 + 42x_1x_4x_8 - 28x_1x_3x_9$$

$$Q_{9,15} = 6x_5^3 - 18x_4x_5x_6 + 20x_3x_6^2 + 18x_4^2x_7 - 22x_3x_5x_7 - 20x_2x_6x_7 - 14x_3x_4x_8 + 42x_2x_5x_8 + 14x_3^2x_9 - 28x_2x_4x_9 + 45x_1x_7^2 - 70x_1x_6x_8 + 28x_1x_5x_9$$

$$Q_{10,14} = x_4x_5^2 - 2x_4^2x_6 - x_3x_5x_6 + 5x_2x_6^2 + 5x_3x_4x_7 - 9x_2x_5x_7 - 5x_3^2x_8 + 4x_2x_4x_8 + 6x_2x_3x_9 - 6x_2^2x_{10} - 5x_1x_6x_7 + 14x_1x_5x_8 - 18x_1x_4x_9 + 12x_1x_3x_{10}$$

$$Q_{11,15} = 12x_5^3 + 39x_3x_6^2 - 36x_4x_5x_6 + 36x_4^2x_7 - 42x_3x_5x_7 - 39x_2x_6x_7 - 30x_3x_4x_8 + 81x_2x_5x_8 + 30x_3^2x_9 - 51x_2x_4x_9 - 9x_2x_3x_{10} + 9x_2^2x_{11} + 72x_1x_7^2 - 105x_1x_6x_8 + 24x_1x_5x_9 + 27x_1x_4x_{10} - 18x_1x_3x_{11}$$

$$Q_{11,17} = 2x_5x_6^2 - 4x_5^2x_7 - 2x_4x_6x_7 + 10x_3x_7^2 + 10x_4x_5x_8 - 18x_3x_6x_8 - 10x_2x_7x_8 - 10x_4^2x_9 + 8x_3x_5x_9 + 28x_2x_6x_9 + 12x_3x_4x_{10} - 36x_2x_5x_{10} - 12x_3^2x_{11} + 24x_2x_4x_{11} + 49x_1x_8^2 - 88x_1x_7x_9 + 60x_1x_6x_{10} - 24x_1x_5x_{11}$$

3.12 Utilisant la bigraduation de $\mathcal{S}_n$ on se convainc aisément que tout système de générateurs de $\mathcal{S}_{11}$ qui minimise les degrés de ses éléments doit forcément contenir, outre $Z_1, Y_2, \dots, Y_{10}$, tous les $Q_{i,j}$ ci-dessus. Ceux-ci, comme tout élément de $\mathcal{R}_n$, sont des fractions rationnelles de Z_1 et des Y_j $(j=2,\dots,10)$, d'après 3.6. On a en fait :

$$Z_1^3 Q_{5,9} = -Y_2^3 + Y_3^2 + 3Z_1^2 Y_2 Y_4$$

$$2Z_1^5 Q_{7,11} = Y_2^4 - Y_2 Y_3^2 - 5Z_1^2 Y_2^2 Y_4 + 4Z_1^4 Y_4^2 + 2Z_1^2 Y_3 Y_5 + 5Z_1^4 Y_2 Y_6$$

$$2Z_1^6 Q_{8,12} = -Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 + 5Z_1^2 Y_2 Y_3 Y_4 - 2Z_1^2 Y_2^2 Y_5 + 2Z_1^4 Y_4 Y_5 - 7Z_1^4 Y_3 Y_6 + 2Z_1^4 Y_2 Y_7$$

$$\begin{aligned} Z_1^7 Q_{9,13} = {} & -Y_2^5 + Y_2^2 Y_3^2 + 6Z_1^2 Y_2^3 Y_4 - Z_1^2 Y_3^2 Y_4 - 8Z_1^4 Y_2 Y_4^2 - 2Z_1^2 Y_2 Y_3 Y_5 + Z_1^4 Y_5^2 \\ & + 12 Z_1^6 Y_4 Y_6 - 7Z_1^4 Y_2^2 Y_6 + 2Z_1^4 Y_3 Y_7 + 7Z_1^6 Y_2 Y_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4Z_1^9 Q_{9,15} = {} & Y_2^6 - 2Y_2^3 Y_3^2 + Y_3^4 - 10 Z_1^2 Y_2^4 Y_4 + 10 Z_1^2 Y_2 Y_3^2 Y_4 + 25 Z_1^4 Y_2^2 Y_4^2 \\ & - 4Z_1^6 Y_4^3 - 4Z_1^4 Y_2 Y_5^2 + 14 Z_1^4 Y_2^3 Y_6 - 14 Z_1^4 Y_3^2 Y_6 - 70 Z_1^6 Y_2 Y_4 Y_6 \\ & + 45 Z_1^8 Y_6^2 + 8 Z_1^6 Y_5 Y_7 + 28 Z_1^8 Y_4 Y_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6Z_1^8 Q_{10,14} = {} & 2Y_2^4 Y_3 - 2Y_2 Y_3^3 - 10 Z_1^2 Y_2^2 Y_3 Y_4 + 6Z_1^4 Y_3 Y_4^2 + Z_1^2 Y_2^3 Y_5 + 3Z_1^2 Y_3^2 Y_5 \\ & - Z_1^4 Y_2 Y_4 Y_5 + 14 Z_1^4 Y_2 Y_3 Y_6 - 3Z_1^6 Y_5 Y_6 - 4Z_1^4 Y_2^2 Y_7 + 6Z_1^6 Y_4 Y_7 \\ & - 18 Z_1^6 Y_3 Y_8 + 4Z_1^6 Y_2 Y_9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2Z_1^9 Q_{11,15} = {} & -Y_2^3 Y_3^2 + Y_3^4 - 3Z_1^2 Y_2^4 Y_4 + 8Z_1^2 Y_2 Y_3^2 Y_4 + 12 Z_1^4 Y_2^2 Y_4^2 - 2Z_1^2 Y_2^2 Y_3 Y_5 \\ & + 2Z_1^4 Y_3 Y_4 Y_5 - 3Z_1^4 Y_2 Y_5^2 + 6Z_1^4 Y_2^3 Y_6 - 13 Z_1^4 Y_3^2 Y_6 - 48 Z_1^6 Y_2 Y_4 Y_6 \\ & + 36 Z_1^8 Y_6^2 + 2Z_1^4 Y_2 Y_3 Y_7 + 6Z_1^6 Y_5 Y_7 + 9Z_1^6 Y_2^2 Y_8 + 12 Z_1^8 Y_4 Y_8 \\ & - 2Z_1^6 Y_3 Y_9 - 9Z_1^8 Y_2 Y_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 Z_1^{11} Q_{11,17} = {} & -3Y_2^7 + 6Y_2^4 Y_3^2 - 3Y_2 Y_3^4 + 30 Z_1^2 Y_2^5 Y_4 - 30 Z_1^2 Y_2^2 Y_3^2 Y_4 \\ & - 87 Z_1^4 Y_2^3 Y_4^2 + 12 Z_1^4 Y_3^2 Y_4^2 + 60 Z_1^6 Y_2 Y_4^3 - 4Z_1^2 Y_2^3 Y_3 Y_5 + 4Z_1^2 Y_3^3 Y_5 \\ & + 20 Z_1^4 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 + 4Z_1^4 Y_2^2 Y_5^2 - 4Z_1^4 Y_4 Y_5^2 - 42 Z_1^4 Y_2^4 Y_6 + 42 Z_1^4 Y_2 Y_3^2 Y_6 \\ & + 210 Z_1^6 Y_2^2 Y_4 Y_6 - 96 Z_1^8 Y_4^2 Y_6 - 28 Z_1^6 Y_3 Y_5 Y_6 - 147 Z_1^8 Y_2 Y_6^2 \\ & - 16 Z_1^6 Y_2 Y_5 Y_7 + 12 Z_1^8 Y_7^2 + 36 Z_1^6 Y_2^3 Y_8 - 36 Z_1^6 Y_3^2 Y_8 \\ & - 180 Z_1^8 Y_2 Y_4 Y_8 + 264 Z_1^{10} Y_6 Y_8 + 16 Z_1^8 Y_5 Y_9 + 72 Z_1^{10} Y_4 Y_{10} \end{aligned}$$

Naturellement ces relations sont autant d'équations de la première variété-quotient de la stratification canonique.

<u>3.13</u> Posons $Y_3' = 3x_2^2x_3^2 - 8x_1x_3^3 - 6x_2^3x_4 + 18x_1x_2x_3x_4 - 9x_1^2x_4^2$

$$= Z_1^{-2}(Z_2^3 - Z_3^2) \in \mathcal{G}_4^{4,10}.$$

Y_3' n'est pas construit comme les Y_j' ($j \geq 4$) du numéro 3.7. Mais le lemme 3.10 justifie la notation et explique l'importance de ce "générateur". Ainsi le polynôme $Q_{5,9}$ ci-dessus s'écrit $Z_1^{-3}(-Y_2^3 + Y_3^2 + 3Z_1^2 Y_2 Y_4)$, mais plus simplement $Z_1^{-1}(3Y_2Y_4 - Y_3')$. L'introduction de Y_3' simplifie de même les expressions des autres $Q_{i,j}$ en fonction des Y_j au numéro précédent.

<u>3.14</u> Avec la notation Q_p du numéro 3.5, posons $Y''_{2p+1} = Q_1 Y_{2p} - Y_2 Q_p$.
Il vient : $Y_2 Y_{2p+1} - Y_3 Y_{2p} = Y_2(x_1 Q_p + x_2 Y_{2p}) - (x_1 Q_1 + x_2 Y_2) Y_{2p}$

$$= x_1 Y_2 Q_p - x_1 Q_1 Y_{2p} = -x_1 Y''_{2p+1}$$

Donc $Y''_{2p+1} = Z_1^{-1}(Y_3 Y_{2p} - Y_2 Y_{2p+1}) \in \mathcal{G}_{2p+2}^{4,2p+7}$, et $Y''_{2p+1} \neq 0$ pour $p \geq 2$.

Par exemple et pour mémoire :

$$Y_5'' = x_2x_3^3 - 3x_2^2x_3x_4 + 3x_2^3x_5 - x_1x_3^2x_4 + 6x_1x_2x_4^2 - 4x_1x_2x_3x_5 - 6x_1^2x_4x_5$$
$$-5x_1x_2^2x_6 + 10x_1^3x_3x_6$$
$$= (12Z_1^3)^{-1}(-Z_2^2Z_3 + 3Z_3Z_4 - 2Z_2Z_5) = Z_1^{-1}(-Y_3Y_4 + Y_2Y_5) = (12Z_1)^{-1}(3Y_3Y_4' - 2Y_2Y_5')$$

<u>3.15</u> Donnons ici un dernier exemple de calcul : une base de $\mathcal{G}_6^6$.
On a $d_6^{6,k} = 1, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 12, 16, 19, 23, 25, 29, 30, 32, 32$ $(6 \leq k \leq 21)$
et $d_6^6 = 462$. Donc $s_6^6 = 32$, et plus précisément par 2.4 :
$s_6^{6,k} = 1, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 1, 2, 0$ $(6 \leq k \leq 21)$

Une base de $\mathcal{G}_6^6$ est formée des

$Z_1^6 \in \mathcal{G}_1^{6,6}$; $Z_1^4 Y_2 \in \mathcal{G}_3^{6,8}$; $Z_1^3 Y_3 \in \mathcal{G}_4^{6,9}$; $Z_1^4 Y_4$ et $Z_1^2 Y_2^2 \in \mathcal{G}_5^{6,10}$;
$Z_1 Y_2 Y_3$ et $Z_1^3 Y_5 \in \mathcal{G}_6^{6,11}$, Y_2^3, Y_3^2 et $Z_1^2 Y_2 Y_4 \in \mathcal{G}_5^{6,12}$; $Z_1 Y_3 Y_4$ et $Z_1 Y_2 Y_5 \in \mathcal{G}_6^{6,13}$;
$Z_1 Y_2 Q_{5,9}$, $Y_2^2 Y_4$, $Z_1^2 Y_4^2$ et $Y_3 Y_5 \in \mathcal{G}_6^{6,14}$; $Y_3 Q_{5,9}$, $Z_1 Y_4 Y_5$ et $Y_2 Y_5'' \in \mathcal{G}_6^{6,15}$;
$Y_2 Y_4^2$, $Z_1 Y_4 Q_{5,9}$, Y_5^2 et $Y_2 Q_{6,12} \in \mathcal{G}_6^{6,16}$; $Y_4 Y_5''$ et $Y_5 Q_{5,9} \in \mathcal{G}_6^{6,17}$;
Y_4^3, $Q_{5,9}^2$, $Y_4 Q_{6,12}$ et $Y_2 Q_{6,14} \in \mathcal{G}_6^{6,18}$; $Q_{6,19} \in \mathcal{G}_6^{6,19}$;
et $Y_4 Q_{6,14}$ et $Q_{6,20} \in \mathcal{G}_6^{6,20}$; où l'on a noté :

$$\varphi_{6,12} = 5x_2^2x_4^2 - 10x_2^2x_3x_5 + 10x_2^3x_6 - 12x_1x_3x_4^2 + 24x_1x_3^2x_5 + 2x_1x_2x_4x_5$$
$$-16x_1^2x_5^2 - 30x_1x_2x_3x_6 + 30x_1^2x_4x_6$$
$$= Z_1^{-4}(-Y_2^4 + Y_2Y_3^2 + 5Z_1^2Y_2^2Y_4 - 4Z_1^4Y_4^2 - 2Z_1^2Y_3Y_5)$$

$$\varphi_{6,14} = 8x_3^2x_4^2 - 18x_2x_4^3 - 16x_3^3x_5 + 38x_2x_3x_4x_5 - 9x_2^2x_5^2 + 10x_2x_3^2x_6 - 20x_2^2x_4x_6$$
$$+18x_1x_4^2x_5 - 32x_1x_3x_5^2 - 10x_1x_3x_4x_6 + 50x_1x_2x_5x_6 - 25x_1^2x_6^2$$
$$= Z_1^{-4}(-Y_2^3Y_4 + Y_3^2Y_4 + 4Z_1^2Y_2Y_4^2 - Z_1^2Y_5^2)$$

$$\varphi_{6,19} = 5x_2x_3^3x_4^2 - 15x_2^2x_3x_4^3 - 10x_2x_3^4x_5 + 30x_2^2x_3^2x_4x_5 + 15x_2^3x_4^2x_5 - 30x_2^3x_3x_5^2$$
$$+10x_2^2x_3^3x_6 - 30x_2^3x_3x_4x_6 + 30x_2^4x_5x_6 - 15x_1x_3^2x_4^3 + 54x_1x_2x_4^4 + 40x_1x_3^3x_4x_5$$
$$-156x_1x_2x_3x_4^2x_5 - 54x_1^2x_4^3x_5 + 8x_1x_2x_3^2x_5^2 + 78x_1x_2^2x_4x_5^2 + 144x_1^2x_3x_4x_5^2$$
$$-120x_1^2x_2x_5^3 - 30x_1x_3^4x_6 + 100x_1x_2x_3^2x_4x_6 - 45x_1x_2^2x_4^2x_6 + 30x_1^2x_3x_4^2x_6$$
$$-20x_1x_2^2x_3x_5x_6 - 160x_1^2x_3^2x_5x_6 + 60x_1^2x_2x_4x_5x_6 + 120x_1^3x_5^2x_6 - 50x_1x_2^3x_6^2$$
$$+150x_1^2x_2x_3x_6^2 - 150x_1^3x_4x_6^2$$
$$= Z_1^{-5}(Y_2^3Y_3Y_4 - Y_3^3Y_4 - 5Z_1^2Y_2Y_3Y_4^2 - Y_2^4Y_5 + Y_2Y_3^2Y_5$$
$$+ 7Z_1^2Y_2^2Y_4Y_5 - 6Z_1^4Y_4^2Y_5 - 2Z_1^2Y_3Y_5^2)$$

$$\varphi_{6,20} = 10x_2x_3^2x_4^3 - 45x_2^2x_4^4 - 30x_2x_3^3x_4x_5 + 160x_2^2x_3x_4^2x_5 - 55x_2^2x_3^2x_5^2$$
$$-90x_2^3x_4x_5^2 + 30x_2x_3^4x_6 - 120x_2^2x_3^2x_4x_6 + 20x_2^3x_4^2x_6 + 200x_2^3x_3x_5x_6$$
$$-100x_2^4x_6^2 + 54x_1x_3x_4^4 - 226x_1x_3^2x_4^2x_5 + 36x_1x_2x_4^3x_5 + 256x_1x_3^3x_5^2$$
$$-188x_1x_2x_3x_4x_5^2 + 252x_1^2x_4^2x_5^2 + 306x_1x_2^2x_5^3 - 512x_1^2x_3x_5^3$$
$$-30x_1x_3^3x_4x_6 + 400x_1x_2x_3x_4^2x_6 - 540x_1^2x_4^3x_6 - 470x_1x_2x_3^2x_5x_6$$
$$-460x_1x_2^2x_4x_5x_6 + 1.220x_1^2x_3x_4x_5x_6 - 100x_1^2x_2x_5^2x_6$$
$$+400x_1x_2^2x_3x_6^2 - 375x_1^2x_3^2x_6^2 - 50x_1^2x_2x_4x_6^2 + 50x_1^3x_5x_6^2$$
$$= Z_1^{-8}(-Y_2^7 + 2Y_2^4Y_3^2 - Y_2Y_3^4 + 10Z_1^2Y_2^5Y_4 - 10Z_1^2Y_2^2Y_3^2Y_4 - 32Z_1^4Y_2^3Y_4^2$$
$$+ 7Z_1^4Y_3^2Y_4^2 + 32Z_1^6Y_2Y_4^3 - 4Z_1^2Y_2^3Y_3Y_5 + 4Z_1^2Y_3^3Y_5$$
$$+ 20Z_1^4Y_2Y_3Y_4Y_5 - 4Z_1^4Y_2^2Y_5^2 + Z_1^6Y_4Y_5^2)$$

Remarquons enfin, entre les polynômes introduits, la seule relation de degré 5 : $\quad Z_1Y_5'' - Y_3Y_4 + Y_2Y_5 = 0$

et les trois relations de degré 6 :

$$Z_1^3\varphi_{5,9} + Y_2^3 - Y_3^2 - 3Z_1^2Y_2Y_4 = 0$$
$$Z_1^2\varphi_{6,12} + 4Z_1^2Y_4^2 + 2Y_3Y_5 - 2Y_2^2Y_4 - Z_1Y_2\varphi_{5,9} = 0$$
$$Z_1^2\varphi_{6,14} - Z_1Y_4\varphi_{5,9} - Y_2Y_4^2 + Y_5^2 = 0$$

§4 RESULTATS SUR L'ANNEAU DES INVARIANTS ALGÉBRIQUES

4.1 On note ici $\{Z_1, Z_2, Z_3, \tilde{Z}_4, \dots, \tilde{Z}_{n-1}\}$ l'une quelconque des bases de $\mathcal{R}_n$ définies aux numéros 3.3, 3.6, et 3.8, c'est-à-dire $\tilde{Z}_j = Z_j$, ou Y_j, ou Y'_j pour $j \geq 4$ (on a $Y_2 = Z_2$, $Y_3 = Z_3$). On note aussi $K_1 = K(Z_1)$.

Proposition : (a) $K[Z_1, Z_2, Z_3, \tilde{Z}_4, \dots, \tilde{Z}_{n-1}] \subset \mathcal{S}_n \subset K_1[Z_2, Z_3, \tilde{Z}_4, \dots, \tilde{Z}_{n-1}]$

(b) Tout élément de $\mathcal{S}_n^{p,k}$ s'écrit de façon unique $Z_1^{2p-k}\, P(Z_2, \dots, Z_{n-1})$, où P est un polynôme quasi-homogène de poids $k-p$ quand on donne à Z_j le poids j $(2 \leq j \leq n-1)$.

(c) $K[Z_2, \dots, Z_{n-1}] \cap Z_1.\mathcal{S}_n \subset Z_1^2.\mathcal{S}_n$

Preuve : (a) On voit sur la définition des $\tilde{Z}_j$ et les lemmes 3.5 et 3.7, que dans chaque cas l'application $(x_2, \dots, x_n) \longmapsto (x_2, Z_2, Z_3, \tilde{Z}_4, \dots, \tilde{Z}_{n-1})$ est un automorphisme de $K_1[x_2, \dots, x_n]$. D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &\subset K[x_1, \dots, x_n] \cap K_1(Z_2, Z_3, \tilde{Z}_4, \dots, \tilde{Z}_{n-1}) \\ &\subset K_1[x_2, \dots, x_n] \cap K_1(Z_2, Z_3, \tilde{Z}_4, \dots, \tilde{Z}_{n-1}) \\ &= K_1[x_2, Z_2, Z_3, \tilde{Z}_4, \dots, \tilde{Z}_{n-1}] \cap K_1(Z_2, Z_3, \tilde{Z}_4, \dots, \tilde{Z}_{n-1}) \\ &= K_1[Z_2, Z_3, \tilde{Z}_4, \dots, \tilde{Z}_{n-1}] \end{aligned}$$

(b) Si $R \in \mathcal{S}_n^p$, il s'écrit, d'après (a), $R = Q(Z_1)^{-1}\, P(Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1})$, où P et Q sont des polynômes premiers entre eux et homogènes, donc Q est monomial. Si de plus $R \in \mathcal{S}_n^{p,k}$ et $R = Z_1^{-\alpha}\, P(Z_1, \dots, Z_{n-1})$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$, comme $Z_j \in \mathcal{S}_n^{j,2j}$ pour $j \geq 2$, un monôme qui figure dans P est de la forme $c.Z_1^{\alpha_1} Z_2^{\alpha_2} \dots Z_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, avec $p = \alpha_1 - \alpha + \{2\alpha_2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1}\}$ et $k = \alpha_1 - \alpha + 2\{2\alpha_2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1}\}$, d'où $2\alpha_2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1} = k-p$, et $\alpha_1 - \alpha = 2p-k$. Par suite α_1 est le même pour tous les monômes, et le (b) s'en déduit.

(c) Soit $P = P(Z_2, \dots, Z_{n-1}) \in Z_1.\mathcal{S}_n$. Le polynôme P de $x_1, \dots, x_n$ s'annule sur l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$, donc $P(x_2^2, \dots, x_2^{n-1}) \equiv 0$, et par le lemme 3.10 il existe $n-3$ polynômes $P_1, \dots, P_{n-3}$ tels que

$$P(Z_2,\dots,Z_{n-1}) = (Z_{n-1} - Z_2 Z_{n-3})\, P_1(Z_2,\dots,Z_{n-1}) + \cdots$$
$$+ (Z_4 - Z_2^2)\, P_{n-4}(Z_2,\dots,Z_{n-1}) + (Z_2^3 - Z_3^2)\, P_{n-3}(Z_2,\dots,Z_{n-1})$$
$$= Z_1^2 \left[Y'_{n-1} P_1 + \cdots + Y'_4 P_{n-4} + Y'_3 P_{n-3} \right] \in Z_1^2 \cdot \mathcal{S}_n \ . \ \blacksquare$$

<u>4.2</u> L'énoncé suivant décrit l'anneau $\mathcal{S}_n$ pour $n \leq 4$, et se trouve déjà dans [5] :

<u>Proposition</u>: $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = K[x_1]$; $\mathcal{S}_3 = K[x_1, x_2^2 - 2x_1x_3]$;
$\mathcal{S}_4 = K[Z_1, Y_2, Y_3, Y'_3]/(R_1)$, où $Z_1 = x_1$, $Y_2 = x_2^2 - 2x_1x_3$,
$Y_3 = x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4$, $Y'_3 = 3x_2^2x_3^2 - 6x_2^3x_4 - 8x_1x_3^3 + 18x_1x_2x_3x_4 - 9x_1^2x_4^2$,
et (R_1) : $Z_1^2 Y'_3 - Y_2^3 + Y_3^2 = 0$

<u>Preuve</u>. Les deux premières égalités sont triviales. Pour la troisième, tout élément de $\mathcal{S}_3$ s'écrit x_1 $P(x_1, x_2^2 - 2x_1x_3)$, où $\alpha \in \mathbb{Z}$ et P est un polynôme, d'après 4.1(a), et sa restriction au plan $\{x_3 = 0\}$, soit $x_1^\alpha P(x_1, x_2^2)$ est encore un polynôme ; donc si $\alpha < 0$, P est divisible par $x_1^{-\alpha}$.

Enfin pour la dernière, tout élément de $\mathcal{S}_4$ est la somme de ses composantes bihomogènes, qui sont par 4.1(b) de la forme $Z_1^\alpha P(Z_2, Z_3)$. Si $\alpha < 0$, $P(Z_2, Z_3) \in Z_1 \cdot \mathcal{S}_4$, et s'annule donc sur l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$, soit $P(x_2^2, x_2^3) \equiv 0$, et par le lemme 3.10, P est divisible par $Z_2^3 - Z_3^2$. Si réciproquement P est divisible par $(Z_2^3 - Z_3^2)^\beta$, on a
$Z_1^\alpha P(Z_2, Z_3) = Z_1^{\alpha + 2\beta}\, Y_3'^{\,\beta}\, Q(Z_2, Z_3)$, où Q est un polynôme,
et le résultat s'en déduit par récurrence sur $|\alpha|$. $\blacksquare$

4.3 Proposition : $\mathcal{G}_5 = K[Z_1, Y_2, Y_3, Y_4, Q_{5,9}]/(R_2)$, où

$Z_1 = x_1$; $Y_2 = x_2^2 - 2x_1x_3$; $Y_3 = x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4$;

$Y_4 = x_3^2 - 2x_2x_4 + 2x_1x_5$; $Q_{5,9} = 2x_3^3 - 6x_2x_3x_4 + 6x_2^2x_5 + 9x_1x_4^2 - 12x_1x_3x_5$;

et (R_2) : $Z_1^3 Q_{5,9} + Y_2^3 - Y_3^2 - 3Z_1^2 Y_2 Y_4 = 0$

Preuve : Soit P un élément non nul de $\mathcal{G}_5^{p,k}$; d'après la proposition 4.1, un monôme qui figure dans P s'écrit $Z_1^\alpha Z_2^\beta Z_3^\gamma Z_4^\delta$, avec $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$, $\alpha = 2p - k \in \mathbb{Z}$, et $\begin{cases} p = \alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta \\ k = \alpha + 4\beta + 6\gamma + 8\delta \end{cases}$

Si l'on avait $1 = 3p - k = 2\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta$, γ serait impair dans tous les monômes, et P s'écrirait $P = Z_3 Q$, avec $Q \in \mathcal{G}_5^{p-3,k-6}$. Comme $k - 6 = 3p - 7 = 3(p-3) + 2$, ceci implique $Q = 0$ d'après 2.4.(b), et contredit l'hypothèse $P \neq 0$. Autrement dit : il n'y a pas d'élément non nul de $\mathcal{G}_5^p$ de poids $3p-1$.

Soit alors $P \in \mathcal{G}_5^{p,k}$, avec $k \neq 3p-1$. On a $p \leq k \leq 3p$, et $P|_{\{x_1=0\}} = \rho(P)$ est dans le noyau de $x_2\partial_3 + x_3\partial_4 + x_4\partial_5$. Par suite, d'après 4.2 (après décalage des indices), $\rho(P)$ est un polynôme de U_1, U_2, U_3, U_4, avec :

$$\begin{cases} U_1 = x_2 \ ; \ U_2 = x_3^2 - 2x_2x_4 \ ; \ U_3 = x_3^3 - 3x_2x_3x_4 + 3x_2^2x_5 \\ U_4 = 3x_3^2x_4^2 - 6x_3^3x_5 - 8x_2x_4^3 + 18x_2x_3x_4x_5 - 9x_2^2x_5^2 \end{cases}$$

Soit $U_1^\alpha U_2^\beta U_3^\gamma U_4^\delta$ l'un des monômes qui figurent dans $\rho(P)$. On a $\begin{cases} p = \alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta \\ k = 2\alpha + 6\beta + 9\gamma + 14\delta \end{cases}$, d'où $0 \leq 3p - k = \alpha - 2\delta$, soit $\alpha \geq 2\delta$.

Autrement dit $\rho(P)$ est en fait un polynôme de U_1, U_2, U_3, et $U_1^2 U_4$. Par la relation (R_1), $U_1^2 U_4 = U_2^3 - U_3^2$, et $\rho(P)$ est donc un polynôme de U_1, U_2, U_3 seulement. Soit $U_1^\alpha U_2^\beta U_3^\gamma$ l'un des monômes qui y figurent ; on a maintenant

$$\begin{cases} p = \alpha + 2\beta + 3\gamma \\ k = 2\alpha + 6\beta + 9\gamma \end{cases}$$

donc $\alpha = 3p-k$ est le même pour chaque monôme,
et $\rho(P) = U_1^\alpha Q(U_2, U_3)$, où $\alpha \in \mathbb{N}$, et Q est un polynôme.

Comme $U_2 \in \mathcal{P}_5^{2,6}$ et $U_3 \in \mathcal{P}_5^{3,9}$, Q est bihomogène de degré $p-\alpha$ et de poids $3(p-\alpha)$. Comme $U_1 \in \mathcal{P}_5^{1,2}$, le poids de $\rho(P)$ est $2\alpha + 3(p-\alpha) = 3p-\alpha = k$, et par suite $\alpha \neq 1$.

On peut donc écrire $\alpha = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$, avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$, d'où

$$\rho(P) = (\rho(Y_2))^{\alpha_1} (\rho(Y_3))^{\alpha_2} Q(\rho(Y_4), \rho(\tfrac{1}{2} Q_{5,9}));$$

et $P = Y_2^{\alpha_1} Y_3^{\alpha_2} Q(Y_4, \frac{1}{2} Q_{5,9}) + Z_1 P_1$,

où $P_1 \in \mathcal{S}_5^{p-1,k-1}$.

Par récurrence sur p, on conclut que P est un polynôme de Z_1, Y_2, Y_3, Y_4 et $Q_{5,9}$, et comme $\mathcal{S}_5$ est engendré par ses éléments bihomogènes, la proposition s'en déduit. ■

4.4 Définition de π

Pour étudier $\mathcal{S}_n$ pour $n \geq 6$, on définit une application linéaire $\pi = \pi_n^{p,k} : \mathcal{P}_n^{p,k} \longrightarrow \mathcal{P}_{n-1}^{p,k-p}$, par $\pi = \tau^{-1} \circ \rho$, où

$\tau : K[x_1, \ldots, x_{n-1}] \to K[x_2, \ldots, x_n]$ est la substition de x_{j+1} à x_j $(1 \leq j \leq n-1)$, et

$\rho : K[x_1, \ldots, x_n] \to K[x_2, \ldots, x_n]$ est la restriction à l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$.

Il est clair que π est surjectif de $\mathcal{P}_n^{p,k}$ sur $\mathcal{P}_{n-1}^{p,k-p}$.

4.5 Proposition : $\pi(\mathcal{S}_n^{p,k}) \subset \mathcal{S}_{n-1}^{p,k-p}$, et pour $k \leq \frac{(n+1)(p-1)}{2}+1$, $\pi : \mathcal{S}_n^{p,k} \to \mathcal{S}_{n-1}^{p,k-p}$ est surjectif.

Preuve : Si $P = x_1 Q(x_1,\dots,x_n) + R(x_2,\dots,x_n) \in \mathcal{S}_n^{p,k}$, on a

$0 = D_n P = x_1[D_n Q + \partial_2 R] + (x_2\partial_3+\dots+x_{n-1}\partial_n)R$,

d'où $0 = (x_2\partial_3+\dots+x_{n-1}\partial_n)R = \tau\circ D_{n-1}\circ\tau^{-1}(R)$

et $\tau^{-1}(R) = \tau^{-1}\circ\rho(P) = \pi(P) \in \mathcal{S}_{n-1}^{p,k-p}$.

Réciproquement, si $R \in \mathcal{S}_{n-1}^{p,k-p}$, on a $\partial_2\circ\tau(R) \in \mathcal{P}_n^{p-1,k-2}$, et par le corollaire 2.3 (a), on peut trouver $Q \in \mathcal{P}_{n-1}^{p-1,k-1}$ tel que $D_n Q = -\partial_2\circ\tau(R)$ dès que $k-1 \leq \frac{(n+1)(p-1)}{2}$.

Posant alors $P = x_1 Q + \tau(R)$, il vient $\pi(P) = R$, et

$D_n P = x_1[D_n Q + \partial_2\circ\tau(R)] + (x_2\partial_3+\dots+x_{n-1}\partial_n)\circ\tau(R) = \tau\circ D_{n-1}(R) = 0$,

soit $P \in \mathcal{S}_n^{p,k}$. ∎

4.6 Remarque : Il se produit que π ne soit pas surjectif de $\mathcal{S}_n^{p,k}$ dans $\mathcal{S}_{n-1}^{p,k-p}$ lorsque $\frac{(n+1)(p-1)}{2}+1 < k \leq \frac{(n+1)p}{2}$. Par exemple $d_5^4 = 70$, et $d_5^{4,k} = 1,1,2,3,5,5,7,7,8$ $(4 \leq k \leq 12)$. Par 2.4 (b) et (c) on a donc $s_5^4 = 8 = d_5^{4,12}$, et
$$s_5^{4,k} = \begin{cases} 2 \text{ pour } k = 8,10 \\ 1 \text{ pour } k = 4,6,7,12 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Les $d_6^{4,k}$ et $s_6^{4,k}$ ont déja été cités en 2.6. Pour $n=6$ et $p=4$, on a $\frac{(n+1)(p-1)}{2}+1 = \frac{23}{2} < 14 = \frac{(n+1)p}{2}$, et $s_5^{4,10} = 2 > 1 = s_6^{4,14}$.

Donc π n'est pas surjectif de $\mathcal{S}_6^{4,14}$ dans $\mathcal{S}_5^{4,10}$. Plus précisément d'ailleurs, $\mathcal{S}_6^{4,14}$ et $\mathcal{S}_5^{4,10}$ admettent respectivement pour bases $\{Q_{6,14}\}$ et $\{Y_2Y_4, Z_1Q_{5,9}\}$ (voir 3.11 et 3.15), et l'on a

$\pi(Q_{6,14}) = 8Y_2Y_4 - Z_1Q_{5,9}$.

4.7 Corollaire : Pour $q \in \mathbb{N}$ et $k \leq \frac{(n+1)(p-1)}{2}+1$, π^q est surjectif de $\mathcal{S}_n^{p,k}$ sur $\mathcal{S}_{n-q}^{p,k-pq}$

Preuve : π^q est composé des $\pi : \mathcal{S}_{n-j+1}^{p,k-pj+p} \to \mathcal{S}_{n-j}^{p,k-pj}$ pour $j = 1,2,\dots,q$.

et chacun est surjectif par 4.4 dès que $k-pj+p \leq \frac{(n-j+2)(p-1)}{2}+1$,

soit $k \leq \frac{(n+1)(p-1)}{2} + \frac{(j-1)(p+1)}{2}+1$, ceci pour $1 \leq j \leq q$. ∎

4.8 Soit $q \in \mathbb{N}$, P un élément non nul de $\mathcal{S}_{n-q}^{p,k-pq}$, et $Z_1^{\alpha} Z_2^{\alpha_2} \dots Z_{n-q-1}^{\alpha_{n-q-1}}$ l'un des monômes qui y figurent.

Posons $\beta = 2\alpha_2 + \dots + (n-q-1)\alpha_{n-q-1}$. On a $p = \alpha + \beta$, et $k - pq = \alpha + 2\beta$, d'où $k = (q+1)\alpha + (q+2)\beta$

Par le corollaire 2.4 (b), il vient que nécessairement $k - pq \leq \frac{(n-q+1)p}{2}$ autrement dit:

$$\underline{(n-q-1)\alpha + (n-q-3)\beta \geq 0}$$

Si $P = \pi^q(P')$, avec $P' \in \mathcal{S}_n$, on peut supposer que P' est un élément non nul de $\mathcal{S}_n^{p,k}$, et le même corollaire implique que $k \leq \frac{(n+1)p}{2}$, soit ici:

$$\underline{(n-2q-1)\alpha + (n-2q-3)\beta \geq 0}$$

Enfin par le corollaire 4.7, on peut toujours trouver un tel P' dès que $k \leq \frac{(n+1)(p-1)}{2} + 1$, soit dans ce cas:

$$\underline{(n-2q-1)\alpha + (n-2q-3)\beta \geq n-1}$$

(Rappelons que dans tout ceci $\alpha \in \mathbb{Z}$, tandis que $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-q-1}, \beta \in \mathbb{N}$)

Comme cas particuliers des inégalités ci-dessus, on obtient les deux énoncés suivants:

<u>4.9</u> <u>Corollaire</u>: <u>Soient</u> q, r, j <u>des entiers naturels tels que</u> $j \leq n-q-1$. <u>Alors</u>:

(a) $(n-2q-1)r \geq n-1 \Rightarrow Z_1^r \in \pi^q(\mathcal{S}_n) \Rightarrow (n-2q-1)r \geq 0$

(b) $(n-2q-1)r + (n-2q-3)j \geq n-1 \Rightarrow Z_1^r Z_j \in \pi^q(\mathcal{S}_n) \Rightarrow (n-2q-1)r + (n-2q-3)j \geq 0$

(c) <u>Si j est pair</u>

$(n-2q-1)r + (n-1) \geq 2j + 4q \Rightarrow Z_1^r Y_j \in \pi^q(\mathcal{S}_n) \Rightarrow (n-2q-1)r + 2(n-1) \geq 2j + 4q$

(d) <u>Si j est impair</u>

$(n-2q-1)r + 2(n-1) \geq 2j + 6q \Rightarrow Z_1^r Y_j \in \pi^q(\mathcal{S}_n) \Rightarrow (n-2q-1)r + 3(n-1) \geq 2j + 6q$

(e) <u>Si $j \geq 4$</u>

$(n-2q-1)r + (n-2q-3)j \geq 3(n-1) - 4q \Rightarrow Z_1^r Y_j' \in \pi^q(\mathcal{S}_n) \Rightarrow (n-2q-1)r + (n-2q-3)j \geq 2(n-1) - 4q$

(f) $(n-2q-1)r + 3(n-1) \geq 8q + 12 \Rightarrow Z_1^r Y_3' \in \pi^q(\mathcal{S}_n) \Rightarrow (n-2q-1)r + 4(n-1) \geq 8q + 12$

4.10 Corollaire : Soit $Z_1^{\alpha} Z_2^{\alpha_2} \cdots Z_{n-2}^{\alpha_{n-2}}$ l'un des monomes qui figurent dans l'expression d'un élément non nul P de $\mathcal{G}_{n-1}^{p,k-p}$ (dûe à 4.1.(b)), et $\beta = 2\alpha_2 + \cdots + (n-2)\alpha_{n-2}$. Alors

(a) $\alpha = 3p-k \in \mathbb{Z}$, $\beta = k-2p \in \mathbb{N}$, et $(n-2)\alpha + (n-4)\beta \geq 0$

(b) $(n-3)\alpha + (n-5)\beta \geq n-1 \Rightarrow P \in \pi(\mathcal{G}_n^{p,k}) \Rightarrow (n-3)\alpha + (n-5)\beta \geq 0$.

4.11 Notons F le sous-espace de K^n d'équations $x_1 = x_2 = \cdots = x_{[\frac{n}{2}]} = 0$

Proposition : Si n est pair, $\mathcal{G}_n|_F = K$; si n est impair, $\mathcal{G}_n|_F \subset K[x_{[\frac{n}{2}]+1}]$

Preuve : Si $P \in \mathcal{G}_n^{p,k}$ est non nul, on a $2k \leq (n+1)p$ par 2.4.(b).
Si $n = 2m$ ou $2m+1$, on a $[\frac{n}{2}]+1 = m+1$, et si $x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdots x_n^{\alpha_n}$ est un monôme qui figure dans $P|_F$, il vient :

$$(m+1)(\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \cdots + \alpha_n) = (m+1)p$$

$$(m+1)\alpha_{m+1} + (m+2)\alpha_{m+2} + \cdots + n\alpha_n = k \leq \frac{(n+1)p}{2} = \begin{cases} (m+\frac{1}{2})p & \text{si } n = 2m \\ (m+1)p & \text{si } n = 2m+1, \end{cases}$$

ce qui implique dans tous les cas $\alpha_{m+2} = \cdots = \alpha_n = 0$, et de plus $\alpha_{m+1} = 0$ si n est pair. ■

4.12 Remarque : Si $n = 2m+1$, $Y_{2m} \in \mathcal{G}_n$ et $Y_{2m}|_F = x_{m+1}^2$.
Par contre $x_{m+1} \notin \mathcal{G}_n|_F$. Par suite, si r est le plus petit entier impair (s'il existe) tel que $x_{m+1}^r \in \mathcal{G}_n|_F$, on a $\mathcal{G}_n|_F = K[x_{m+1}^2, x_{m+1}^r]$. Il se produit que r n'existe pas : pour $n=3$, par la proposition 4.2, on a $\mathcal{G}_3|_F = K[x_2^2]$.
Pour $n=5$ ou $n=9$, on a $r=3$ puisque $\pi^2(Q_{5,9}) = 2x_1^3$ et $\pi^4(Q_{9,15}) = 6x_1^3$ (voir 3.11). Par contre pour $n=7$ ou $n=11$, on voit en consultant la base de $\mathcal{G}_{11}^3$ donnée au numéro 3.11, que r, s'il existe, est supérieur à 3.

§5 LA STRATIFICATION CANONIQUE

5.1 Avec les notations de 1.1, pour $t \in K$, $\exp tJ \in \Gamma$, et
$\exp tJ(x_1,\dots,x_n) = (x_1, x_2+tx_1,\dots, x_n + t x_{n-1} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x_1)$
On vérifie aisément par récurrence sur n que les orbites de Γ dans K^n se groupent en les familles suivantes:
$\mathcal{F}_q = \{\mathcal{O}_{a_q,\dots,a_{n-1}} \mid (a_q,\dots,a_{n-1}) \in K^* \times K^{n-q-1}\}$, pour $1 \leq q \leq n-1$,
et $\mathcal{F}_n = \{\mathcal{O}_b \mid b \in K\}$, où $\mathcal{O}_b = \{(0,\dots,0,b) \in K^n\}$, et
$\mathcal{O}_{a_q,\dots,a_{n-1}}$ est la courbe algébrique d'équations

$$\begin{cases} x_1 = \dots = x_{q-1} = 0 \ ; \ x_q = a_q \neq 0 \\ \tau^{q-1}(Z_2) = a_{q+1} \ ; \dots ; \ \tau^{q-1}(Z_{n-q}) = a_{n-1} \end{cases} \qquad \text{dans } K^n.$$

On notera F_q le sous-espace de K^n d'équations $x_1 = \dots = x_q = 0$,
$U_q = K^n - F_q$, $F_0 = K^n$, $F = F_{[\frac{n}{2}]}$, $U = U_{[\frac{n}{2}]} = K^n - F$.
On a $U_q = \mathcal{F}_1 \amalg \mathcal{F}_2 \amalg \dots \amalg \mathcal{F}_q$, et en particulier

$$U = \mathcal{F}_1 \amalg \mathcal{F}_2 \amalg \dots \amalg \mathcal{F}_{[\frac{n}{2}]}.$$

<u>5.2</u> <u>Proposition</u>: <u>Pour $n \geq 2$, l'ouvert U est la réunion des orbites de Γ séparées par l'anneau $\mathcal{S}_n$.</u>

<u>Preuve</u>: $Z_1,\dots,Z_{n-1}$ séparent entre elles les orbites de $\mathcal{F}_1$, et Z_1 les sépare de toutes les autres. Les équations d'une orbite $\mathcal{O}_{a_{q+1},\dots,a_{n-1}}$ de la famille $\mathcal{F}_{q+1}$ peuvent s'écrire, pour $0 \leq q \leq n-2$

$$\begin{cases} Z_1 = \tau(Z_1) = \dots = \tau^{q-1}(Z_1) = 0 \ ; \ \tau^q(Z_1) = a_{q+1} \neq 0 \\ \tau^q(Z_2) = a_{q+2} \ ; \dots ; \ \tau^q(Z_{n-q-1}) = a_{n-1} \end{cases}$$

Supposons $q < \frac{n-1}{2}$. Par le corollaire 4.9 (a) et (b), on peut trouver des entiers $r_1, r_2, \dots, r_{n-q-1}$, puis $P_0, P_1, \dots, P_{n-q-1} \in \mathcal{S}_n$, tels que $\pi^q(P_0) = Z_1^{r_1}$, $\pi^q(P_1) = Z_1^{r_1+1}$, et $\pi^q(P_j) = Z_1^{r_j} Z_j$ pour $j = 2, \dots, n-q-1$.
De même on peut trouver des entiers $s_1, \dots, s_q$, puis $Q_1, \dots Q_q \in \mathcal{S}_n$ tels que $\pi^{q-j}(Q_j) = Z_1^{s_j}$ $(j = 1, \dots, q)$. On a alors:
$Q_j|_{F_{q-j}} = \tau^{q-j}(Z_1^{s_j}) = x_{q-j+1}^{s_j}$, et par suite $Q_j|_{F_q} = 0$ pour $j = 1, \dots, q$, tandis que $P_0|_{F_q} = \tau^q(Z_1^{r_1}) = x_{q+1}^{r_1}$, $P_1|_{F_q} = \tau^q(Z_1^{r_1+1}) = x_{q+1}^{r_1+1}$,

et $P_j|_{F_q} = \tau^q(Z_1^{r_j} Z_j)$ pour $j = 2, \dots, n-q-1$.
L'orbite $\mathcal{O}_{a_{q+1}, \dots, a_{n-1}}$ est donc la courbe algébrique d'équations

$$\begin{cases} Q_1 = \dots = Q_q = 0 \ ; \\ P_0 = a_{q+1}^{r_1} \ ; \ P_1 = a_{q+1}^{r_1+1} \ ; \\ P_2 = a_{q+1}^{r_2} a_{q+2} \ ; \dots \ ; \ P_{n-q-1} = a_{q+1}^{r_{n-q-1}} a_{n-q-1} \end{cases}$$

Elle est séparée de toutes celles des familles $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_q$ par les q premières équations, des autres orbites de la famille $\mathcal{F}_{q+1}$ par les $n-q$ dernières, et de celles des familles $\mathcal{F}_{q+2}, \dots, \mathcal{F}_n$ par P_0

Comme $q < \frac{n-1}{2}$ signifie $q+1 \leq [\frac{n}{2}]$, on voit que l'anneau $\mathcal{S}_n$ sépare (entre elles et du reste) les orbites de $\mathcal{F}_1 \amalg \dots \amalg \mathcal{F}_{[\frac{n}{2}]} = U$.

Que $\mathcal{S}_n$ ne sépare aucune autre orbite résulte, pour $n \geqslant 5$, de la proposition 4.11, pour une raison de dimension: toutes les orbites de Γ sont de dimension 1 ou 0, alors que F est de dimension $n - [\frac{n}{2}] \geqslant 3$, et le degré de transcendance de $\mathcal{S}_n|_F$ est ≤ 1.

Pour $n=4$, le système de générateurs de $\mathcal{S}_4$ donné à la proposition 4.2 sépare les orbites de $\mathcal{F}_1$ (par Z_1, Y_2, Y_3) et de $\mathcal{F}_2$ (par Y_2, Y_3, Y_3'), et la restriction de $\mathcal{S}_4$ à $\mathcal{F}_2 = \{x_1 = x_2 = 0\}$ ne contient que les constantes.

Pour $n=3$, $\mathcal{S}_3 = K[x_1, x_2^2 - 2x_1x_3]$ sépare les orbites de $\mathcal{F}_1$, mais $\mathcal{S}_3|_{F_1} = K[x_2^2]$ ne sépare aucune des orbites de F_1, qui sont les droites $\{x_1=0;\ x_2=a_2\neq 0\}$ et les points $(0,0,a_3)$.

Enfin pour $n=2$, $\mathcal{S}_2 = K[x_1]$ sépare les orbites de $\mathcal{F}_1$ qui sont les droites $\{x_1 = a_1 \neq 0\}$, et non celles de F_1 qui sont des points. ∎

5.3 La proposition précédente implique que la deuxième stratification canonique de l'action de Γ sur K^n, au sens de Dixmier et Raynaud, c'est-à-dire celle obtenue en itérant la construction de l'ouvert Ω_2 de [8], §2, existe, même si K n'est pas algébriquement clos, et qu'on peut la décrire explicitement : la première strate est en effet l'ouvert U de 5.2 ; définissons une suite finie strictement décroissante d'entiers (n_p), par

$$n_0 = n \ , \quad n_{p+1} = n_p - \left[\frac{n_p}{2}\right] \quad ; \quad 0 \leq p \leq \ell(n),$$

où $\ell(n)$ est l'entier défini par

$$2^{\ell(n)-1} < n \leq 2^{\ell(n)} \qquad (\text{on a } n_{\ell(n)} = 1).$$

L'action de $\Gamma = \Gamma_n$ sur le sous-espace F_{n_p} de K^n s'identifie à l'action de Γ_{n_p} sur K^{n_p}, et l'anneau des invariants algébriques de cette action sépare donc, d'après 5.2, les orbites de $U'_{n_{p+1}} - U'_{n_p}$, qui est ouvert dans F_{n_p} :

Corollaire: Les strates de la deuxième stratification canonique, au sens de Dixmier et Raynaud, de l'action de Γ dans K^n sont les sous-variétés quasi-affines S_p $(1 \leq p \leq \ell(n)+1)$ de K^n, définies avec les notations de 5.1 par

$$S_1 = U = U_{n-n_1} \ ; \ S_p = U_{n-n_p} - U_{n-n_{p-1}} \ (2 \leq p \leq \ell(n)) \ ; \ S_{\ell(n)+1} = F_{n-1}$$

En particulier il y en a $\ell(n)+1$, où $\ell(n)$ est l'entier défini par $2^{\ell(n)-1} < n \leq 2^{\ell(n)}$, et chacune, sauf la dernière, est l'ouvert U de 5.1 et 5.2, pour une valeur de n appartenant à la suite (n_p) définie par $n_0 = n$, $n_{p+1} = n_p - \left[\frac{n_p}{2}\right]$, $0 \leq p \leq \ell(n)$.

5.4 La restriction de l'action de Γ à chaque strate S_p de la deuxième stratification canonique est isomorphe à l'action de Γ dans l'ouvert U de 5.1 et 5.2 pour une certaine valeur de n. Cette action admet un quotient ([8], corollaire 2.4.2), c'est-à-dire qu'il existe une variété quasi-affine V_n et un morphisme surjectif et universellement ouvert $\varphi : U \longrightarrow V_n$, dont les fibres sont les orbites de Γ dans U, et tel que les fonctions algébriques régulières sur V_n s'identifient par φ^* aux fonctions algébriques régulières sur U invariantes sous l'action de Γ.

Comme U est normale, par la propriété universelle du quotient, V_n est isomorphe à sa normalisée, donc elle aussi est normale.

Si $n \leq 3$, $\mathcal{S}_n$ est une algèbre de polynômes, et V_n est aisée à décrire (cf. 5.8). Dès que $n \geq 4$, $K^n - U$ est de codimension au moins 2, les fonctions régulières sur U sont les restrictions à U des polynômes sur K^n, et l'anneau des fonctions régulières sur V_n n'est donc autre que $\mathcal{S}_n$.

5.5 Pour $1 \leq q < \frac{n-1}{2}$, on peut trouver en utilisant le corollaire 4.9 (a) et (b) des entiers $r_1^q, r_2^q, \dots, r_{n-q-1}^q$, et des polynômes bihomogènes $P_0^q, P_1^q, \dots, P_{n-q-1}^q \in \mathcal{S}_n$ tels que $\pi^q(P_0^q) = Z_1^{r_1^q}$, $\pi^q(P_1^q) = Z_1^{r_1^q+1}$, et $\pi^q(P_j^q) = Z_1^{r_j^q} Z_j$ pour $2 \leq j \leq n-q-1$.

Quitte à remplacer r_j^q par $\sup\limits_{1 \leq q < \frac{n-1}{2}} r_j^q$, on peut supposer

$r_j^q = r_j$, indépendant de q et strictement positif.

Notons $W_n = \Phi(U)$, où Φ est l'application de K^n dans K^N définie par:

$$\Phi = (Z_1, Z_1^{r_1} Z_2, \dots, Z_1^{r_{n-1}} Z_{n-1}; P_0^1, P_1^1, \dots, P_{n-2}^1; P_0^{[\frac{n}{2}]-1}, P_1^{[\frac{n}{2}]-1}, \dots P_{n-[\frac{n}{2}]}^{[\frac{n}{2}]-1})$$

où $N = -1 + n + (n-1) + \dots + (n - [\frac{n}{2}]) = \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{2}(n - [\frac{n}{2}])(n - [\frac{n}{2}] - 1) - 1$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\right]\left(2n - 1 - \left[\frac{n}{2}\right]\right) + n - 1$$

et notons $(y_1, \dots, y_{n-1}; y_{0,1}, \dots, y_{n-2,1}; y_{0,[\frac{n}{2}]-1}, \dots y_{n-[\frac{n}{2}],[\frac{n}{2}]-1})$ la variable de K^N.

On montre comme en 5.2 que les fibres de $\Phi : U \to W_n$ sont les orbites de Γ dans U. Notons encore

$\Omega_q = \{y_1 = \dots = y_{n-1} = y_{0,1} = \dots = y_{n-2,1} = \dots = y_{0,q-1} = \dots = y_{n-q,q-1} = 0 ; y_{0,q} \neq 0\} \subset K^N$ pour $0 < q < [\frac{n}{2}]$, et $W_n^q = W_n \cap \Omega_q$. De même $\Omega_0 = \{y_1 \neq 0\}$ et $W_n^0 = W_n \cap \Omega_0$

<u>5.6</u> <u>Lemme</u>: <u>W_n^q est une sous-variété algébrique fermée lisse de dimension $n-q-1$ de Ω_q. On a $W_n = W_n^0 \amalg \dots \amalg W_n^{[\frac{n}{2}]-1}$, et W_n est une variété quasi-affine irréductible.</u>

<u>Preuve</u>: Par la proposition 4.1 appliquée aux invariants P_j^k, on peut trouver des entiers α_{jik}^n et des polynômes quasi-homogènes φ_{jik}^n tels que W_n^0 soit la sous-variété fermée de Ω_0 d'équations

$$y_1^{\alpha_{jik}^n} y_{jik} = \varphi_{jik}^n (y_1^{-r_1} y_2, \dots, y_1^{-r_{n-1}} y_{n-1}) \text{ pour } 1 \le k < \tfrac{n-1}{2} \text{ et } 0 \le j \le n-k-1$$

De même la proposition 4.1, appliquée après décalage des indices par τ^{q-1}, fournit des entiers α_{jik}^{n-q} et des polynômes φ_{jik}^{n-q} quasi-homogènes tels que W_n^q soit la sous-variété fermée de Ω_q d'équations

$$y_{1,q}^{r_1} = y_{0,q}^{r_1+1}, \text{ et } \left(\frac{y_{1,q}}{y_{0,q}}\right)^{\alpha_{jik}^{n-q}} \cdot y_{jik} = \varphi_{jik}^{n-q}\left(\left(\frac{y_{0,q}}{y_{1,q}}\right)^{r_2} \cdot y_{2,q}, \dots, \left(\frac{y_{0,q}}{y_{1,q}}\right)^{r_{n-q-1}} \cdot y_{n-q-1,q}\right)$$

pour $q < k < \frac{n-1}{2}$ et $0 \le j \le n-k-1$.

En particulier $y_{0,q+1}, \dots, y_{n-[\frac{n}{2}],[\frac{n}{2}]-1}$ sont des fonctions de $y_{0,q}, y_{1,q}, \dots, y_{n-q-1,q}$, régulières dans Ω_q, et W_n^q est l'intersection de ce graphe et du cylindre lisse $\{y_{1,q}^{r_1} = y_{0,q}^{r_1+1}\}$. D'où la première assertion. La deuxième est claire, et W_n est donc constructible. Mais comme les fibres de $\Phi|_U$ sont toutes des courbes lisses, W_n est une variété. Enfin le morphisme $\Phi : U \to W_n$ est surjectif, et U est irréductible, donc W_n aussi. ■

<u>5.7 Proposition</u> : <u>La variété-quotient</u> $V_n = U/\Gamma$ <u>est la normalisée de la variété quasi-affine</u> W_n

<u>Preuve</u>. Par le lemme 5.6 le morphisme $\Phi : U \to W_n$ se factorise de façon unique en $\Phi = \alpha \circ \Psi$, où $\Psi : U \to V_n$ est le quotient canonique du numéro 5.4, dont les fibres sont les orbites de Γ, et où $\alpha : V_n \to W_n$ est donc un morphisme bijectif entre variétés quasi-affines. Comme U est normale, V_n aussi, et α n'est autre que le morphisme de normalisation de W_n, d'après le n° 6.4 (indépendant!) du paragraphe suivant. ■

(On pourrait aussi utiliser le lemme 2.2.8 de [8]).

5.8 On décrit dans ce numéro la variété-quotient V_n pour $n \leq 5$.

- Si $n=1$, $\mathcal{G}_1 = K[x_1]$, $F = \emptyset$, $U(1) = K$, et $V_1 = K$.

- Si $n=2$, $\mathcal{G}_2 = K[x_1]$, $F = \{x_1 = 0\} \subset K^2$, $U(2) = K^* \times K$, et $V_2 = K^*$.

- Si $n=3$, on a par 4.2 $\mathcal{G}_3 = K[x_1, x_2^2 - 2x_1x_3]$, et par 5.2 $F = \{x_1 = 0\} \subset K^3$ et $U(3) = K^* \times K^2 \subset K^3$. L'application $K^3 \xrightarrow{(z_1, z_2)} K^2$ envoie donc $U(3)$ sur $V_3 = K^* \times K$.

- Si $n=4$, on a par 5.2 $F = \{x_1 = x_2 = 0\} \subset K^4$, donc $U(4) = (K^2)^* \times K^2 \subset K^4$ et par 4.2, $\mathcal{G}_4 = K[y_1, y_2, y_3, y_4]/(R_1)$, où $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2^2 - 2x_1x_3$, $y_3 = x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4$, $y_4 = 3x_2^2x_3^2 - 6x_2^3x_4 - 8x_1x_3^3 + 18x_1x_2x_3x_4 - 9x_1^2x_4^2$ et (R_1) : $y_1^2y_4 - y_2^3 + y_3^2 = 0$.

L'application $q : K^4 \xrightarrow{(y_1, y_2, y_3, y_4)} K^4$ envoie donc K^4 dans la sous-variété affine $\overline{V_4}$ d'équation $y_1^2y_4 - y_2^3 + y_3^2 = 0$. Comme $dR_1 = (2y_1y_4, -3y_2^2, 2y_3, y_1^2)$ ne s'annule que sur la droite $H = \{y_1 = y_2 = y_3 = 0\}$ de K^4, $\overline{V_4}$ est la réunion de H et de la sous-variété quasi-affine lisse de K^4,

$$V_4 = \{y_1^2y_4 - y_2^3 + y_3^2 = 0 \,;\, y_1 \neq 0 \text{ ou } y_2 \neq 0\}$$

qui est précisément l'image de $U(4)$ par q (l'image de K^4 est $V_4 \cup (0,0,0,0)$.). Par suite $U(4)/\Gamma = V_4$.

- Si $n=5$ on a par 5.2 $F = \{x_1 = x_2 = 0\} \subset K^5$, et $U(5) = (K^2)^* \times K^3 \subset K^5$. La proposition 4.3 donne $\mathcal{G}_5 = K[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]/(R_2)$, avec $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2^2 - 2x_1x_3$, $y_3 = x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4$, $y_4 = x_3^2 - 2x_2x_4 + 2x_1x_5$, $y_5 = 2x_3^3 - 6x_2x_3x_4 + 6x_2^2x_5 + 9x_1x_4^2 - 12x_1x_3x_5$.
et (R_2) : $y_1^3y_5 + y_2^3 - y_3^2 - 3y_1^2y_2y_4 = 0$

L'application $q : K^5 \xrightarrow{(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)} K^5$ envoie K^5 dans la sous-variété affine $\overline{V_5}$ d'équation $y_1^3y_5 + y_2^3 - y_3^2 - 3y_1^2y_2y_4 = 0$. Comme $dR_2 = (3y_1^2y_5 - 6y_1y_2y_4, 3y_2^2 - 3y_1^2y_4, -2y_3, -3y_1^2y_2, y_1^3)$ ne s'annule que sur le plan $H = \{y_1 = y_2 = y_3 = 0\}$ de K^5, $\overline{V_5}$ est la réunion de H et de la <u>sous-variété quasi-affine lisse V_5 de K^5</u> d'équations

$$\underline{V_5 = \{ y_1^3 y_5 - 3y_1^2 y_2 y_4 + y_2^3 - y_3^2 = 0 \; ; \; y_1 \neq 0 \text{ ou } y_2 \neq 0 \}}$$

qui est précisément l'image de $U(5)$ par q (l'image de K^5 est la réunion de V_5 et de la cubique d'équation $y_5^2 = 4y_4^3$ dans H). Par suite $U(5)/\Gamma = V_5$.

La description explicite de la variété-quotient V_n pour $n \geqslant 6$ est beaucoup plus délicate, car l'anneau $\mathcal{G}_n$ est alors de présentation beaucoup plus compliquée. L'étude du cas $n = 6$ fait l'objet du chapitre II.

(§6) RETOUR SUR L'ANNEAU DES INVARIANTS

6.1 On a montré (proposition 2.10) que l'anneau $\mathcal{S}_n$ des invariants algébriques de Γ est de type fini, donc noethérien. Mais la preuve ne donne aucun moyen d'estimer le nombre des générateurs, ni leurs degrés, encore moins de les calculer.

Pourtant la bigraduation de $\mathcal{S}_n$ impose de fortes contraintes au choix d'un système de générateurs, et laisse peu d'arbitraire (voir ci-dessous le "lemme de calcul" 6.6)

6.2 Lemme : Pour $P \in \mathcal{P}_n$, l'application $g \mapsto g.P$ de Γ dans $\mathcal{P}_n$ est constante si $P \in \mathcal{S}_n$, injective sinon.

Preuve : Soit $g \in \Gamma - \{id\}$ et $P \in \mathcal{P}_n$ tel que $gP = P$. On a $g = \exp t_0 J$ pour un certain $t_0 \in K^*$, et pour tout $t \in \mathbb{Z}$

$$0 = gP - P = P\left(x_1, x_2 + t_0 t x_1, \dots, x_n + t_0 t x_{n-1} + \dots + \frac{(t_0 t)^{n-1}}{(n-1)!} x_1\right) - P(x_1, \dots, x_n)$$

Le second membre est un polynôme de $t \in K$ qui s'annule sur tous les entiers, donc nul, ce qui signifie $gP = P$, pour tout $g \in \Gamma$. ∎

6.3 Proposition : Les facteurs irréductibles d'un élément P de $\mathcal{S}_n$ sont dans $\mathcal{S}_n$. En particulier $\mathcal{S}_n$ est factoriel.

Preuve : Soit $P \in \mathcal{S}_n - \{0\}$, $g \in \Gamma - \{id\}$ et $P = P_1 \dots P_q$ la décomposition irréductible de P. Comme $(gP_1)\dots(gP_q) = gP = P = P_1 \dots P_q$, l'action de g permute $P_1, \dots, P_q$ et il existe donc un entier r tel que g^r les conserve. La conclusion résulte alors du lemme 6.2. ∎

6.4 Rappelons ici qu'un anneau factoriel est intégralement clos : si $R = \frac{P}{Q}$ est solution de $R^m + P_1 R^{m-1} + \dots + P_m = 0$, où $P, Q, P_1, \dots, P_m$ sont des éléments de l'anneau, il vient

$$P^m + P_1 P^{m-1} Q + \dots + P_m Q^m = 0$$

et chaque facteur irréductible de Q divise P^m, donc P.
Par suite R appartient à l'anneau. ∎

En particulier par 6.3, $\mathcal{S}_n$ est donc intégralement clos.

Mais le système Φ d'invariants du n°5.5 sépare les orbites de U,
et par un théorème de Hilbert ("Über die vollen Invariantensysteme",
Math. Annalen 42 (1893) p 313-373, §4: "der grundlegende Satz über die
Invarianten, deren Verschwinden das Verschwinden aller übrigen Inva-
rianten zur Folge hat"), opportunément cité dans [19] §3, p. 312, les
éléments de $\mathcal{S}_n$ sont tous entiers sur le sous-anneau de $\mathcal{S}_n$
engendré par Φ. Il s'ensuit que $\mathcal{S}_n$ n'est autre que la
clôture intégrale de ce sous-anneau. Au vu de la proposition 4.1,
il suffit d'ailleurs de prendre la clôture intégrale de $\mathcal{O}(W_n)$
(notation du n°5.5) dans son localisé en z_1.

Comme la clôture intégrale d'une K-algèbre de type fini
est de type fini par le "critère" d'E. Noether (par exemple [22], §42),
une autre preuve, un peu plus "constructive", de la finitude de $\mathcal{S}_n$,
résulte donc de la proposition suivante:

<u>6.5 Proposition</u>: <u>L'algèbre des fonctions régulières sur W_n est de type fini</u>

<u>Preuve</u>: Elle peut se faire par récurrence sur n. Utilisons le lemme 5.6, et
les notations de 5.5 et 5.6, et notons $\mathcal{O}(V)$ l'algèbre des fonctions
régulières sur une variété V. On a par 5.6:
$W_{n+1} = W_{n+1}^0 \amalg \ldots \amalg W_{n+1}^{[\frac{n+1}{2}]-1}$ et $W_n = W_n^0 \amalg \ldots \amalg W_n^{[\frac{n}{2}]-1}$
quitte à modifier les entiers $r_j = r_j^{(n)}$ de 5.5, W_n^q s'identifie à W_{n+1}^{q+1}
pour $q < \inf\left([\frac{n}{2}], [\frac{n+1}{2}]-1\right) = [\frac{n+1}{2}]-1$, et par suite $W_{n+1} - W_{n+1}^0$
s'identifie par points à W_n si n est impair, à W_n privée d'une sous-
variété $W_n^{[\frac{n}{2}]-1}$ de dimension $n - [\frac{n}{2}]$ si n est pair. Comme W_n est de
dimension $n-1$, $W_n^{[\frac{n}{2}]-1}$ est de codimension 2 au moins dès que $n \geq 6$,
et par suite $\mathcal{O}(W_{n+1} - W_{n+1}^0)$ est une extension intégrale finie (due à
la modification des r_j) de $\mathcal{O}(W_n)$ dès que $n \geq 5$.

Or on sait que $\mathcal{O}(W_n)$ est de type fini pour $n \leq 5$, par 5.3, et
par construction des P_j^k, les fonctions de $\mathcal{O}(W_{n+1} - W_{n+1}^0)$ se
relèvent dans $\mathcal{O}(W_{n+1})$. La conclusion s'en déduit par récurrence
sur le degré d'une fonction de $\mathcal{O}(W_{n+1})$, qui est un polynôme
sur K^N puisque $n+1 \geq 6$. ∎

6.6 La preuve de la proposition précédente fournit l'outil d'un calcul explicite (par récurrence sur n) d'une présentation complète de l'anneau $\mathcal{S}_n$, au moins en principe, et c'est l'idée utilisée au chapitre II pour le calcul de $\mathcal{S}_6$. (cf. aussi [19] p. 305)

Nous dirons que $\{H_1, H_2, \dots, H_N\}$ est un système normal de générateurs de $\mathcal{S}_n$ s'il vérifie les trois conditions

(g_1) Tout élément de $\mathcal{S}_n$ est un polynôme des $H_i \in \mathcal{S}_n$, à coefficients dans K.

(g_2) Aucun H_{i_0} n'est un polynôme des H_i $(i \neq i_0)$

(g_3) Les H_i sont bi-homogènes et ordonnés par bidegrés croissants pour l'ordre lexicographique de $\mathbb{N}^2$:
$\forall i \in \{1, \dots, N\}$ $\exists (p_i, k_i) \in \mathbb{N}^2$, $H_i \in \mathcal{S}_n^{p_i,k_i}$
et ou bien $p_i < p_{i+1}$, ou bien $p_i = p_{i+1}$ et $k_i \leq k_{i+1}$

L'énoncé suivant est alors clair, et sera souvent utilisé au chapitre II :

"Lemme de calcul"

a) Soit $\{H_1, \dots, H_N\}$ un système normal, $P \in \mathcal{S}_n^{p,k}$ non nul,
et supposons qu'il existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que

$$(p,k) \leq (p_i,k_i) \quad \text{et} \quad (p,k) \notin \sum_{j<i} \mathbb{N}\cdot(p_j,k_j)$$

Alors $(p,k) = (p_i,k_i)$

b) Si de plus $(p_i,k_i) < (p_{i+1},k_{i+1})$, c'est-à-dire dès que $\delta_n^{p_i,k_i} = 1$,
on a $H_i = \lambda P$, avec $\lambda \in K^*$.

6.7 Le lemme précédent donne un algorithme de calcul d'un système normal de $\mathcal{S}_n$: supposons avoir déterminé $H_1, \dots, H_{i-1}$
et soit $\mathcal{S}_n^{(i)}$ le sous-anneau de $\mathcal{S}_n$ engendré par $H_1, \dots H_{i-1}$
$\mathcal{S}_n^{(i)}$ est lui-même bigradué, et aussi l'espace quotient $\mathcal{S}_n / \mathcal{S}_n^{(i)}$.

Posons $(p,q) = \inf_{\mathbb{N}^2} \{(p',q') \mid \dim (\mathcal{S}_n/\mathcal{S}_n^{(i)})^{p',q'} = d' \neq 0\}$
et $d = \dim (\mathcal{S}_n/\mathcal{S}_n^{(i)})^{p,q}$. Par le lemme de calcul ci-dessus, on a

$(p_i,q_i) = (p_{i+1},q_{i+1}) = \cdots = (p_{i+d-1},q_{i+d-1}) = (p,q)$, et plus précisément $H_i,\dots,H_{i+d-1}$ appartiennent à $\mathcal{S}_n^{p,q}$ et leurs images dans $(\mathcal{S}_n/\mathcal{S}_n^{(i)})^{p,q}$ forment une base de cet espace vectoriel de dimension d. On peut donc les calculer en résolvant un système linéaire, puisqu'on connait $\Delta_n^{p,q}$ et les H_j pour $j<i$.

Mais il faut avoir déterminé la dimension de $(\mathcal{S}_n^{(i)})^{p,q}$, donc les relations algébriques bihomogènes de bidegré $\leq (p,q)$ entre les H_j $(j<i)$. Si $P(H_1,\dots,H_{i-1})=0$ est une telle relation de bidegré (p,q), $P(\pi(H_1),\dots,\pi(H_{i-1}))$ est une relation du même bidegré entre les éléments connus $\pi(H_1),\dots,\pi(H_{i-1})$ de l'anneau $\mathcal{S}_{n-1}$, de structure supposée déjà connue.

Réciproquement toute relation entre $\pi(H_1),\dots,\pi(H_{i-1})$ de ce type, de bidegré (p,q), se relève en $P(H_1,\dots,H_{i-1}) = Z_1 \cdot H$, pour un certain $H \in \mathcal{S}_n^{p-1,q-1}$, et H est un polynôme calculable de $H_1,\dots,H_{i-1}$.

<u>6.8</u> L'algorithme de calcul précédent est celui utilisé au chapitre II pour le calcul de $\mathcal{S}_6$. Il est entièrement mécanisable (on n'en a mécanisé en fait que les parties les plus inhumaines). Mais il est <u>aveugle</u>: il ne sait pas s'arrêter. Il serait donc intéressant de le borner en obtenant des estimations, ou au moins des majorations de N, ou de (p_N, k_N).

L'algèbre $\mathcal{S}_n$ est de présentation finie (de longueur $\leq n$) par le théorème de Hilbert ([25], Ch VII, § 13, théorème 43), et les idéaux de syzygies sont eux-mêmes bigradués.

Si l'on oublie l'une des graduations, par exemple le poids, la <u>fonction de Hilbert</u> Δ_n^p de l'anneau $\mathcal{S}_n$ devient polynomiale pour p assez grand: il existe un entier p_0 et un polynome Π_n d'une variable, de degré $n-1$, tels que $\Delta_n^p = \Pi_n(p)$ pour $p \geq p_0$ ([25], Ch VII, § 12, théorème 41). Comme p_0 peut s'estimer en fonction de N et des degrés des syzygies, une majoration de p_0 fournirait la borne voulue. Voir à ce sujet la discussion de [19], peu praticable.

6.9 Il existe une manière plus directe de borner N, et de démontrer la complétude d'un système de générateurs de $\mathcal{S}_n$ calculé par la méthode du 6.7, si l'on suppose déjà connue la structure de $\mathcal{S}_{n-1}$: il suffit de calculer les restrictions $\pi(H_1), \ldots, \pi(H_N)$ et de démontrer qu'elles engendrent tout le sous-anneau $\pi(\mathcal{S}_n)$ de $\mathcal{S}_{n-1}$; on conclut alors par récurrence sur le degré d'un élément de $\mathcal{S}_n$.

C'est la méthode déjà utilisée pour la démonstration de la proposition 4.3 (cas de $\mathcal{S}_5$), et d'ailleurs aussi dans le cas de $\mathcal{S}_4$ (prop. 4.2).

Une preuve analogue peut s'écrire dans le cas de $\mathcal{S}_6$, utilisant la proposition I.4.3, les restrictions des 23 générateurs calculées au paragraphe II.3 explicitement, et les inégalités des numéros I.4.8, 9 et 10. Elle est évidemment beaucoup plus longue que celle du I.4.3, quoique fondée sur les mêmes raisonnements.

Dans le cas $n=6$, la complétude du système de 23 générateurs présenté au chapitre II résulte aussi, via l'identification aux covariants de $Sl(2,K)$, des calculs des auteurs classiques : [24], ou [10] chap. VII.