

# 1 Equations

L'interface du fluide est  $\eta(x, t)$ . Comme l'écoulement de fluide est irrotationnel, il est potentiel et il existe donc un potentiel  $\phi$  tel que

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2)$$

Comme l'écoulement est incompressible, le potentiel vérifie

$$\Delta \phi = 0 \quad (3)$$

Les conditions aux limites cinématiques sont les suivantes:

- Condition de non pénétration (imperméabilité) au fond

$$v(-H) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(-H) = 0 \quad (4)$$

- Condition de surface libre

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - v(\eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y}(\eta) = 0 \quad (5)$$

La condition à la limite dynamique est donnée par la loi de Laplace Young

$$p(\eta, t) - P_{atm} = -\gamma \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^{3/2}} \quad (6)$$

On peut se convaincre du signe moins en observant que dans un creux (où  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} > 0$ ) l'interface est défoncé vers le bas par la surpression de l'air donc  $p(\eta, t) - P_{atm} < 0$ .

La pression est obtenue par la deuxième relation de Bernoulli

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|u|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy = K. \quad (7)$$

# 2 Ecoulement de base

Ici l'écoulement de base est particulièrement simple. Le fluide est au repos donc  $\phi = 0$  et  $p = -\rho gy + P_{atm}$ . On déduit la valeur de la constante de Bernoulli  $K = P_{atm}/\rho$ .

### 3 Perturbations

On pose alors

$$\phi = 0 + \epsilon\phi'; u = 0 + \epsilon u'; v = 0 + \epsilon v' \quad (8)$$

$$p = -\rho g y + \epsilon p'; \eta = 0 + \epsilon \eta' \quad (9)$$

On obtient

$$\Delta\phi' = 0 \quad (10)$$

- Condition de non pénétration (imperméabilité) au fond

$$\frac{\partial\phi'}{\partial y}(-H) = 0 \quad (11)$$

- Condition de surface libre

$$\epsilon \frac{\partial\eta'}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial\phi'}{\partial x}(\epsilon\eta') \frac{\partial\eta'}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial\phi'}{\partial y}(\epsilon\eta') = 0 \quad (12)$$

On néglige alors le terme en  $\epsilon^2$  puis on procède à l'aplatissement des conditions aux limites en effectuant un développement de Taylor en 0:

$$\frac{\partial\phi'}{\partial y}(\epsilon\eta') = \frac{\partial\phi'}{\partial y}(0) + \frac{\partial^2\phi'}{\partial x\partial y}(0)\epsilon\eta'. \quad (13)$$

Le deuxième terme étant  $\epsilon$  fois plus petit que le premier, on le néglige pour obtenir

$$\frac{\partial\eta'}{\partial t} - \frac{\partial\phi'}{\partial y}(0) = 0. \quad (14)$$

La pression est obtenue par la deuxième relation de Bernoulli

$$\epsilon \frac{\partial\phi'}{\partial t}(\epsilon\eta') + \epsilon^2 \frac{u'^2 + v'^2}{2} - g\epsilon\eta' + \frac{P_{atm}}{\rho} + \epsilon \frac{p'(\epsilon\eta')}{\rho} + g\epsilon\eta' = \frac{P_{atm}}{\rho}. \quad (15)$$

d'où on tire en négligeant les termes quadratiques

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t}(\epsilon\eta') + \frac{p'(\epsilon\eta')}{\rho} = 0. \quad (16)$$

que l'on aplatit en 0

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t}(0) + \frac{p'(0)}{\rho} = 0. \quad (17)$$

En linéarisant puis en aplatissant la loi de Laplace on obtient alors

$$p'(0) - \rho g \eta' = -\gamma \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2}. \quad (18)$$

La combinaison de ces deux dernières équations donne:

$$\rho \frac{\partial \phi'}{\partial t}(0) + \rho g \eta' = \gamma \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2}. \quad (19)$$

## 4 Développement en modes normaux

On pose

$$\phi'(x, y, t) = \tilde{\phi}(y) \exp^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad (20)$$

et

$$\eta'(x, t) = C \exp^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad (21)$$

La résolution de l'équation de Laplace passe par

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dy^2} - k^2 \tilde{\phi} = 0, \quad (22)$$

qui a pour solution

$$\tilde{\phi} = A \operatorname{ch}(ky) + B \operatorname{sh}(ky) \quad (23)$$

Comme

$$\tilde{\phi} = A \operatorname{ch}(ky) + B \operatorname{sh}(ky) \quad (24)$$

La condition au fond impose

$$A k \operatorname{sh}(-kH) + B k \operatorname{ch}(-kH) = 0 \quad (25)$$

et donc par parité

$$-A \operatorname{sh}(kH) + B \operatorname{ch}(kH) = 0 \quad (26)$$

soit encore

$$B = \operatorname{th}(kH) A. \quad (27)$$

La condition d'interface libre

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} - \frac{\partial \phi'}{\partial y}(0) = 0. \quad (28)$$

donne

$$-i\omega C - kA(\operatorname{sh}(0) + \operatorname{th}(kH)\operatorname{ch}(0)) = 0. \quad (29)$$

Comme  $sh(0) = 0$  et  $ch(0) = 1$ , on trouve finalement

$$-i\omega C - kAth(kH) = 0. \quad (30)$$

La condition dynamique

$$\rho \frac{\partial \phi'}{\partial t}(0) + \rho g \eta' = \gamma \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2}. \quad (31)$$

donne

$$-i\omega \rho A(ch(0) + th(kH)sh(0)) + \rho g C = -k^2 \gamma C. \quad (32)$$

soit

$$-i\omega \rho A + \rho g C = -k^2 \gamma C. \quad (33)$$

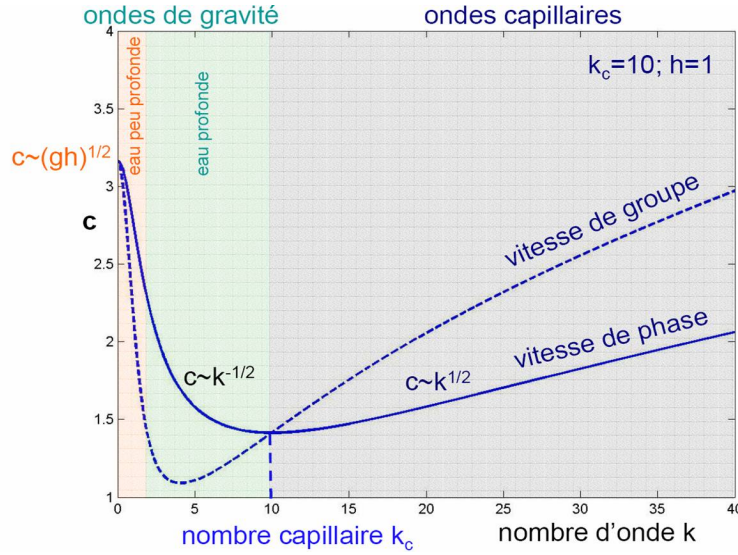
La condition à laquelle on peut trouver une solution pour (C,A) non nulle est que le déterminant du système linéaire est nul. On obtient alors:

$$\left[ \begin{array}{c|c} i\omega & kth(kH) \\ \hline k^2 \gamma / \rho + g & -i\omega \end{array} \right] \quad (34)$$

La relation de dispersion donne

$$\omega^2 = kth(kH)(\gamma k^2 / \rho + g). \quad (35)$$

Elles est tracée sur la figure suivante, où l'on voit les trois régimes de vagues, ondes de gravité en eau peu profonde (shallow water)



## 5 Kelvin Helmholtz

On considère deux fluides immiscibles, le fluide 1 au dessus du fluide 2, de masses volumique  $\rho_i$  et de vitesse  $U_i$ .

L'interface du fluide est  $\eta(x, t)$ . Comme l'écoulement dans chaque fluide est irrotationnel, il est potentiel et il existe donc un potentiel  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2$  tel que

$$u_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \quad (36)$$

$$v_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \quad (37)$$

Comme l'écoulement est incompressible, le potentiel vérifie

$$\Delta \phi_i = 0 \quad (38)$$

Les conditions aux limites cinématiques sont les suivantes:

- Conditions de décroissance à l'infini

$$\phi_1(y = \infty) = U_1 x, \phi_2(y = -\infty) = U_2 x \quad (39)$$

- Condition de surface libre

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_i(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - v_i(\eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(\eta) = 0 \quad (40)$$

La condition à la limite dynamique est donnée par la loi de Laplace Young

$$p_1(\eta, t) - p_2(\eta, t) = \gamma \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^{3/2}} \quad (41)$$

On peut se convaincre du signe en observant que dans un creux (où  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} > 0$ ) l'interface est défoncé vers le bas par la surpression du fluide 1 (au dessus).

La pression est obtenue par la deuxième relation de Bernoulli

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{|u_i|^2}{2} + \frac{p_i}{\rho_i} + gy = K_i. \quad (42)$$

## 6 Ecoulement de base

Ici l'écoulement de base est particulièrement simple. Chaque fluide est à vitesse constante donc  $\phi_i = U_i x$  et  $p_i = -\rho_i g y$ . On déduit la valeur de la constante de Bernoulli  $K_i = U_i^2/2$ .

## 7 Perturbations

On pose alors

$$\phi_i = 0 + \epsilon \phi'_i; u = U_i + \epsilon u'_i; v = 0 + \epsilon v'_i \quad (43)$$

$$p = -\rho g y + \epsilon p'_i; \eta = 0 + \epsilon \eta' \quad (44)$$

On obtient

$$\Delta \phi'_i = 0 \quad (45)$$

- Conditions à l'infini

$$\phi'_1(+\infty) = \phi'_2(-\infty) = 0 \quad (46)$$

- Condition de surface libre

$$\epsilon \frac{\partial \eta'}{\partial t} + \epsilon U_i \frac{\partial \eta'}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial \phi'_i}{\partial y}(\epsilon \eta') = 0 \quad (47)$$

où l'on a négligé le terme en  $\epsilon^2$ . On procède à l'aplatissement des conditions aux limites en effectuant un développement de Taylor en 0:

$$\frac{\partial \phi'_i}{\partial y}(\epsilon \eta') = \frac{\partial \phi'_i}{\partial y}(0) + \frac{\partial^2 \phi'_i}{\partial x \partial y}(0) \epsilon \eta'. \quad (48)$$

Le deuxième terme étant  $\epsilon$  fois plus petit que le premier, on le néglige pour obtenir

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + U_i \frac{\partial \eta'}{\partial x} - \frac{\partial \phi'_i}{\partial y}(0) = 0. \quad (49)$$

La pression est obtenue par la deuxième relation de Bernoulli en négligeant les termes quadratiques

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t}(\epsilon \eta') + U_i \frac{\partial \phi'_i}{\partial x}(\epsilon \eta') + \frac{p'_i(\epsilon \eta')}{\rho_i} = 0. \quad (50)$$

que l'on aplatit en 0

$$\frac{\partial \phi'_i}{\partial t}(0) + \frac{p'_i(0)}{\rho_i} + U_i \frac{\partial \phi'_i}{\partial x}(0) = 0. \quad (51)$$

En linéarisant puis en aplatissant la loi de Laplace on obtient alors

$$p'_1(0) - p'_2(0) + (\rho_2 - \rho_1) g \eta' = \gamma \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2}. \quad (52)$$

On peut alors éliminer la pression

$$-\rho_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial t}(0) - \rho_1 U_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial x}(0) + \rho_2 \frac{\partial \phi'_2}{\partial t}(0) + \rho_2 U_2 \frac{\partial \phi'_2}{\partial x}(0) + (\rho_2 - \rho_1) g \eta' = \gamma \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2}. \quad (53)$$

## 8 Développement en modes normaux

On pose

$$\phi'_i(x, y, t) = \tilde{\phi}_i(y) \exp^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad (54)$$

et

$$\eta'(x, t) = C \exp^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad (55)$$

La résolution de l'équation de Laplace passe par

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}_i}{dy^2} - k^2 \tilde{\phi}_i = 0, \quad (56)$$

qui a pour solution

$$\tilde{\phi}_1 = A \exp(-ky); \tilde{\phi}_2 = B \exp(ky) \quad (57)$$

La condition d'interface libre donne

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + U_i \frac{\partial \eta'}{\partial x} - \frac{\partial \phi'_i}{\partial y}(0) = 0. \quad (58)$$

$$-i\omega C + ikU_1 C + Ak = 0 \quad (59)$$

$$-i\omega C + ikU_2 C - Bk = 0 \quad (60)$$

soit

$$A = iC(\omega/k - U_1); B = -iC(\omega/k - U_2) \quad (61)$$

La condition dynamique

$$-\rho_1(-i\omega + ikU_1)A + \rho_2(-i\omega + ikU_2)B + (\rho_2 - \rho_1)gC = -k^2\gamma C. \quad (62)$$

d'où finalement

$$-\rho_1(\omega/k - U_1)C(\omega/k - U_1) - \rho_2(\omega/k - U_2)C(\omega/k - U_2) + (\rho_2 - \rho_1)g/kC = -k\gamma C. \quad (63)$$

Une solution intéressante existe si

$$\rho_1(U_1 - \omega/k)^2 + \rho_2(U_2 - \omega/k)^2 - (\rho_2 - \rho_1)g/k - k\gamma = 0. \quad (64)$$

On développe et on en tire en notant  $c = \omega/k$ ,

$$c^2(\rho_1 + \rho_2) - 2c(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2) + \rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2 - (\rho_2 - \rho_1)g/k - k\gamma = 0 \quad (65)$$

$$\omega/k = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^2}{\rho_1 + \rho_2} - (\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2 - (\rho_2 - \rho_1)g/k - k\gamma)} \quad (66)$$

On retrouve ici la relation de dispersion des vagues en eau profonde, quand  $U_1 = U_2 = 0$  et  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ , on trouve

$$c = \sqrt{\rho g/k + k\gamma}. \quad (67)$$

On peut noter ici que la vitesse de phase est composée d'une moyenne des vitesses pondérée par les masses volumiques et d'une correction réelle ou imaginaire pure, que nous allons maintenant étudier en plus grand détail.

Il ne peut exister de solution instable que si nécessairement le discriminant réduit sous la racine est négatif

$$\delta(k) = (\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^2 - (\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2 - (\rho_2 - \rho_1)g/k - k\gamma)(\rho_1 + \rho_2) < 0 \quad (68)$$

ou encore

$$k^2\gamma(\rho_1 + \rho_2) + ((\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^2 - (\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2)(\rho_1 + \rho_2))k + (\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 + \rho_2)g < 0 \quad (69)$$

ou encore en développant

$$k^2\gamma(\rho_1 + \rho_2) - (2\rho_1 U_1 \rho_2 U_2 - \rho_1 \rho_2 (U_1^2 + U_2^2))k + (\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 + \rho_2)g < 0 \quad (70)$$

$$k^2\gamma(\rho_1 + \rho_2) - \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2 k + (\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 + \rho_2)g < 0 \quad (71)$$

Ceci n'est possible que s'il existe des racines réelles à cette équation, et donc que son discriminant est positif

$$(\rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2)^2 - 4(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 + \rho_2)g\gamma(\rho_1 + \rho_2) > 0 \quad (72)$$

ou encore

$$(U_1 - U_2)^2 > \frac{\sqrt{4g\gamma(\rho_2 - \rho_1)}(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2} \quad (73)$$

On se rend compte ici qu'il faut distinguer trois cas:

- Dans le cas où le fluide le plus lourd est en bas ( $\rho_2 > \rho_1$ ), on voit au travers de cette condition de stabilité marginale que l'instabilité se produit si l'effet déstabilisant associé à l'inertie est plus fort que les effets stabilisants associés à la tension de surface  $\gamma$  et à la gravité  $g(\rho_2 - \rho_1)$ . Dans ce cas, comme  $\delta(k)$  est positif en  $k = 0$ , il existe deux nombres d'onde de coupure  $k_g$  et  $k_c$  tels que l'écoulement est instable pour  $k_e < k < k_c$  avec un taux de croissance maximum obtenu pour  $k_m$  dans cet intervalle. Un exemple est donné sur la figure. La stabilisation des petits nombres d'ondes (grandes longueurs d'ondes)  $k < k_g$  est due à la gravité alors que la stabilisation des

grands nombres d'ondes (petites longueurs d'ondes)  $k > k_c$  est due à la tension de surface. En absence de tension de surface,

$$\delta(k) = (\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^2 - (\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2 - (\rho_2 - \rho_1)g/k)(\rho_1 + \rho_2) \quad (74)$$

$$\delta(k) = -\rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2 + (\rho_2 - \rho_1)g/k(\rho_1 + \rho_2) \quad (75)$$

d'où

$$k_g = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}. \quad (76)$$

• Quand  $\rho_1 = \rho_2$ , les expressions se simplifient et la situation est toujours instable dès que  $U_1 \neq U_2$ .

$$\delta(k)/\rho^2 = (U_1 + U_2)^2 - 2(U_1^2 + U_2^2) + 2k\gamma/\rho \quad (77)$$

L'écoulement est instable pour  $0 < k < k_c$  avec  $k_c = \frac{\rho(U_1 - U_2)^2}{2\gamma}$ . On retrouve le fait que la tension de surface stabilise les grands nombres d'onde et donc les petites longueurs d'ondes. Le taux de croissance maximal est atteint lorsque  $k^2\delta(k)$  est maximal donc lorsque

$$0 = -2k_m(U_1 - U_2)^2 + 6k_m^2\gamma/\rho \quad (78)$$

et donc

$$k_m = \frac{\rho(U_1 - U_2)^2}{3\gamma} = \frac{2}{3}k_c. \quad (79)$$

La propriété empirique que  $k_m \simeq k_c$  est souvent utilisée car  $k_c$  est plus facile à calculer.

• Dans le cas où  $\rho_2 < \rho_1$ , la situation est toujours instable. Il s'agit de l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

## 9 Le jet

## 10 Linéarisation

le vecteur tangent unitaire s'écrit:

$$\mathbf{t} = \left(1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right)^{-1/2} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}, 0, 1\right) \quad (80)$$

alors que le vecteur normal sortant vaut

$$\mathbf{n} = \left(1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right)^{-1/2} \left(1, 0, -\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \quad (81)$$

La courbure vaut donc

$$\mathcal{C} = \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{r} \frac{\partial r \left(1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right)^{-1/2}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (82)$$

On introduit les  $\epsilon$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{r} - \epsilon^2 \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial\eta'}{\partial x}\right)^2 - \epsilon \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2} \quad (83)$$

puis on évalue en  $\eta = R + \epsilon\eta'$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{R + \epsilon\eta'} - \epsilon \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2}. \quad (84)$$

La loi de Laplace donne alors

$$P_\infty + \frac{\gamma}{R} + \epsilon p'(\epsilon\eta') - P_\infty = \gamma \left(\frac{1 - \epsilon\eta'/R}{R} - \epsilon \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2}\right) \quad (85)$$

d'où, après aplatissement

$$p'(R) = -\gamma \left(\frac{\eta'}{R^2} + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2}\right) \quad (86)$$

## 11 Développement en modes normaux

L'équation de laplace pour la pression donne

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} - k^2 \hat{p} = 0, \quad (87)$$

dont la seule solution régulière en 0 est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0, notée  $I_0(kr)$ . On pose  $\hat{p}(r) = AI_0(kr)$ . Pour utiliser la condition cinématique on cherche  $u'_r$ . La conservation de la quantité de mouvement radiale issue des équations d'Euler linéarisées donne

$$\frac{\partial u'_r}{\partial t} + U \frac{\partial u'_r}{\partial x} = -1\rho \frac{\partial p'}{\partial r} \quad (88)$$

d'où

$$-i\omega \hat{u}_r + ikU \hat{u}_r = -1\rho k I'_0(kr) \quad (89)$$

donc

$$\hat{u}_r = \frac{-1}{(-i\omega + ikU)\rho} k I'_0(kr) \quad (90)$$

On obtient alors

$$-i\omega B + ikUB - \frac{-1}{(-i\omega + ikU)\rho} Ak I'_0(kR) \quad (91)$$

(remarquer le  $R$  faux dans l'énoncé) d'où

$$(-i\omega + ikU)B + \frac{1}{(-i\omega + ikU)\rho} Ak I'_0(kR) \quad (92)$$

On multiplie par  $i$

$$(\omega - kU)B = \frac{kA}{(\omega - kU)\rho} I'_0(kR) \quad (93)$$

La condition aux limites dynamique s'écrit simplement

$$AI_0(kR) = -\gamma \left( \frac{B}{R^2} - k^2 B \right) \quad (94)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \frac{kI'_0(kR)}{(\omega - kU)\rho} & -(\omega - kU) \\ \hline I_0(kR) & \gamma \left( \frac{1}{R^2} - k^2 \right) \end{array} \right] \quad (95)$$

Une solution non nulle existe si le déterminant de cette matrice est nul

$$\frac{kI'_0(kR)}{(\omega - kU)\rho} \gamma \left( \frac{1}{R^2} - k^2 \right) + (\omega - kU) I_0(kR) = 0 \quad (96)$$

$$\rho(\omega - kU)^2 I_0(kR) + \gamma \left( \frac{1}{R^2} - k^2 \right) k I'_0(kR) = 0 \quad (97)$$

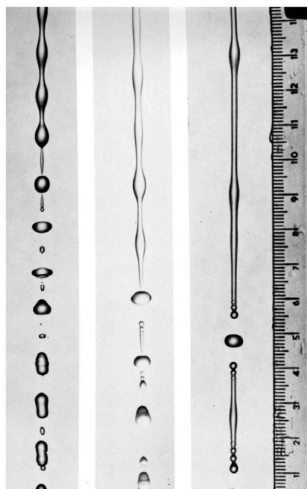


FIG. 2.8 – Un filet d'eau issu d'un tube de 4 mm de diamètre est perturbé à différentes fréquences par un haut-parleur. Les "longueurs d'onde" du chapelet de gouttes sont de 4, 6, 12,5 et 42 diamètres. Cliché Rutland et Jameson 1971 (Van Dyke 1982).

$$\omega = kU \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\rho} \left( k^2 - \frac{1}{R^2} \right) k \frac{I'_0(kR)}{I_0(kR)}} = 0 \quad (98)$$

On en tire

$$g(kR) = (k^2 R^2 - 1) k R \frac{I'_0(kR)}{I_0(kR)} \quad (99)$$

Aux petites longueurs d'ondes (grands nombres d'onde), quand  $k > 1/R$ ,  $g$  est positive (car  $kR \frac{I'_0(kR)}{I_0(kR)} > 0$ ) et  $\omega$  est réelle. L'écoulement est stable. En revanche, aux grandes longueurs d'ondes (petits nombres d'onde) quand  $k < 1/R$ ,  $g$  est négative et l'écoulement est instable.

Le nombre de coupure est  $k = 1/R$ .