CHAPITRE III
ESPACES VECTORIELS NORMÉS

C'est dans ce cadre qu'on obtient le plus grand nombre de résultats profonds.

(A) NORMES SUR UN ESPACE VECTORIEL

1- Dans toute la suite E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (le plus souvent, et sinon, c'est sur $\mathbb{R}$). La façon la plus simple de le munir d'une métrique (et donc d'une topologie) est de le munir d'une <u>norme</u>, c'est-à-dire d'une application, souvent notée $\| \ \|$, de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les trois axiomes :

(1) $\forall x,y \in E \quad \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ ("inégalité triangulaire")

(2) $\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(3) $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

On dit alors que E est un <u>espace vectoriel normé</u>

Posant alors $d(x,y) = \|x-y\|$ pour $x,y \in E$, on définit sur E une <u>distance</u> "associée" à la norme (les axiomes d'une distance sont clairs au vu de (1), (2), (3), puisque (2) implique $\|-x\| = \|x\|$, d'où $d(y,x) = d(x,y)$.)
Un espace vectoriel normé est donc automatiquement un espace métrique, donc aussi a fortiori un espace topologique séparé, auquel peuvent donc s'appliquer tous les résultats des chapitres I et II.

2- <u>Remarques</u> : •(a) En particulier $\|x\| = d(x,0)$ pour $x \in E$, et

$$\|x-y\| \ge \big| \|x\| - \|y\| \big| \quad \text{pour } x,y \in E,$$

(puisque $\|x\| \le \|x-y\| + \|y\|$, et $\|y\| \le \|y-x\| + \|x\|$)

•(b) Deux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sur le même espace E sont dites <u>équivalentes</u> si les distances associées le sont (au sens de II.A.3), autrement dit (par la remarque (a) ci-dessus), si et seulement s'il existe $A, B > 0$ tels que

$$\forall x \in E \qquad A\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le B\|x\|_1$$

C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E, et deux normes équivalentes définissent la même topologie (II.A.3)

Par exemple sur $\mathbb{C}^n$, les normes suivantes (on note $x = (x_1, \dots, x_n)$) :

$$N_1(x) = \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \ ; \quad N_2(x) = \|x\|_2 = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\Big)^{1/2} ; \quad N_\infty(x) = \|x\|_\infty = \sup_{j=1,\dots,n} |x_j|$$

ont pour distances associées respectives d_1, d_2, d_∞, dont on a déjà vu au II.A.3 l'équivalence.

•(c) En particulier multiplier la norme par une constante positive ne modifie pas la topologie, et la propriété (2) signifie que les homothéties (vectorielles) de E sont des applications qui multiplient les distances par une constante.

Ainsi sur $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) lui-même, il n'y a, à une constante près, qu'une seule norme possible, qui est le "module", et on considèrera toujours $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$)

comme un espace vectoriel normé, muni de $|\ |$.

• (d) Visiblement, les axiomes (1) et (2) assurent que les applications qui définissent la structure d'espace vectoriel de E, $E\times E \to E$, $(x,y)\mapsto x+y$ et $\mathbb{C}\times E\to E$, $(\lambda,x)\mapsto \lambda x$

sont continues (et même lipschitziennes pour la métrique-produit)

Si on suppose de plus que E est une algèbre, c'est-à-dire qu'il est aussi muni d'un produit bilinéaire $E\times E\to E$, $(x,y)\mapsto xy$, on demandera aussi à ce produit d'être lipschitzien, ce qui s'exprimera, au vu de la remarque précédente et quitte à modifier la norme par un facteur constant positif, par:

(4) $\forall x,y\in E \qquad \|xy\| \le \|x\|\|y\|$

On dira alors que $\|\ \|$ est une "norme d'algèbre", et que E est une "algèbre normée".

Exemple: $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$, où K est un compact, muni de la norme "de la convergence uniforme" déja étudiée abondamment au § II.E:

$$N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)| \quad \text{pour } f: K\to\mathbb{C} \text{ continue}$$

Si cette algèbre est unitaire, la propriété (4) implique alors $\|1\|\ge 1$, puisque $\|1\| = \|1.1\| \le \|1\|^2$ (et $1\ne 0 \to \|1\|>0$); et si l'on suppose de plus $\|1\|=1$ (tout en maintenant (4)) on parlera de "norme d'algèbre unitaire" et "d'algèbre unitaire normée". C'est le cas de l'exemple ci-dessus $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$.

• (e) Comme on l'a déjà sous-entendu au début de la remarque précédente, le produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels normés, est "presque" naturellement normé: si $E=\prod_{j=1}^{n}(E_j,\|\ \|_j)$ et $x=(x_1,\dots,x_n)\in E$, on peut poser $N_1(x)=\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_j$, $N_2(x)=\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_j^2\right)^{1/2}$, $N_\infty(x)=\sup_{j=1,\dots,n}\|x_j\|_j$, par exemple, définissant ainsi trois normes équivalentes; la norme habituelle (euclidienne) sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ n'est autre que la norme N_2 pour le produit de n exemplaires de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. Que le choix n'ait guère d'importance résulte du théorème 4 ci-dessous

3 - Exemples: les espaces ℓ^p

Pour $p\in[1,+\infty[$, on note ℓ^p l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes telles que $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^p<+\infty$, muni de $N_p(u)=\|u\|=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^p\right)^{1/p}$.

De même on note ℓ^∞ l'ensemble des suites complexes bornées, muni de $N_\infty(u)=\|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$. (On a noté $u:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ pour $u=(u_0,u_1,\dots,u_n,\dots)$.)

On va montrer que, pour tout $p\in[1,+\infty]$, ℓ^p est un espace vectoriel normé par N_p.

Lemme: Soient $p,q\in]1,+\infty[$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, et $A,B\ge 0$. Alors $A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\le \frac{A}{p}+\frac{B}{q}$

Preuve: Comme $(\operatorname{Log} x)''=\frac{-1}{x^2}<0$ sur $\mathbb{R}^+$, $\operatorname{Log}(A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}})=\frac{1}{p}\operatorname{Log}A+\frac{1}{q}\operatorname{Log}B\le\operatorname{Log}\left(\frac{A}{p}+\frac{B}{q}\right)$ ∎

Proposition: (Inégalité "de Hölder"): Pour $p,q\in[1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^q$, la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans ℓ^1, et

$$(*) \qquad \left|\sum_{n\in\mathbb{N}}u_nv_n\right| \le \left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|v_n|^q\right)^{1/q}$$

Preuve : (*) est clair pour $p=1$, $q=\infty$ par exemple. Pour $p,q\in]1,+\infty[$, comme $|\sum u_n v_n| \leq \sum |u_n||v_n|$ on peut supposer (u_n) et (v_n) à valeurs ≥ 0 ; on peut aussi supposer les u_n non tous nuls, et les v_n aussi, le résultat étant clair sinon. Dans ce cas $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p = C > 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|^q = D > 0$, et l'inégalité (*) étant homogène en u et v (invariante par homothéties de rapports $C^{\frac{1}{p}}$ et $D^{\frac{1}{q}}$) on peut supposer $C=D=1$, et le second membre vaut alors 1. Du lemme on tire pour tout entier n, $u_n v_n \leq \frac{1}{p}u_n^p + \frac{1}{q}v_n^q$, et sommant pour $n\in\mathbb{N}$, il vient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n \leq \frac{1}{p}\cdot C + \frac{1}{q}\cdot D = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, soit (*). ∎

<u>Proposition (Inégalité "de Minkowski")</u> Pour $p\in[1,+\infty]$ et $(u_n),(v_n)\in\ell^p$, $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p$, et :

$$(**)\quad \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n+v_n|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|^p\Big)^{1/p}$$

Preuve : De nouveau (**) est clair pour $p=1$ ou $p=\infty$, et si $p\in]1,+\infty[$, et $q=\frac{p}{p-1}$, on peut encore supposer $\sum_{n=0}^{N} |u_n+v_n|^p = E > 0$ pour un certain $N\in\mathbb{N}$, et il vient

$E \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n||u_n+v_n|^{p-1} + \sum_{n=0}^{N} |v_n||u_n+v_n|^{p-1}$, d'où, d'après (*),

$$\leq \Big(\sum_{n=0}^{N}|u_n|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{n=0}^{N}|u_n+v_n|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} + \Big(\sum_{n=0}^{N}|v_n|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{n=0}^{N}|u_n+v_n|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}$$

$= E^{1-\frac{1}{p}}\Big[\Big(\sum_{n=0}^{N}|u_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=0}^{N}|v_n|^p\Big)^{1/p}\Big]$, puisque $(p-1)q=p$ et $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$,

$\leq E^{1-\frac{1}{p}}\Big\{\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=0}^{\infty}|v_n|^p\Big)^{1/p}\Big\}$; d'où en simplifiant par $E^{1-\frac{1}{p}}$,

$E^{\frac{1}{p}} \leq N_p(u) + N_p(v)$, et $N_p(u+v) \leq N_p(u)+N_p(v)$ à la limite quand $N\to\infty$, soit (**). ∎

<u>Remarques</u> : • Les inégalités de Hölder et de Minkowski valent au fond quelles que soient les suites (u_n) et (v_n), le terme de droite étant $+\infty$ dès que $(u_n)\notin\ell^p$ ou $(v_n)\notin\ell^q$ ou ℓ^p.

• L'inégalité de Minkowski démontre la propriété (1) du 1, pour $\|\ \|_p = N_p$; comme (2) et (3) sont clairs, N_p est donc une <u>norme</u>, qui fait de ℓ_p un exemple d'<u>espace vectoriel normé</u>.

• En restreignant la portée des inégalités de Hölder et de Minkowski au sous-espace (commun à tous les ℓ_p, et fermé dans chacun d'entre eux) des suites dont seuls les n premiers termes sont non nuls, identifié à $\mathbb{C}^n$, on obtient :
$\forall p,q\in[1,+\infty]$, $\forall x,y\in\mathbb{C}^n$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \Big|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\Big)^{1/q}$
et $\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$, et la dernière inégalité démontre que la fonction d_p envisagée au II.A.1 est bien une distance sur $\mathbb{C}^n$.

• En particulier pour $p=q=2$, ℓ^2 est un espace vectoriel normé muni d'un "<u>produit scalaire</u>" : $\ell^2\times\ell^2 \to \mathbb{C}$
$((u_n),(v_n)) \longmapsto \sum u_n \overline{v_n} = \langle u,v\rangle$
forme sesqui-linéaire bien définie, grâce à l'inégalité de Hölder, et en outre : $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|_2\|v\|_2$ ("<u>inégalité de Cauchy-Schwarz</u>") pour $u,v\in\ell^2$, et $\langle u,u\rangle = \|u\|_2^2$ $(u\in\ell^2)$ (en particulier la forme est donc définie positive.

- dès que $p_1 \leq p_2$, on a $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$; en particulier $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^\infty$ pour tout $p \in]1,+\infty[$

Preuve : dès que $p_1 < \infty$, la convergence de la série $\sum |u_n|^{p_1}$ implique que $|u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc que $|u_n| < 1$ pour n assez grand, et alors $|u_n|^{p_2} \leq |u_n|^{p_1}$, donc $\sum |u_n|^{p_2} < \infty$. ■

Exercices : Montrer que chaque inclusion $\ell^{p_1} \hookrightarrow \ell^{p_2}$ est stricte et continue, pour $p_1 < p_2$ (utiliser l'inégalité de Hölder, d'abord pour $p_1 = 1$, avec $v_n = u_n^{p_2 - 1}$ ...)
En déduire que sur ℓ^{p_1}, les normes N_{p_1} et N_{p_2} ne sont pas équivalentes, puis qu'elles ne définissent même pas la même topologie.

4 - Théorème : Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Preuve : Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. Pour $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, posons $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$; il est clair que $\| \ \|_1$ est une norme sur E, et qu'il suffit de montrer l'équivalence de $\| \ \|$ et $\| \ \|_1$. Si $A = \sup_{j=1,\dots,n} \|e_j\|$, on a pour $x \in E$, $\|x\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|e_j\| \leq A \|x\|_1$;
pour montrer l'autre inégalité, remarquons que la sphère-unité S de $(E, \| \ \|_1)$, c'est-à-dire $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ est un fermé borné de $\mathbb{C}^n$ muni de sa norme $\| \ \|_2$ habituelle, donc compact (corollaire I.B.3), et que la fonction $x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|$ est continue sur $\mathbb{C}^n$, puisque par la dernière inégalité ci-dessus, pour $x, y \in \mathbb{C}^n$

$$\|x-y\|_E \leq A \|x-y\|_1 = A \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| \leq A\sqrt{n} \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}$$

(c'est en fait l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des suites finies $(x_j - y_j)$ et (1).)
Cette fonction atteint donc sur S son infimum B, qui est par suite strictement positif : $\exists x_0 \in S$, $\inf_{x \in S} \|x\| = \|x_0\| = B > 0$

Si maintenant $x \in E$, et $x = \lambda x'$ avec $x' \in S$, et $\lambda = \sum_{j=1}^n |x_j|$, il vient

$$B \|x\|_1 = B\lambda \leq \lambda \|x'\| = \|\lambda x'\| = \|x\|. \ ■$$

En particulier la topologie d'un espace vectoriel de dimension finie est donc indépendante de la norme dont on le munit ; et de même les suites de Cauchy sont les mêmes pour toutes les normes possibles ; comme $(\mathbb{C}^n, \| \ \|_2) \simeq (\mathbb{R}^{2n}, \| \ \|_2)$ est complet, on conclut :

Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

5 - Si E est un espace vectoriel normé, et $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, la restriction de la norme à F en fait un espace vectoriel normé.
L'adhérence $\overline{F}$ de F est elle-même un sous-espace vectoriel, puisque stable par combinaisons linéaires par la remarque 2 (d)

Soit $P \subset E$ une partie quelconque. Le plus petit sous-espace vectoriel fermé de E contenant P est donc évidemment $\overline{\langle P \rangle}$, où $\langle P \rangle$ est le sous-espace engendré par P (ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de P)

On dit que P est totale lorsque $\overline{\langle P \rangle} = E$. Les théorèmes de Stone-Weierstrass du § II.E donnent des exemples de parties totales de $(\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \| \ \|_\infty)$.

Un sous-espace vectoriel F de dimension finie de $(E, \| \ \|)$ est toujours fermé

Preuve: Par le théorème 4 ci-dessus, $(F, \|\ \|)$ est complet. La conclusion résulte donc de la proposition II.B.2, (b). ∎

Par contre c'est faux en général: pour $p \in [1,+\infty[$, le sous-espace F de ℓ^p formé des suites qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls est visiblement dense dans ℓ^p (la famille des suites $(e^{n_0})_{n_0 \in \mathbb{N}}$, avec $e^{n_0} = (e^{n_0}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $e^{n_0}_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = n_0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, est totale); donc $\overline{F} = \ell^p \neq F$ ∎

6- Exemples de normes sur $\mathbb{C}^n$.

Le sous-espace de ℓ^p formé des suites dont tous les termes sont nuls sauf peut-être ceux d'indice $\leq N$, est donc normé par la restriction de N_p, et complet, puisqu'il est de dimension finie $N+1$, et s'identifie canoniquement à $\mathbb{C}^{N+1}$. Posant $N+1 = n$, on voit qu'on a ainsi défini sur $\mathbb{C}^n$ toute une famille de normes N_p $(1 \leq p \leq \infty)$, deux-à-deux équivalentes d'après le théorème 4; plus précisément, les inégalités de Hölder et de Minkowski donnent par restriction, comme on l'a déjà remarqué au 3.

$\forall p, q \in [1,+\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $\forall x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$\left|\sum_{j=1}^n x_j y_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q} \quad \text{(Hölder)}$$

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p} \quad \text{(Minkowski)}$$

et de plus: $\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \xrightarrow[p \to \infty]{} \sup_{j=1,\ldots,n} |x_j|$ s'établit facilement.

Posant $\|x\|_p = N_p(x) = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$ pour $p \in [1,+\infty[$, et $\|x\|_\infty = N_\infty(x) = \sup_{j=1,\ldots,n} |x_j|$, l'inégalité de Hölder donne, par exemple pour $(y_j) = (1)$:

$\|x\|_1 \leq n^{1-\frac{1}{p}} \|x\|_p$; et on a aisément $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_1$;

puis appliquant ceci à la famille $|x_j|^{p_1}$, avec $p = \frac{p_2}{p_1}$, $1 < p_1 < p_2 < \infty$

$$\|x\|_{p_1} \leq n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|x\|_{p_2} \quad \text{et} \quad \|x\|_{p_2} \leq n^{\frac{1}{p_2}} \|x\|_{p_1}$$

7- Exemple d'espaces de fonctions. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs complexes. Pour $f \in \mathcal{C}$, et $p \in [1,+\infty[$, on pose

$N_p(f) = \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ et $N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Proposition: (Inégalités de Hölder et de Minkowski):

$\forall p, q \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\forall f, g \in \mathcal{C}$:

$$\left|\int_a^b f(x) g(x) dx\right| \leq N_p(f) . N_q(g) \quad \text{("Hölder")}$$

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g) \quad \text{("Minkowski")}$$

en particulier: $\left|\int_a^b f(x) \overline{g}(x) dx\right| \leq N_2(f) N_2(g)$ ("Cauchy-Schwarz")

Preuve: Elle est analogue à celle du numéro 3 pour les suites: on obtient la première inégalité en intégrant sur $[a,b]$ la relation $|f(x) g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q$, obtenue grâce au même lemme du 3, la deuxième en intégrant

$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1}$, puis appliquant la première... ∎

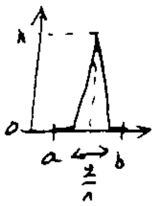
On a de même des analogues de toutes les remarques du numéro 3, par exemple pour $p>1$, ou $1<p_1<p_2$, $\left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, et $\|f\|_1 \leq (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_p$, $\|f\|_{p_1} \leq (b-a)^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}} \|f\|_{p_2}$, ...

Naturellement tout ceci se généralise à des espaces de fonctions continues de Ω dans $\mathbb{C}$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, les intégrales étant définies comme des intégrales impropres, limites d'intégrales sur des compacts (une suite exhaustive) assez réguliers pour qu'on sache y intégrer les fonctions continues... et la dernière inégalité ci-dessus se généralise alors, pour un compact K en:

$$(*)\quad \left(\int_K |f(x)|^{p_1} dx\right)^{1/p_1} \leq (\mathrm{vol}(K))^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}} \left(\int_K |f(x)|^{p_2} dx\right)^{1/p_2}$$

pour $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$

Par contre les inégalités dans l'autre sens sont toutes fausses dès que $p_1<p_2$; par exemple les fonctions f_n dont le graphe est indiqué ci-contre, vérifient $\|f_n\|_1 = 1$ et $\|f_n\|_\infty = n$, et plus généralement $\|f_n\|_p = \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} n^{1-\frac{1}{p}}$ pour $1<p<+\infty$.



(B) COMPLÉTUDE ET COMPLÉTION

1 - Un espace vectoriel normé complet (c'est-à-dire complet pour la métrique associée) s'appelle un <u>espace de Banach</u>. Pour vérifier la complétude, on dispose du critère suivant:

<u>Proposition</u>: <u>$(E, \|\ \|)$ est complet si et seulement si toute série $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E normalement convergente (id est $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$) est convergente</u>

Preuve: Supposons E complet ; si (x_n) est normalement convergente, $\|\sum_{n=p}^{q} x_n\| \leq \sum_{n=p}^{q} \|x_n\|$ tend vers zéro quand p, q tendent vers l'infini ; donc (x_n) est de Cauchy, donc convergente dans E ; réciproquement si (x_n) est de Cauchy, il existe une suite d'entiers $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $\|x_{n_p+1} + \dots + x_{n_{p+1}}\| \leq \frac{1}{2^p}$; posant $y_1 = x_{n_1}$ et $y_{p+1} = x_{n_p+1} + \dots + x_{n_{p+1}}$ pour $p>1$, la série $\sum_{p=1}^{\infty} y_p$ est normalement convergente, donc convergente vers $y\in E$; mais $\sum_{p=1}^{q} y_p = x_{n_1} + x_{n_1+1} + \dots + x_{n_q} = \sum_{n=n_1}^{n_q} x_n$, donc $\sum_{n=n_1}^{n_q} x_n \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} y$, et finalement $y = \sum_{n=n_1}^{\infty} x_n$, puisque (x_n) est de Cauchy ■

2 - <u>Exemples</u>:
- <u>Tout espace vectoriel normé de dimension finie</u> (cf 4).
- <u>Tout sous-espace fermé d'un espace de Banach</u> (prop. II. B 2,(c))
- <u>Proposition: Pour tout $p\in[1,+\infty]$, ℓ^p est complet (pour $\|\ \|_p$)</u>

Preuve: Supposons $p<\infty$ et soit $(u_n^j)_{n\in\mathbb{N}} = u^j$ une suite de Cauchy : pour tout $\varepsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $j,k>N$: $(*)\ \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n^j - u_n^k|^p < \varepsilon^p$; en particulier pour chaque $n\in\mathbb{N}$, $|u_n^j - u_n^k| < \varepsilon$ pour $j,k>N$, et la suite $(u_n^j)_{j\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, qui est complet, d'où l'existence de $u_n\in\mathbb{C}$ tel que $u_n^j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u_n$, Passant à la limite quand $k \to +\infty$ dans $(*)$, il vient pour j fixé, $j > N$: $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n^j - u_n|^p \leq \varepsilon^p$, d'où par l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n^j - u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n^j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon + \|u^j\|_p < +\infty,$$

donc $u = (u_n) \in \ell^p$, et $\|u^j - u\|_p < \varepsilon$ pour $j > N$; donc $u^j \xrightarrow[j\to+\infty]{} u$ dans ℓ^p.

Si $p = +\infty$, on raisonne de même avec : $(*)$ $\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n^j - u_n^k| < \varepsilon$. ∎

- Proposition : $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C} ; \|\ \|_\infty) = \mathcal{C}$ est complet.

Preuve. De même, si (f^j) est de Cauchy, on a pour tout $\varepsilon > 0$ dès que $j, k > N$, $\sup_{x\in[a,b]} |f^j(x) - f^k(x)| < \varepsilon$, et en tout point $x \in [a,b]$ la suite de nombres $(f^j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc convergente vers $f(x) \in \mathbb{C}$. En passant à la limite quand $k \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient que f est la limite uniforme des f^j ; donc $f \in \mathcal{C}$ par le théorème II.E.2, et $f^j \xrightarrow[j\to+\infty]{} f$ dans $\mathcal{C}$ ∎

Exercice : Par contre $\mathcal{C}$ n'est complet pour aucune des normes $\|\ \|_p$ pour $p < +\infty$

3- Proposition : Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel normé E, $F \neq E$. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, F) \geq 1 - \varepsilon$.

Preuve : Soit $y \in E - F \neq \emptyset$. On a $d(y, F) = \inf_{z\in F} d(y, z) = a > 0$, puisque F est fermé. Donc il existe $z \in F$ tel que $\|y - z\| \leq a\left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$. Posons $x = \frac{y-z}{\|y-z\|}$, il vient $\|x\| = 1$, et $\|x - t\| = \frac{\|y - z - \|y-z\|t\|}{\|y-z\|} \geq \frac{a}{\|y-z\|} \geq 1 - \varepsilon$ pour tout $t \in F$. ∎

En particulier, si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels fermés d'un espace vectoriel normé E, on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in F_n$, $\|x_n\| = 1$ et $d(x_{n+1}, F_n) \geq \frac{1}{2}$ pour tout n.

Corollaire : La sphère-unité $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ d'un espace de Banach E est compacte si et seulement si E est de dimension finie. Même énoncé pour la boule-unité $\bar{B} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$.

Preuve : Si $\dim E < \infty$, $(E, \|\ \|)$ a la même topologie que $\mathbb{R}^n$ (théorème A.4) dont les sphères et boules fermées sont compactes (I.B 3).
Sinon, on construit par la remarque précédente une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E (à partir de n'importe quelle suite strictement croissante de sous-espaces fermés de dimension finie, construite par exemple par récurrence) telle que $\|x_n\| = 1$ et $d(x_n, x_m) \geq \frac{1}{2}$ dès que $m \neq n$. En particulier (x_n) est une suite de points de S sans point d'accumulation, et S n'est pas compacte, par la remarque du II.A.2. $\bar{B}$ ne l'est donc pas non plus, car sinon S, fermée dans $\bar{B}$, le serait. ∎

On voit que "en dimension infinie" la notion de compact est plus "fine" que celle de fermé borné (les espaces de Banach de dimension infinie ne sont pas localement compacts). Un exemple utile de compact de l'espace de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C} ; \|\ \|_\infty)$ est donné par le théorème d'Ascoli (II.E.3)

4- Lorsqu'un espace vectoriel normé E, ou plus généralement un espace métrique n'est pas complet, on peut toujours le plonger comme sous-espace dense dans un espace complet plus grand, appelé son complété, unique à

bijection isométrique près, de la façon suivante : soit $\tilde{E}$ le quotient de l'ensemble des suites de Cauchy d'éléments de E par la relation d'équivalence : $(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow x_n - y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (dans E). Il est clair que E s'identifie à une partie de $\tilde{E}$ (un sous-espace vectoriel dans le cas vectoriel) : les classes des suites constantes. Si (x_n) est de Cauchy, $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$; donc on peut en extraire une sous-suite convergente, vers $\ell \geq 0$, et comme $(\|x_n\|)$ est de Cauchy, finalement $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. On pose $\|(\overline{x_n})\| = \ell$. Il reste alors à vérifier que l'on a bien défini ainsi une norme sur $\tilde{E}$ prolongeant celle de E, (on prolonge de même la distance dans le cas simplement métrique).
La densité de E et l'unicité de $\tilde{E}$ sont alors claires. $\tilde{E}$ s'appelle le complété (formel) de E, et remplacer E par $\tilde{E}$ s'appelle "compléter" l'espace E.

C'est en réalité la façon dont on construit les nombres réels, par complétion de l'espace métrique non complet $(\mathbb{Q}, |\ |)$. D'autres exemples intéressants sont les complétés de l'espace $\mathcal{C}$ du A.7, ou d'autres espaces de fonctions analogues (cf. A.7 et B.2) pour les différentes normes N_p $(1 \leq p < +\infty)$. Les complétés s'appellent "espaces des fonctions de puissance p-ième intégrable" et se notent $\mathbb{L}^p([a,b], \mathbb{C}) = L^p([a,b])$; ce sont par construction des espaces de Banach.

(C) CONTINUITÉ DES APPLICATIONS LINÉAIRES

1- Soient E, F deux espaces vectoriels normés ; S la sphère-unité de $E \neq \{0\}$; $u : E \to F$ une application linéaire ; $\|u\| = \sup_{x\in S} \|u(x)\| \in [0, +\infty]$

Théorème : Les conditions suivantes sont équivalentes

(a) u est continue en 0
(b) u est continue (partout)
(c) u est uniformément continue (sur E)
(d) u est lipschitzienne
(e) $\|u\| < +\infty$

Preuve : (d) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) clairement (cf. II.C.1).
(a) $\Rightarrow$ (e) : Il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x\| \leq \alpha \Rightarrow \|u(x)\| < 1$; alors pour $y \in S$, $\|\alpha y\| = \alpha\|y\| = \alpha$, donc $\|u(y)\| = \frac{1}{\alpha}\|\alpha u(y)\| = \frac{1}{\alpha}\|u(\alpha y)\| < \frac{1}{\alpha}$, donc $\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}$.
(e) $\Rightarrow$ (d). $\|u(x) - u(y)\| = \|u(x-y)\| = \left\| \|x-y\|\, u\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right\| \leq \|u\| \cdot \|x-y\|$ dès que $x \neq y$, puisqu'alors $\frac{x-y}{\|x-y\|} \in S$; c'est encore vrai pour $x = y$. ■

2- Remarques : •(1) On a aussi bien $\|u\| = \sup_{x\in B(0,1)} \|u(x)\| = \sup_{x\in \bar{B}(0,1)} \|u(x)\| = \sup_{x\in E-\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.
D'où, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$.

•(2) Dès que $\dim E < \infty$, S, ou $\bar{B}$ sont compactes (B 2 et 3), et on a donc toujours $\|u\| < +\infty$, autrement dit : dès que $\dim E < \infty$, toute application linéaire $u : E \to F$ est continue.

• (3) Soit E l'espace des fonctions continues sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et dérivables à l'origine, à valeurs réelles, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} |f(x)|$, et $u : E \to \mathbb{R}$ l'application $f \mapsto u(f) = f'(0)$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin nx \in E$, $\|\sin nx\| \leq 1$, $|u(\sin nx)| = n$; en particulier u n'est pas continue.

3 - On notera dans la suite $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. L'énoncé qui suit rassemble des évidences utiles :

Proposition : (a) $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel

(b) $u \longmapsto \|u\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ (appelée "norme d'opérateur")

(c) Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, $v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$, et $\|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|$

(d) En particulier la norme d'opérateur est une norme d'algèbre unitaire sur $\mathcal{L}(E,E)$.

Preuve : Si $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, pour $x \in S$,

$\|(\lambda u + \mu v)(x)\| \leq |\lambda| \|u(x)\| + |\mu| \|v(x)\| \leq |\lambda| \|u\| + |\mu| \|v\| < \infty$, d'où le (a), et de plus $\|\lambda u + \mu v\| \leq |\lambda| \|u\| + |\mu| \|v\|$, d'où le (b) puisque de plus $\|u\| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in S \ \|u(x)\| = 0$ $\Leftrightarrow \forall x \in E \ \|u(x)\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Si maintenant $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, il vient

$\|v \circ u\| = \sup_{x \in S} \|v(u(x))\| \leq \sup_{x \in S} \|v\| \|u(x)\| = \|v\| \sup_{x \in S} \|u(x)\| = \|u\| \|v\|$, soit (c)

Le (d) s'en déduit, l'égalité $\|id_E\| = 1$ étant une évidence. ∎

4 - Une conséquence du théorème 1 est une caractérisation simple des homéomorphismes linéaires (appelés "isomorphismes" d'espaces vectoriels normés)

Proposition : Soient E, F des espaces normés, et $u : E \to F$ linéaire surjective. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est bijective et bicontinue

(b) $\exists A, B > 0, \ \forall x \in E \quad A\|x\| \leq \|u(x)\| \leq B\|x\|$

(c) $\exists A, B > 0, \ \forall x \in S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\} \quad A \leq \|u(x)\| \leq B$

Preuve : (a) ⇒ (b) : u est continue, donc il existe $B > 0$ vérifiant la deuxième inégalité, par le théorème 1 (e) et la remarque 2 (1) ; mais de même u^{-1} est continue, et il existe $\frac{1}{A} > 0$ tel que $\|u^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{A} \|y\|$ pour tout $y \in F$, donc pour $y = u(x)$ avec $x \in E$, et $\|x\| \leq \frac{1}{A} \|u(x)\|$.

(b) ⇒ (c) trivialement et (c) ⇒ (b) par homogénéité

(b) ⇒ (a) : par (b), u est continue, et injective, donc bijective, et (b) implique aussi $\|u^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{A} \|y\|$ pour tout $y \in F = \mathrm{Im}\, u$, c'est-à-dire la continuité de u^{-1}. ∎

En particulier on a le

Corollaire. Soient $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ deux normes sur un espace vectoriel E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) Les deux normes définissent la même topologie sur E

(b) Les deux normes sont équivalentes

(c) $\exists A, B > 0, \ \forall x \in S_1 = \{x \in E \mid \|x\|_1 = 1\}, \quad A \leq \|x\|_2 \leq B$

Preuve : On applique l'énoncé précédent à $id : (E, \| \ \|_1) \to (E, \| \ \|_2)$. ∎

Remarques : • On peut échanger les rôles de $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ dans (c).

• Comme en dimension finie toute application linéaire est continue, on retrouve ainsi le théorème A.4.

• Si $\dim E = n$ et $\dim F = m$, $\dim \mathcal{L}(E,F) = mn$, et par un choix de bases sur E et F, $\mathcal{L}(E,F) \simeq \mathbb{C}^{mn}$. Mais la "norme d'opérateur" et la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^{mn}$ ne coïncident jamais, et seule la première est une norme d'algèbre unitaire.

5 - <u>Proposition</u> : <u>Soient E normé et F de Banach. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de Banach</u>

Preuve : On sait (corollaire II.C.2) que $\mathcal{C}(E,F)$ est complet. Comme "l'évaluation au point $x \in E$: $\mathcal{L}(E,F) \to F$, $f \mapsto f(x)$ est continue puisque $\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$, si (f_n) est une suite dans $\mathcal{L}(E,F)$, de Cauchy, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \in \mathcal{C}(E,F)$, et pour $x,y \in E$, $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$,
$f(\lambda x+\mu y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x+\mu y) = \lambda \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \mu \lim_{n\to\infty} f_n(y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.
Donc $f \in \mathcal{L}(E,F)$. ■

En particulier pour $F = \mathbb{C}$, on appelle <u>dual (topologique)</u> de l'espace vectoriel normé E, et on note E^* l'espace $\mathcal{L}(E,\mathbb{C})$ des formes linéaires <u>continues</u> sur E, muni de la norme d'opérateur $\|\ell\| = \sup_{x \in S} |\ell(x)|$ $(\ell \in E^*)$.

Quand $\dim E < \infty$, il s'agit du dual habituel ("algébrique"), mais en général il est strictement plus petit, comme le montre la remarque 2.(3). De la proposition précédente résulte alors :

<u>Corollaire</u> : <u>Si E est un espace de Banach, son dual E^* aussi</u>.

6 - <u>Exemples</u> : Pour $p,q \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, l'application $\ell^p \times \ell^q \to \mathbb{C}$, qui au couple $\{u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p, v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q\}$ associe le nombre $u.v = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ est bilinéaire, bien définie et séparément continue par l'inégalité de Hölder A.3, qui montre de plus que pour $v \in \ell^q$ fixé, $u \mapsto \ell_v(u) = u.v$ est une forme linéaire continue de norme $\leq \|v\|_q$. Autrement dit $v \mapsto \ell_v$ est une application linéaire continue, clairement injective, de ℓ^q dans $(\ell^p)^*$.
On a ainsi identifié <u>ℓ^q à un sous-espace de $(\ell^p)^*$</u> ; que ce soit l'espace $(\ell^p)^*$ tout entier pour $p < \infty$ (c'est faux pour $p = \infty$) est ici laissé en exercice : on se contente de le montrer dans les deux cas particuliers $p=q=2$ (§E, th.6) et $p=1$, $q=\infty$:

<u>Proposition</u> : <u>$v \mapsto \{u \mapsto u.v\}$ est un isomorphisme isométrique de ℓ^∞ sur $(\ell^1)^*$</u>

Preuve : Notons e_n la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième qui vaut 1.
Si $f \in (\ell^1)^*$ et $v_n = f(e_n)$, on a $|v_n| = |f(e_n)| \leq \|f\| \|e_n\|_1 = \|f\|$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et $\|v\|_\infty \leq \|f\|$. Si réciproquement $v = (v_n) \in \ell^\infty$, la forme linéaire $f : \ell^1 \to \mathbb{C}$ définie par $f(u) = u.v = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$ est bien définie puisque $\sum |u_n v_n| \leq \sup |v_n| . \sum |u_n|$, continue et de norme $\leq \|v\|_\infty$; de plus $f(e_n) = v_n$.
Donc la correspondance $f \longleftrightarrow v$ est bijective et conserve la norme. ■

7 - Lorsque E n'est pas complet, $\mathcal{L}(E,F)$ est décrit par

<u>Proposition</u> : <u>Soit E normé, F de Banach, $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Il existe un et un seul $\tilde{u} \in \mathcal{L}(\tilde{E},F)$ tel que $\tilde{u}|_E = u$; et $\|\tilde{u}\| = \|u\|$. ($\tilde{E}$ est le complété de E - cf. B 4)</u>

Preuve : L'unicité de $\tilde{u}$ résulte de sa continuité et de $\overline{E} = \tilde{E}$: nécessairement $\tilde{u}(x) = \lim_{n\to\infty} u(x_n)$ dès que $x \in \tilde{E}$ est la limite de $x_n \in E$ ...

Donc $\mathcal{L}(E,F) \simeq \mathcal{L}(\tilde{E},F)$; en particulier $E^* \simeq \tilde{E}^*$, et ce sont des espaces de Banach par le corollaire 5.

Un espace de Banach est en particulier un espace métrique complet ; donc s'y applique le théorème de Baire (cf. II.B.6,7,8) ; on obtient ainsi les résultats suivants importants en analyse fonctionnelle.

8- Théorème (de Banach-Steinhaus) : Soit E un espace de Banach, F un espace normé, $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\forall x\in E \quad \sup_{i\in I} \|u_i(x)\| < +\infty$

(b) $\sup_{i\in I} \|u_i\| < +\infty$

Preuve : (b) $\Rightarrow$ (a) est clair, puisque $\|u_i(x)\| \leq \|u_i\| \|x\|$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $E_n = \{x\in E \mid \sup_{i\in I} \|u_i(x)\| \leq n\}$

Comme $\{x\in E \mid \|u_i(x)\| \leq n\} = E_{n,i}$ est fermé puisque u_i est continue, et que $E_n = \bigcap_{i\in I} E_{n,i}$, les E_n sont des fermés de E, et par hypothèse $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Si les E_n étaient tous rares, E serait maigre, contrairement au théorème de Baire (corollaire du II B 6). Donc il existe $n_0\in\mathbb{N}$, $x_0\in E$ et $\alpha>0$ tels que $E_{n_0} \supset B(x_0,\alpha)$. Alors pour tout $x\in S = \{x\in E \mid \|x\|=1\}$, et tout $i\in I$, si $x\neq x_0$

$$\|u_i(x)\| = \left\|u_i\left(x_0 + \frac{2}{\alpha}\|x-x_0\| \cdot \frac{\alpha(x-x_0)}{2\|x-x_0\|}\right)\right\| , \quad \text{où } \frac{\alpha(x-x_0)}{2\|x-x_0\|} \in B(x_0,\alpha)$$

$$\leq \|u_i(x_0)\| + \frac{2}{\alpha}\|x-x_0\| \cdot n_0 \leq \|u_i(x_0)\| + \frac{2n_0}{\alpha}(1+\|x_0\|),$$

borne indépendante de x, et qui vaut aussi pour $x=x_0$.

D'où $$\sup_{i\in I}\|u_i\| = \sup_{\substack{i\in I\\ x\in S}} \|u_i(x)\| \leq \sup_{i\in I} \|u_i(x_0)\| + \frac{2n_0}{\alpha}(1+\|x_0\|) < +\infty \quad ■$$

Corollaire : Une limite simple d'applications linéaires continues d'un espace de Banach dans un espace normé, est encore linéaire continue : (id est : si $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{L}(E,F)$, et si pour tout $x\in E$, $(u_p(x))$ est convergente vers $u(x)$ dans E, $x\longmapsto u(x) \in \mathcal{L}(E,F)$.)

Preuve : Comme $u(\lambda x+\mu y) = \lim_{p\to\infty} u_p(\lambda x+\mu y) = \lambda \lim_{p\to\infty} u_p(x) + \mu \lim_{p\to\infty} u_p(y)$ pour tous $x,y\in E$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, u est bien linéaire. L'hypothèse implique aussi $\sup_{p\in\mathbb{N}} \|u_p(x)\| < +\infty$ pour tout $x\in E$, et le théorème précédent donne alors l'existence de $A>0$ tel que pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\|u_p(x)\| \leq A\|x\| \quad (x\in E)$. A la limite quand $p\to\infty$, $\|u(x)\| \leq A\|x\|$, et u est continue. ■

Remarque : De plus, la preuve montre que $\|u\| \leq \liminf_{p\in\mathbb{N}} \|u_p\|$.
Ceci permet de préciser par exemple les "valeurs propres d'un endomorphisme".

Théorème : (Neumann) : Soit E un espace de Banach et $u\in\mathcal{L}(E,E)$, tel que $\|u-id\|<1$. Alors u est bijectif, d'inverse $u^{-1}\in\mathcal{L}(E,E)$ donné par la série (convergente dans $\mathcal{L}(E,E)$) : $u^{-1} = \sum_{p=0}^{+\infty} (id-u)^p$

Preuve : $\mathcal{L}(E,E)$ est de Banach d'après le 5, et la série est normalement convergente, donc (prop. B 1) convergente vers $s\in\mathcal{L}(E,E)$, et $s\circ u = u\circ s$ puisque c'est vrai pour les sommes partielles. Or si $v = id-u$, il vient
$$u\circ s = (id-v)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} v^p\right) = \lim_{p\to\infty} (id-v)\left(\sum_{q=0}^{p} v^q\right) = \lim_{p\to\infty} id - v^{p+1} = id \text{ puisque } \|v\|<1$$
(la limite est prise dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E,E)$.). ■

Le résultat suivant est aussi connu sous le nom de théorème de Banach-Steinhaus :

<u>Théorème : Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}(E,F)$, où E est de Banach et F est normé. On pose $E' = \{x\in E \mid \limsup_{p\to\infty} \|u_p(x)\| < +\infty\}$. Alors, ou bien $E'=E$, ou bien E' est maigre.</u>

Preuve : Pour $x\in E'$, $\lim_{q\to\infty} \sup_{p\in\mathbb{N}} \|\frac{1}{q}u_p(x)\| = 0$. En particulier si pour $\varepsilon>0$ on pose $E'_q = \{x\in E \mid \sup_{p\in\mathbb{N}} \|\frac{1}{q}u_p(x)\| \leq \varepsilon\}$, on a $E' \subset \bigcup_{q=1}^{\infty} E'_q$.
Si donc E' n'est pas maigre, l'un des E'_q n'est pas rare : $\exists q_0\in\mathbb{N}, x_0\in E, \alpha>0$, $\|x-x_0\|\leq\alpha \Rightarrow \sup_{p\in\mathbb{N}} \|\frac{1}{q_0}u_p(x)\| < \varepsilon$; donc pour $y=x-x_0$, $\|y\|\leq\alpha$ implique $\|\frac{1}{q_0}u_p(y)\| \leq \|\frac{1}{q_0}u_p(x)\| + \|\frac{1}{q}u_p(x_0)\| < 2\varepsilon$; d'où $\sup_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ \|z\|\leq 1}} \|u_p(z)\| \leq \frac{2q_0\varepsilon}{\alpha} < +\infty$, en posant $\frac{y}{q_0} = z$, et finalement $E'=E$. ∎

9- <u>Théorème ("des homomorphismes de Banach") : Soient E, F des espaces de Banach, et $u: E\to F$ linéaire, continue, surjective. Alors u est "ouverte" : pour tout ouvert U de E, $u(U)$ est ouvert dans F.</u>

Preuve : Posons $W = B(0,\varepsilon)\subset E$, pour $\varepsilon>0$ donné. On a $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} p.W$, donc puisque u est surjective, $F = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} u(p.W) = \bigcup p.u(W) \subset \bigcup \overline{p.u(W)} = \bigcup p.\overline{u(W)}$
Comme F n'est pas maigre, l'un des $p.\overline{u(W)}$ contient un ouvert ; donc aussi $\overline{u(W)}$: il existe $\eta>0$ et $y_0 = u(x_0)$ tel que $B(y_0,\eta)\subset\overline{u(W)}$; on peut même supposer $y_0\in u(W)$, et donc aussi $\|x_0\|<\varepsilon$. Alors $B(0,\eta)\subset -y_0+\overline{u(W)}$, et pour $x\in W$ $-y_0+u(x) = u(x-x_0)\in u(B(0,2\varepsilon))$; autrement dit $-y_0+u(W)\subset u(B(0,2\varepsilon))$, d'où $B(0,\eta)\subset -y_0+\overline{u(W)} \subset \overline{u(B(0,2\varepsilon))}$.

Appliquant ce raisonnement pour $\varepsilon = \frac{1}{2^{p+1}}$ $(p\in\mathbb{N})$, on construit une suite $(\eta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tendant vers zéro et telle que : $(*)$ $B(0,\eta_p)\subset\overline{u(B(0,\frac{1}{2^p}))}$
Soit $y\in B(0,\eta_0)\subset F$. Appliquant $(*)$ pour $p=0,1,2,\ldots$ il vient d'abord $x_0\in B(0,1)$ tel que $\|y-u(x_0)\|<\eta_1$, puis par récurrence sur $p\in\mathbb{N}$, $x_p\in B(0,\frac{1}{2^p})$ tel que $\|y-u(x_0)-\cdots-u(x_p)\|<\eta_{p+1}$. La série $\sum_{p\in\mathbb{N}} x_p$ étant normalement convergente est convergente dans E (prop. B.1), vers $x\in B(0,2)$, et $y=u(x)$ puisque u est continue. Finalement $u(B(0,2))\supset B(0,\eta_0)$, puis comme u est linéaire :
$(**)$ $\forall r>0\ \exists r'>0 \quad u(B(0,r))\supset B(0,r')$.

Soit alors U un ouvert de E, $y_0\in u(U)$ et $x_0\in U$ tel que $u(x_0)=y_0$. $U-x_0$ contient une boule $B(0,r)$ avec $r>0$; par $(**)$ il existe $r'>0$ tel que $u(U) = u(x_0)+u(B(0,r))\supset y_0+B(0,r')$. C'est dire que $u(U)$ est ouvert. ∎

<u>Corollaire : Une application linéaire continue bijective entre espaces de Banach est un homéomorphisme</u>

Preuve : u^{-1} est continue, puisque u est ouverte. ∎

10 - Remarquons qu'un produit fini d'espaces de Banach est de Banach pour toute norme "produit". Par exemple si E et F sont des espaces normés, $E\times F$ aussi pour la norme $\|(x,y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$ pour $x\in E$, $y\in F$, et visiblement complet dès que E et F le sont.

Si u est une application de E dans F, on note $G(u)$ et on appelle graphe de u l'ensemble $G(u) = \{(x,u(x)) \mid x\in E\} \subset E\times F$.
Si u est linéaire, $G(u)$ est un sous-espace vectoriel de $E\times F$.

Théorème "du graphe fermé". Soient E,F des espaces de Banach, et $u : E\to F$ linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes:
(a) $G(u)$ est fermé dans $E\times F$
(b) u est continue

Preuve: (b) ⇒ (a): Si $(x_p, u(x_p)) \xrightarrow[p\to\infty]{} (x,y)$ dans $E\times F$, $x_p \xrightarrow[p\to\infty]{} x$, donc $u(x_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} u(x)$, et par suite $(x_p, u(x_p)) \xrightarrow[p\to\infty]{} (x, u(x))$, d'où $y = u(x)$, et $(x,y)\in G(u)$.
(a) → (b): Si $G(u)$ est fermé, c'est un sous-espace fermé de l'espace de Banach $E\times F$, donc lui-même un espace de Banach (cf. B.2). La première projection, $(x,u(x)) \longmapsto x$ de $G(u)$ dans E est visiblement bijective, linéaire et continue. Par le corollaire précédent, son inverse $x \longmapsto (x,u(x))$ est continue, donc aussi la composée de celle-ci avec la deuxième projection, c'est-à-dire $u : E\to F$. ■

(D) ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

1 - Parmi les axiomes d'une norme (cf. A.1), (1) et (2) servent à assurer la continuité des applications $\begin{array}{c} E\times E \to E \\ (x,y)\longmapsto x+y \end{array}$ et $\begin{array}{c} \mathbb{C}\times E \to E \\ (\lambda,x)\longmapsto \lambda x \end{array}$ (remarque A.2 (d)), c'est-à-dire la "compatibilité" des structures vectorielle et topologique sur E.
Une application $p : E\times E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant (1) et (2) s'appelle une semi-norme, et si l'on appelle encore boule de centre $x_0\in E$ et de rayon $r>0$ l'ensemble $B_p(x_0,r) = \{x\in E \mid p(x-x_0) < r\}$, les réunions quelconques d'intersections finies de boules, forment les ouverts d'une topologie sur E. Mais l'espace topologique (E,p) n'est séparé que si p vérifie aussi l'axiome (3), c'est-à-dire si p est une norme.

Une autre façon d'obtenir un espace topologique séparé est de considérer une famille $(p_i)_{i\in I}$ de semi-normes sur E, et de munir E de la topologie initiale pour la famille d'applications $(E \xrightarrow{id} (E,p_i))_{i\in I}$: autrement dit la topologie de E est la moins fine qui rende toutes les $p_i : E\to \mathbb{R}$ continues (pour $i\in I$), et ses ouverts sont les réunions d'intersections finies de boules B_{p_i} ($i\in I$). E est alors séparé si et seulement si:

(3') $\forall x\in E \quad \forall i\in I \quad p_i(x)=0 \implies x=0$

L'intérêt de cette notion résulte au moins de l'exemple suivant:

Exemple. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $E = \mathscr{C}(U,\mathbb{C})$ et pour tout compact K de U, $p_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)|$. Alors p_K est une semi-norme, la famille (p_K) vérifie (3'), et $(E,(p_K))$ est donc un espace vectoriel topologique séparé. Cette topologie n'est autre que celle de la convergence uniforme sur tout compact: $(f_p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans $(E,(p_K))$ si et seulement si $f_p \to f$ uniformément sur tout compact K de U.

Si F est le sous-espace de E des fonctions de classe C^m dans U, on peut de même munir F d'une topologie naturelle plus fine, par la famille de semi-normes $p_{K,m} = \sup_{\alpha,x} |(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f(x)|$, le sup portant sur tous les $x\in K$ et tous les $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ tels que $\alpha_1+\dots+\alpha_n = |\alpha| \le m$.

Enfin si G est le sous-espace $C^\infty(U,\mathbb{C})$, on peut le munir de la famille de toutes les semi-normes $p_{K,m}$, pour K compact de U et $m\in\mathbb{N}$. Alors $(f_p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans G si et seulement si chaque dérivée partielle de f_p tend vers la même dérivée de f uniformément sur tout compact de U, et cet espace vectoriel topologique est séparé.

2 - Soient $(E,(p_i)_{i\in I})$ et $(F,(q_j)_{j\in J})$ deux tels espaces vectoriels topologiques, et $u: E\to F$ linéaire. Il résulte alors de la définition des topologies sur E et F que u est continue si et seulement si:

$(*)$ $\quad \forall j\in J,\ \exists i_1,\dots,i_n\in I$ et $C>0$, $\forall x\in E \quad q_j(u(x)) \le C\sum_{k=1}^{n} p_{i_k}(x)$

Il est alors clair que dès qu'une sous-famille $(p_i)_{i\in I'}$, $I'\subset I$ est "finale", c'est-à-dire:

$(**)$ $\forall i\in I\ \exists i'\in I', C>0, \forall x\in E \quad p_i(x) \le C\, p_{i'}(x)$.

la topologie définie sur E par la sous-famille est la même que celle de la famille totale; en particulier on peut se contenter de vérifier la continuité $(*)$ d'une application linéaire en n'utilisant que les semi-normes de sous-familles finales.

Exemple: Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $(K_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de U (cf. théorème II.D.3). Alors $(p_{K_q})_{q\in\mathbb{N}}$ est totale dans (p_K). On en déduit que les topologies des espaces E, F, G de l'exemple précédent sont définies par les familles dénombrables de semi-normes $(p_{K_q})_{q\in\mathbb{N}}$, $(p_{K_q,m})_{q\in\mathbb{N}}$, $(p_{K_q,m})_{q\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}}$ respectivement

3 - Soit $(E,(p_q)_{q\in\mathbb{N}})$ un espace vectoriel topologique dont la famille dénombrable de semi-normes vérifie l'axiome (3') du 1. Alors l'application $E\times E \xrightarrow{d} \mathbb{R}^+$, $d(x,y) = \sum_{q\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^q} \frac{p_q(x-y)}{1+p_q(x-y)}$ est une distance sur E et $(E,d) \xrightarrow{id} (E,(p_q)_{q\in\mathbb{N}})$ est un homéomorphisme. On dit que E est métrisable ; si E, muni de cette métrique est complet, on dit que E est un espace de Fréchet.

Proposition : Les espaces $E = C^0(U,\mathbb{C})$, $F = C^m(U,\mathbb{C})$, $G = C^\infty(U,\mathbb{C})$ de l'exemple du 1 sont des espaces de Fréchet.

Preuve : La seule chose à vérifier est leur complétude. Mais si $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la distance d ci-dessus, en particulier $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f_p|_K\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la topologie de la convergence uniforme, ceci pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$ ($\alpha=0$ pour E, $|\alpha|\le m$ pour F, α quelconque pour G), et tout compact K de U, donc convergente vers une fonction continue sur K (f pour $\alpha=0$, et f_α autrement ; on en déduit en intégrant que $f_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f$) Donc $f\in E$ (resp. F, G) et $P_{K,m}(f_p - f)\underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tous K, m, d'où facilement $d(f_p, f)\underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ∎

A un espace de Fréchet s'applique tout ce qu'on sait des espaces métriques complets (chap. II, § B, C, D, E), et en particulier le théorème de Baire (II. B. 6, 7) ; ainsi on peut généraliser les conséquences qu'on en a tirées au paragraphe précédent dans le cadre des espaces de Banach ; par exemple les théorèmes C. 9 ("des homomorphismes", et son corollaire) et C. 10 ("du graphe fermé") sont encore vrais pour une application linéaire continue entre espaces de Fréchet : les preuves sont d'ailleurs à peu près les mêmes, en remplaçant partout les normes écrites par des distances...

4 - Théorème "de Hahn-Banach" Soit E un espace vectoriel muni d'une semi-norme $p : E \to \mathbb{R}^+$, et f une forme linéaire sur un sous-espace vectoriel F de E, telle que $|f(x)| \le p(x)$ pour tout $x\in F$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde f$ sur E tout entier, prolongeant f et telle que $|\tilde f(x)| \le p(x)$ pour tout $x\in E$.

Preuve : • Supposons d'abord que le corps de base est $\mathbb{R}$. L'énoncé est trivial si $F=E$; sinon, et si $x_0\in E-F$, comme pour $x, y\in F$

$$f(x)+f(y) = f(x+y) \le p(x+y) = p(x-x_0+y+x_0) \le p(x-x_0)+p(y+x_0)$$

on peut trouver $c \in \left[\sup_{x\in F}\{f(x)-p(x-x_0)\}, \inf_{y\in F}\{p(y+x_0)-f(y)\}\right]$

d'où $f\left(\frac{x}{\alpha}\right)+c \le p\left(x_0+\frac{x}{\alpha}\right)$ pour $\alpha>0$ et $f\left(\frac{x}{-\alpha}\right)-c \le p\left(-x_0+\frac{x}{-\alpha}\right)$ pour $\alpha<0$, quel que soit $x\in F$; autrement dit $f(x)+\alpha c \le p(x+\alpha x_0)$ quels que soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $x\in F$. Posant $f_1(x+\alpha x_0) = f(x)+\alpha c$, on définit donc un prolongement de f à $F_1 = F+\mathbb{R}.x_0$ tel que $f_1(x)\le p(x)$ pour tout $x\in F_1$. La famille de tous les couples (F', f') où $F'\supset F$, $f'|_F = f$ et $f'\le p$ sur F' est inductive pour l'ordre évident ; par le théorème de Zorn, elle admet un élément maximal $(\tilde F, \tilde f)$. La maximalité et la construction précédente d'un prolongement éventuel $\tilde f_1$ de $\tilde f$ montrent que $\tilde F = E$.
Comme $-\tilde f(x) = \tilde f(-x) \le p(-x) = p(x)$, le théorème est démontré dans le cas réel.

• Si maintenant le corps de base est $\mathbb{C}$, et séparant les parties réelle et imaginaire de $f = g+ih$, on a $|g(x)|\le p(x)$ et $|h(x)|\le p(x)$

pour $x\in F$. Comme $g(ix)+ih(ix)=f(ix)=if(x)=i(g(x)+ih(x))=-h(x)+ig(x)$, on a $h(x)=-g(ix)$ pour $x\in F$. Soit $\tilde{g}$ une extension à E de la forme linéaire (réelle) g qui vérifie $|\tilde{g}(x)|\leq p(x)$ pour tout $x\in E$, et posons $\tilde{f}(x)=\tilde{g}(x)-i\tilde{g}(ix)$, (pour $x\in E$). Alors $\tilde{f}(ix)=\tilde{g}(ix)-i\tilde{g}(-x)=\tilde{g}(ix)+i\tilde{g}(x)=i\tilde{f}(x)$, et $\tilde{f}$ est une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur E ; pour $x\in F$, $\tilde{f}(x)=g(x)-ig(ix)=g(x)+ih(x)=f(x)$. Enfin si $x\in E$ et $\tilde{f}(x)=re^{i\theta}$ ($r\geq 0$, $\theta\in\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$), $|\tilde{f}(x)|=e^{-i\theta}\tilde{f}(x)=\tilde{f}(e^{-i\theta}x)$, d'où $|\tilde{f}(x)|=|\tilde{g}(e^{-i\theta}x)|\leq p(e^{-i\theta}x)=|e^{-i\theta}|p(x)=p(x)$. ■

(E) ESPACES DE HILBERT

1- La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou hermitienne sur $\mathbb{C}^n$) est très particulière : elle provient d'un "produit scalaire", forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}^n$: si $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $x'=(x'_1,\dots,x'_n)$, $x.x'=\sum_{j=1}^{n}x_jx'_j$; par spécialisation $\|x\|^2=x.x$. (Sur $\mathbb{C}^n$ c'est la forme sesquilinéaire $(z,z')\mapsto z.z'=\sum_{j=1}^{n}z_j\bar{z}'_j$ qui joue le même rôle).

Ce cadre, plus restrictif que la notion générale d'espace vectoriel normé, fournit la généralisation la plus naturelle et la plus riche, à des espaces de dimension infinie, des propriétés géométriques de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

On appelle espace préhilbertien (séparé) un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ muni d'une forme sesquilinéaire définie positive (appelée "produit scalaire"), c'est-à-dire d'une application $\begin{array}{l} E\times E\longrightarrow\mathbb{C} \\ (x,y)\longmapsto x.y \end{array}$, qui vérifie :

(1) $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $\forall x,x',y\in E$

$(\lambda x+\mu x').y=\lambda\, x.y+\mu\, x'.y$ ($x.y$ est linéaire en x)

(2) $\forall x,y\in E$ $\quad x.y=\overline{y.x}$

(en particulier $x.(\lambda y+\mu y')=\bar{\lambda}\,x.y+\bar{\mu}\,x.y'$; $x.y$ est antilinéaire en y)

(3) $\forall x\in E$, $x\neq 0\Rightarrow x.x>0$ (on a évidemment $0.0=0$)

Exemples : • $\mathbb{C}^n$, avec sa forme canonique (rappelée ci-dessus)

• ℓ^2 muni de $u.v=\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n\bar{v}_n$, si $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, grâce à l'inégalité "de Cauchy-Schwarz" (cf. A.3)

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n\bar{v}_n\right|\leq\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|v_n|^2\right)^{1/2}$$

• $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C};\|\ \|_2)$ (cf. A.7) : muni du produit scalaire

$$(f,g)\longmapsto f.g=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

2- Dans un espace préhilbertien E, on dit que deux éléments x,y sont orthogonaux quand $x.y=0$. C'est une relation symétrique. Pour toute partie P de E on appelle orthogonal de P et on note $P^\perp$ l'ensemble $P^\perp=\{y\in E \mid \forall x\in P\ x.y=0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E, et $P\subset Q\Rightarrow Q^\perp\subset P^\perp$.

Proposition (Inégalité "de Cauchy-Schwarz"):

$\forall x,y \in E \qquad |(x.y)^2| \leq (x.x)(y.y)$

Preuve: C'est vrai si $x=0$ ou $y=0$. Supposons par exemple $y\neq 0$, d'où $y.y>0$.
On a pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$ $\quad 0\leq (x+\lambda y).(x+\lambda y) = \lambda\bar\lambda\, y.y + \bar\lambda\, x.y + \lambda\, y.x + x.x$,
d'où en multipliant par $y.y$: $0\leq(\lambda y.y + x.y)(\bar\lambda y.y + y.x) - (x.y)(y.x) + (x.x)(y.y)$
qui donne pour $\lambda = -\dfrac{x.y}{y.y}$, $\;|x.y|^2 = (x.y)(\overline{x.y}) = (x.y)(y.x) \leq (x.x)(y.y)$. ∎

Corollaire: Sur un espace préhilbertien E, l'application $\begin{array}{l} E\to\mathbb{R}^+ \\ x\mapsto \|x\| = (x.x)^{1/2}\end{array}$ est une norme

Preuve: $\|x\|=0 \Leftrightarrow x.x=0 \Leftrightarrow x=0$ par (3), et $\|\lambda x\| = (\lambda x.\lambda x)^{1/2} = (\lambda\bar\lambda\, x.x)^{1/2} = |\lambda|\,\|x\|$
Pour vérifier l'inégalité triangulaire $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, on l'élève au carré:

$$\begin{aligned}(\|x\|+\|y\|)^2 - \|x+y\|^2 &= \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\| - (x+y).(x+y)\\ &= x.x + y.y + 2\|x\|\|y\| - x.x - x.y - y.x - y.y \\ &= 2(\|x\|\|y\| - \mathrm{Re}(x.y)) \geq 0 \text{ par Cauchy-Schwarz.} ∎\end{aligned}$$

3- Remarques: (a) Un espace préhilbertien est donc en particulier un espace vectoriel normé, et de plus, pour $x,y\in E$ $\;|x.y|\leq\|x\|\,\|y\|$ (Cauchy-Schwarz), donc le produit scalaire est continu sur $E\times E$.
En particulier par exemple pour une partie P de E, son orthogonal $P^\perp = \{x\in E \mid \forall y\in P,\ x.y=0\} = \bigcap_{y\in P}\{x\in E \mid x.y=0\}$ est un sous-espace fermé de E.

(b) Dans un espace préhilbertien, on dispose du "théorème de Pythagore":
Si $\{x_1,\dots,x_n\}$ est un système de vecteurs deux à deux orthogonaux:
$$\|x_1+\dots+x_n\|^2 = \|x_1\|^2+\dots+\|x_n\|^2$$
(développer; attention, la réciproque est fausse, déjà pour $\mathbb{C}^2$)

(c) On a aussi l' "identité de la médiane":
$$\forall x,y\in E \qquad \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2) \qquad \text{(développer)}$$

(d) On a enfin l'identité de polarisation:
$$\forall x,y\in E \qquad 4(x.y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2$$
($i^2=-1$; développer le tout; on peut aussi remarquer que
$\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\,\mathrm{Re}\,(x.y)$.)

4- On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien complet (pour la norme associée). Parmi les exemples du 1, $\mathbb{C}^n$ et ℓ^2 sont des espaces de Hilbert, mais pas $(\mathcal{C},\|\ \|_2)$. (cf. B-2).

Comme le produit scalaire d'un espace préhilbertien est continu, il se prolonge de façon unique au complété, et en fait donc un espace de Hilbert (cf B.4). Le complété de $(\mathcal{C},\|\ \|_2)$ par exemple est l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2([a,b])$ des "fonctions de carré intégrable".

Tout sous-espace fermé d'un espace de Hilbert est de Hilbert (prop II.B.2(c)). C'est le cas par exemple du noyau d'une application linéaire continue, ou encore de l'orthogonal d'une partie quelconque.

5 - Théorème (Riesz) : Soit E un espace de Hilbert, $x \in E$, F un sous-espace fermé de E, et $d = d(x,F) = \inf_{y \in F} d(x,y)$. Alors :

(a) Il existe un et un seul $y_0 \in F$ tel que $d(x,y_0) = d$

(b) y_0 est le seul élément de F tel que $x - y_0 \in F^{\perp}$

On appelle y_0 la projection orthogonale de x sur F.

Preuve. Il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de F telle que $\|x - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} d$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $p > N$ implique que $\|x - y_p\|^2 \le d^2 + \varepsilon$, d'où pour $p, q > N$ et par l'identité de la médiane 3(c) :

$$\|2x - y_p - y_q\|^2 + \|y_p - y_q\|^2 = 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_q\|^2 \le 4(d^2 + \varepsilon),$$

soit $\|y_p - y_q\|^2 \le 4\left(d^2 + \varepsilon - \|x - \frac{y_p + y_q}{2}\|^2\right)$.

Comme $\frac{y_p + y_q}{2} \in F$, $\|x - \frac{y_p + y_q}{2}\|^2 \ge d^2$, et il vient $\|y_p - y_q\|^2 \le 4\varepsilon$.

Comme F est fermé, il est complet et la suite de Cauchy $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers $y_0 \in F$; de $\|x - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x - y_0\|$ on tire $\|x - y_0\|^2 \le d^2 + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\|x - y_0\| = d$.

Pour $y \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ il vient alors

$$\|x - y_0\|^2 \le \|x - (y_0 + \lambda y)\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re}(x - y_0)\cdot \lambda y,$$

soit $2\lambda \operatorname{Re}(x - y_0)\cdot y \le \lambda^2 \|y\|^2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $\operatorname{Re}(x - y_0)\cdot y = 0$, et changeant y en iy, on conclut de même que $\operatorname{Im}(x - y_0)\cdot y = 0$. Donc $x - y_0 \in F^{\perp}$.

De plus pour tout $y \in F$, $x - y_0$ est orthogonal à $y - y_0 \in F$, et le théorème de Pythagore 3(b) donne $\|x - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y - y_0\|^2 = d^2 + \|y - y_0\|^2$.

Donc : $d(x,y) = d$ et $y \in F \Leftrightarrow y = y_0$. Enfin :

$(x - y)\cdot(y_0 - y) = (x - y_0)\cdot(y_0 - y) + (y_0 - y)\cdot(y_0 - y) = \|y_0 - y\|^2 > 0$ dès que $y \ne y_0$, et y_0 est bien le seul point de F tel que $x - y \in F^{\perp}$. ■

Corollaire : Si F est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert E, on a $(F^{\perp})^{\perp} = F$. Si P est une partie quelconque, $(P^{\perp})^{\perp} = \overline{\langle P \rangle}$.

Preuve : $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ est clair ; si $x \in E - F$, soit y_0 sa projection orthogonale sur F ; on a $y_0 \cdot (x - y_0) = 0$, d'où $x\cdot(x - y_0) = (x - y_0)\cdot(x - y_0) = \|x - y_0\|^2 > 0$ car $x \ne y_0 \in F$; autrement dit $x \notin (F^{\perp})^{\perp}$.

Pour P quelconque $\overline{\langle P \rangle} = F$ est un sous-espace fermé, le plus petit contenant P.
Or $(P^{\perp})^{\perp}$ est aussi un sous-espace fermé contenant P, et

$$P \subset F \Rightarrow F^{\perp} \subset P^{\perp} \Rightarrow (P^{\perp})^{\perp} \subset (F^{\perp})^{\perp} = F. \ ■$$

En particulier $\{0\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0\}$, d'où encore :

Corollaire : Soit P une partie de l'espace de Hilbert E. Alors P est totale si et seulement si $P^{\perp} = \{0\}$.

Preuve : P totale $\Leftrightarrow \overline{\langle P \rangle} = E$, et le reste est clair par le corollaire précédent. ■

Il résulte du théorème que, dès que F est un sous-espace fermé de E, $E = F \oplus F^{\perp}$; on parle alors de "somme directe orthogonale."

6 - Théorème (de Riesz) : Soit E un espace de Hilbert.

(a) $\forall y \in E$, $x \mapsto x.y$ est une forme linéaire continue sur E, soit $\ell_y \in E^*$

(b) $y \mapsto \ell_y$ est une bijection antilinéaire de E sur E^*, qui conserve la norme : $\|\ell_y\| = \|y\|$ (à gauche, c'est la norme d'opérateur).

Un espace de Hilbert s'identifie donc à son dual par l'isomorphisme isométrique $y \mapsto \ell_y$.

Preuve: $|\ell_y(x)| = |x.y| \leq \|y\|\|x\|$ par Cauchy-Schwarz ; donc $\ell_y \in E^*$ et $\|\ell_y\| \leq \|y\|$. Si $y \neq 0$, $\|y\|^2 = y.y = \ell_y(y) \leq \|\ell_y\|\|y\|$, d'où $\|y\| \leq \|\ell_y\|$ (même si $y=0$), et finalement $\|\ell_y\| = \|y\|$. L'antilinéarité de $y \mapsto \ell_y$ est claire, et son injectivité résulte de ce que c'est une isométrie.

Soit $\ell \in E^*$ non nulle (sinon $\ell = \ell_0$). $F = \mathrm{Ker}\,\ell$ est un sous-espace fermé de E, distinct de E, donc $F^\perp \neq \{0\}$. Soit $z \in F^\perp$, $z \neq 0$. Comme $z \notin F$ (sinon $z.z = 0$), $\ell(z) \neq 0$, et on peut supposer $\ell(z) = 1$, quitte à multiplier z par $\frac{1}{\ell(z)}$.

Posons $y = \frac{z}{\|z\|^2} \in F^\perp$. Il vient, pour tout $x \in E$:

$\ell(x - \ell(x)\,z) = \ell(x) - \ell(x)\,\ell(z) = 0$, donc $x - \ell(x) z \in F$, et finalement

$\ell_y(x) = x.y = (\ell(x)\,z).y = \ell(x)\, z.y = \ell(x) \frac{z.z}{\|z\|^2} = \ell(x)$; soit $\ell = \ell_y$. ■

7 - On appelle base hilbertienne d'un espace de Hilbert E toute famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de E orthonormée (id est $e_i.e_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$) et totale

Proposition (Théorème de la base incomplète). Toute famille orthonormée $(e_i)_{i \in I}$ d'un espace de Hilbert E peut être complétée en une base hilbertienne de E, $(e_i)_{i \in J}$, $J \supset I$. En particulier un espace de Hilbert admet des bases hilbertiennes.

Preuve: Ordonnant par inclusion l'ensemble des familles orthonormées (qui est non vide, puisqu'il contient $\emptyset$!), on montre par le théorème de Zorn l'existence de familles maximales majorant (id est incluant) une famille donnée. Si $(e_i)_{i \in J}$ est une telle famille maximale, elle est totale : sinon on pourrait lui rajouter un vecteur de norme 1 pris dans $\overline{<\{e_i \mid i \in J\}>}^\perp$, qui n'est pas le sous-espace nul d'après le dernier corollaire du 5. ■

Remarque: Rien dans ce résultat "formel" ne permet d'affirmer que J est dénombrable, et c'est faux en général. Cependant les espaces de Hilbert "utiles" en mathématiques et en physique ont tous des bases hilbertiennes dénombrables (on peut montrer que deux bases hilbertiennes ont le même cardinal) ; on dit qu'ils sont "séparables". C'est bien sûr le cas de tous les exemples cités.

Le théorème suivant, bien qu'énoncé ici dans le cas "séparable" se généraliserait sans peine à un espace de Hilbert quelconque.

8- Théorème. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons e_n la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le n-ième qui vaut 1. Alors $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de ℓ^2.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne d'un espace de Hilbert E, et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n f_n$ est convergente dans E.
L'application $u \mapsto v = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n f_n$ est un isomorphisme isométrique de ℓ^2 sur E.
En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v\cdot f_n$; $v = \sum_{n\in\mathbb{N}} (v\cdot f_n) f_n$, et $\|v\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2$

Preuve : $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement orthonormé dans ℓ^2, et si $u = (u_n) \in \ell^2$ est orthogonal à tous les e_n, $u\cdot e_n = u_n = 0$ pour tout n, soit $u = 0$. Donc $\{(e_n)\}$ est total par le corollaire du 5, et c'est une base hilbertienne de ℓ^2.

Si $(u_n) \in \ell^2$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n f_n$ est normalement convergente dans E, puisque $\|\sum_{n=p}^{q} u_n f_n\|^2 = \sum_{n=p}^{q} |u_n|^2$, donc convergente (prop. B 1), vers $v \in E$, et pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $v\cdot f_{n_0} = \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n f_n\right)\cdot f_{n_0} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n f_n \cdot f_{n_0} = u_{n_0}$.
De plus si l'on note $v_N = \sum_{n=0}^{N} u_n f_n$, $\|v_N\|^2 = \left(\sum_{n=0}^{N} u_n f_n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{N} u_m f_m\right) = \sum_{n=0}^{N} |u_n|^2$
Comme $\|v - v_N\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, $\|v\|^2 = \lim_{N\to\infty} \|v_N\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 = \|(u_n)\|^2_{\ell^2}$.
L'application considérée est donc bien définie, visiblement linéaire, et isométrique (donc injective) de ℓ^2 dans E. Montrons pour finir qu'elle est surjective. Soit $w \in E$, et posons $u_n = w\cdot f_n$ et $v_N = \sum_{n=0}^{N} u_n f_n$ $(n, N \in \mathbb{N})$.
On a $\langle w - v_N , v_N \rangle = \sum_{n=0}^{N} \overline{u_n}\,(w - v_N)\cdot f_n = \sum_{n=0}^{N} \overline{u_n}\,(w\cdot f_n - v_N\cdot f_n) = 0$,
d'où par le théorème de Pythagore, $\|w\|^2 = \|w - v_N\|^2 + \|v_N\|^2$, et $\sum_{n=0}^{N} |u_n|^2 = \|v_N\|^2 \le \|w\|^2$. La suite croissante $\sum_{n=0}^{N} |u_n|^2$ est donc majorée, et par suite convergente : c'est dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. On sait alors que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n f_n$ est convergente dans E, vers v tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v\cdot f_n = u_n = w\cdot f_n$. Donc $v - w$ est orthogonal à tous les f_n, donc nul par le corollaire du 5, et $w = v$. ∎

9- Exemple. les séries de Fourier

Soit E l'espace des fonctions continues de $[0, 2\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, préhilbertien pour le produit scalaire
$$\forall f, g \in E \qquad f\cdot g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,$$
et notons $\tilde{E} = L^2([0, 2\pi])$ son complété, qui est un espace de Hilbert.
Les exponentielles complexes $(e_k(x) = e^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de $\tilde{E}$.

Preuve : Que le système soit orthonormé se vérifie aisément. Pour montrer qu'il est total, il suffit de montrer que les combinaisons linéaires des e_k sont denses dans $\tilde{E}$, donc dans E, pour la norme $\|\ \|_2$. Comme $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \|f\|_\infty$ pour $f \in E$, il suffit encore de montrer leur densité dans $(E, \|\ \|_\infty)$, qui résulte du théorème de Stone-Weierstrass (II.E.12, dernier corollaire). ∎

Il s'ensuit, par le théorème 7, que si l'on pose, pour $f \in E$, $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx = f \cdot e_k$$

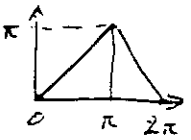
la suite $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ est <u>de carré sommable</u> (les $c_k(f)$ s'appellent les "coefficients de Fourier de f"), et la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\, e^{ikx}$ est convergente dans $\widetilde{E}$, vers f :

$$(*) \quad \Big\| f - \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\, e^{ikx} \Big\|_2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 .$$

Écrire $f(x) \equiv \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\, e^{ikx}$ s'appelle "développer f en série de Fourier", et la série de Fourier $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}$ est bien définie pour toute $f \in \widetilde{E}$, et convergente dans $\widetilde{E}$.

La théorie des séries de Fourier décrit alors des conditions sur f pour que la convergence de sa série ait lieu en divers sens plus forts que seulement dans $\widetilde{E}$ ("en moyenne quadratique", c'est-à-dire au sens de $(*)$).

Traitons seulement ici un exemple :



Soit f la fonction dont le graphe est indiqué par la figure ci-contre. Un calcul facile montre que pour $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$,

$$c_k(f) = \frac{2}{k^2}\left((-1)^k - 1\right) \quad , \text{ et } \quad c_0(f) = \pi^2 ;$$

d'où

$$f(x) \equiv \pi^2 + \sum_{k\neq 0} \frac{2}{k^2}\left((-1)^k - 1\right) e^{ikx} = \pi^2 - 8 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\cos(2\ell+1)x}{(2\ell+1)^2} \qquad (**)$$

Comme la série de droite est uniformément absolument convergente sur $[0,2\pi]$ vers une fonction continue, ce ne peut être que vers f (raisonner comme dans la preuve ci-dessus), et en particulier $(**)$ vaut en tout point $x \in [0,2\pi]$.

Pour $x = 0$, on obtient

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell)^2} = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{4}\Big),$$

d'où finalement :

$$\underline{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}} .$$

10- <u>Autre exemple</u> : Dans l'espace préhilbertien $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C} ; \|\ \|_2)$, les monômes $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un système libre <u>total</u>, toujours d'après le théorème de Stone-Weierstrass (premier corollaire du II.E.12) et le même raisonnement qu'au 11. Autrement dit (5., corollaire) :

$$\forall f \in E \quad \Big\{ \forall n \in \mathbb{N} \ \int_a^b f(x)\, x^n\, dx = 0 \Big\} \Rightarrow f \equiv 0 .$$

On peut facilement, à partir d'un tel système libre total, fabriquer une base hilbertienne de $\widetilde{E}$: si $E_N = \langle \{x^n \mid n \leq N\} \rangle$, c'est un sous-espace de dimension finie de $\widetilde{E}$, donc fermé, et on définit par récurrence $P_N(x)$ par

$$P_{N+1}(x) = \frac{x^{N+1} - \pi_N(x^{N+1})}{\| x^{N+1} - p_N(x^{N+1}) \|} , \text{ où } \pi_N \text{ est la projection orthogonale sur } E_N .$$

<u>Le système $\{P_N(x)\}_{N\in\mathbb{N}}$</u> est orthonormé (théorème 5), et total puisque $\langle (P_N(x))_{N\in\mathbb{N}} \rangle = \langle (x^N)_{N\in\mathbb{N}} \rangle = \widetilde{E}$. ($P_N(x)$ est un polynôme de degré N).

Finalement $\{ P_N(x) \mid N \in \mathbb{N} \}$ est une base hilbertienne de $\widetilde{E} = L^2([a,b])$.

Le procédé indiqué ici s'appelle "<u>orthogonalisation de Schmidt</u>", et les polynômes P_N obtenus sont les "<u>polynômes de Tchebycheff</u>" ("polynômes de <u>Legendre</u>" dans le cas particulier $a=-1$, $b=1$).

11- Soit E un espace de Hilbert, F un sous-espace fermé, $G = F^\perp$. Alors G est un supplémentaire de F dans E ($E = F \oplus G$), appelé son <u>supplémentaire orthogonal</u>, et plus précisément si π_F et π_G sont les projections orthogonales sur F et sur G (définies par le théorème 5, linéaires continues de E sur F et de E sur G), la décomposition de $x \in E$ dans cette somme directe s'écrit: $x = \pi_F(x) + \pi_G(x)$.

Preuve: Si $x \in E$, $x - \pi_F(x) \in F^\perp = G$ (théorème 5); donc $E = F + G$; Si $x \in F \cap G$, $\|x\|^2 = x.x = 0$; donc $F \cap G = \{0\}$. Donc $E = F \oplus G$, et comme $(F^\perp)^\perp = F$, F et G jouent des rôles symétriques, d'où $x = \pi_F(x) + \pi_G(x)$. En particulier (Pythagore) $\|x\|^2 = \|\pi_F(x)\|^2 + \|\pi_G(x)\|^2$, d'où par exemple $\|\pi_F(x)\| \leq \|x\|$, et π_F est linéaire continu de norme ≤ 1, de E dans F. Comme $\pi_F|_F = id_F$, $\|\pi_F\| = 1$, et π_F est surjectif sur F (supposé non nul).

<u>Remarque</u>: On a alors $\pi_G = id_E - \pi_F$ (considérant $\pi_F, \pi_G : E \to E$).

<u>Théorème</u>: <u>Pour une application linéaire continue $\pi : E \to E$, où E est un espace de Hilbert, les conditions suivantes sont équivalentes</u>:

(a) <u>π est le projecteur orthogonal sur un sous-espace fermé F de E</u>

(b) <u>$\pi^2 = \pi$, et $\pi(x).y = x.\pi(y)$ pour tous $x, y \in E$.</u>

Preuve: <u>(a) $\Rightarrow$ (b)</u>: Si $\pi = \pi_F$, $\pi_F^2(x) = \pi_F(x)$ pour $x \in E$, et pour $x, y \in E$

$$\pi_F(x).y = \pi_F(x).(\pi_F(y) + \pi_{F^\perp}(y)) = \pi_F(x).\pi_F(y)$$
$$= (\pi_F(x) + \pi_{F^\perp}(x)).\pi_F(y) = x.\pi_F(y).$$

<u>(b) $\Rightarrow$ (a)</u>: posons $F = \operatorname{Im} \pi$. Pour $x \in E$,

$$x \in F \Leftrightarrow \exists y \in E,\ x = \pi(y) = \pi^2(y) = \pi(x) \Leftrightarrow x = \pi(x)$$

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de F convergente vers $x \in E$, on a donc $x_n = \pi(x_n)$, et comme π est continu, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \pi(x_n) = \pi(x)$. Donc $x \in F$, et F est fermé.

Si $x \in F$, $\pi(x) = x = \pi_F(x)$; donc $\pi|_F = \pi_F|_F = id_F$

Si $y \in F^\perp$, $\pi(y).\pi(y) = y.\pi^2(y) = y.\pi(y) = 0$, donc $\pi(y) = 0 = \pi_F(y)$, et $\pi|_{F^\perp} = \pi_F|_{F^\perp} = 0$. Comme $E = F \oplus F^\perp$, $\pi = \pi_F$. ■

<u>Corollaire</u>: <u>Avec les mêmes hypothèses, sont équivalents</u>:

(a) <u>π est un projecteur orthogonal (sur un sous-espace fermé)</u>

(b) <u>$\pi^2 = \pi$ et $\|\pi\| \leq 1$.</u>

Preuve: (a) $\Rightarrow$ (b) est déjà connu. Pour la réciproque, on prouve comme ci-dessus que $F = \operatorname{Im} \pi$ est un sous-espace <u>fermé</u> caractérisé par: $x \in F \Leftrightarrow x = \pi(x)$. Si $G = \operatorname{Ker} \pi$, c'est un sous-espace fermé puisque π est continu, et écrire $x = \pi(x) + (x - \pi(x))$ montre que $E = F + G$; comme clairement $F \cap G = \{0\}$, il reste seulement à montrer que $G = F^\perp$, ou même seulement que $F^\perp \subset G$, soit encore que $G^\perp \subset F$

Pour $x \in E$, $y = \pi(x) - x \in G$; en particulier dès que $x \in G^\perp$, $\pi(x) = x + y$, et $x.y = 0$, d'où par Pythagore $\|x\|^2 \geq \|\pi(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, et $y = 0$. C'est dire que $x = \pi(x)$, et finalement $x \in G^\perp$ implique $x \in F$. ■

12- Utilisant la réflexivité d'un espace de Hilbert E (c'est-à-dire le fait que $E^{**} \simeq E^{*} \simeq E$ par le théorème 6) on définit une "adjonction" $u \mapsto u^*$ dans l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(E,E)$, par $x \cdot u^*(y) = u(x) \cdot y$ pour tous $x, y \in E$, et on peut étudier à loisir les éléments "normaux" ($u \circ u^* = u^* \circ u$), "hermitiens" ($u = u^*$), "antihermitiens" ($u^* = -u$), ou "unitaires ($u^* = u^{-1}$) de $\mathcal{L}(E,E)$, généralisant magnifiquement les résultats classiques en dimension finie ($E = \mathbb{C}^n$)

Signalons enfin un résultat très utile dans l'application de cette théorie aux équations aux dérivées partielles linéaires:

Théorème "de Lax-Milgram": Soit E un espace de Hilbert, et $B : E \times E \to \mathbb{C}$ une application sesquilinéaire telle que

(a) $\exists A > 0 \ \forall x, y \in E \qquad |B(x,y)| \leq A \|x\| \|y\|$

(b) $\exists C > 0 \ \forall x \in E \qquad B(x,x) \geq C \|x\|^2$

Alors il existe un et un seul $u \in \mathcal{L}(E,E)$ inversible tel que,

$$\forall x, y \in E \qquad x \cdot y = B(x, u(y)).$$

De plus $\|u\| \leq \frac{1}{C}$ et $\|u^{-1}\| \leq A$.

Preuve: Soit $F = \{ y \in E \mid \exists y^* \in E, \ \forall x \in E, \ x \cdot y = B(x, y^*) \}$. F est clairement un sous-espace vectoriel de E, et y^* est unique pour $y \in F$, car $B(x, y^*) = 0$ pour tout $x \in E$ implique $B(y^*, y^*) = 0$, donc $y^* = 0$ par (b).

Posons $u(y) = y^*$, d'où $u : F \to E$, visiblement linéaire.

Comme $C \|u(y)\|^2 \leq B(u(y), u(y)) = u(y) \cdot y \leq \|u(y)\| \|y\|$, on a $\|u(y)\| \leq \frac{1}{C} \|y\|$ pour $y \in F$, et u est donc continu, de norme $\leq \frac{1}{C}$.

Si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de F convergente vers $y \in E$, $(u(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy, et par suite convergente vers $z \in E$. Alors, pour tout $x \in E$, $x \cdot y = \lim_{n \to \infty} x \cdot y_n = \lim_{n \to \infty} B(x, u(y_n)) = B(x, z)$ grâce à (a) ; donc $z = u(y)$ et $y \in F$.

En particulier F est un sous-espace fermé. Montrons qu'on fait $F = E$: Sinon il existerait $y_0 \in F^{\perp}$ non nul. La forme linéaire $f : E \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = B(x, y_0)$ (pour $x \in E$) est continue d'après (a). Par le théorème 6, il existe donc $y_0' \in E$ tel que $f(x) = B(x, y_0) = x \cdot y_0'$ pour tout $x \in E$. Mais ceci signifie que $y_0' \in F$, et $y_0 = u(y_0')$. D'après (b), $C \|y_0\|^2 \leq B(y_0, y_0) = y_0 \cdot y_0' = 0$, d'où $y_0 = 0$ contrairement à l'hypothèse.

On a donc défini $u : E \to E$, et $\|u\| \leq \frac{1}{C}$. Si $u(y) = 0$, $x \cdot y = B(x, u(y)) = 0$ pour tout $x \in E$, et $y = 0$. Donc u est injectif. Il est aussi surjectif, car pour $y \in E$, il existe $y' \in E$ tel que $x \cdot y' = B(x, y)$ pour tout $x \in E$, par le raisonnement déjà fait ci-dessus, grâce au théorème 6. Donc $u : E \to E$ est bijectif et par (a), pour $x, y \in E$, $|x \cdot u^{-1}(y)| = |B(x,y)| \leq A \|x\| \|y\|$, d'où pour $x = u^{-1}(y)$ $\|u^{-1}(y)\| \leq A \|y\|$, et u^{-1} est aussi continu, et $\|u^{-1}\| \leq A$. ∎

RÉFÉRENCES

Pour rédiger ce cours, l'auteur a pillé consciencieusement les deux ouvrages suivants:

[1] Jacques DIXMIER - "Topologie Générale", PUF, 1981

[2] Kôsaku YOSIDA - "Functional Analysis", Springer, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaft n°123, 1966

[1] est un cours de licence, qui contient un peu plus de topologie générale "abstraite" (filtres et ultrafiltres), mais moins des "grands" théorèmes d'analyse fonctionnelle. On trouvera ceux-ci dans les premiers chapitres de [2], qui est un traité complet des méthodes classiques de l'analyse fonctionnelle.

La topologie générale, et les espaces vectoriels topologiques font d'autre part l'objet de plusieurs volumes de N. Bourbaki, qui a mis définitivement au point ces notions, issues historiquement de l'analyse fonctionnelle et de l'analyse harmonique, et dont ces disciplines sont les plus tributaires.

Mais les idées de la topologie générale sont aussi à la base d'un autre domaine très actif des mathématiques, la "topologie algébrique".