

Théorie des vagues périodiques non symétriques

Gérard Iooss

IUF, Université de Nice, Labo J.A.Dieudonné, 06108 Nice Cedex 02, France

gerard.iooss@unice.fr

Abstract

Les résultats ci-dessous ont été obtenus en collaboration avec Pavel Plotnikov ([10], [11]), et montrent notamment que les opérateurs pseudo-différentiels sont particulièrement utiles dans la résolution de certains problèmes classiques d'hydrodynamique. On considère ici le problème des vagues à la surface libre d'une couche infinie de fluide incompressible en écoulement potentiel, en l'absence de tension de surface et où l'on cherche les patterns périodiques, non symétriques par rapport à la direction de propagation. On définit le couple d'amplitudes $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ relatives aux deux vecteurs d'ondes (K_1, K_2) non résonants, qui vérifient l'équation de dispersion et qui engendrent le réseau périodique de vecteurs d'ondes. On commence par donner le développement asymptotique formel des vagues périodiques solutions en puissances de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (qui bifurquent au voisinage d'une surface libre plate) et on montre l'occurrence d'un problème de petits diviseurs (à cause de l'absence de tension de surface). Pour utiliser le théorème des fonctions implicites de Nash-Moser, ceci nous oblige à savoir inverser un certain opérateur différentiel linéaire d'ordre 2, contenant l'opérateur de Dirichlet-Neumann. Le terme d'ordre 2 vient de la double dérivation dans la direction du champ de vecteurs périodique, donnant la vitesse horizontale des particules de fluide.

On montre comment obtenir le difféomorphisme du tore, dont le nombre de rotation satisfait une condition diophantienne, et qui permet de simplifier suffisamment l'opérateur différentiel précédent. On peut alors lui appliquer une méthode de moyennisation, utilisant à fond les techniques pseudo-différentielles, et qui permet d'inverser cet opérateur. On montre alors l'existence de solutions pour des valeurs du couple d'amplitudes (le long de chaque vecteur d'onde de la base) dans un ensemble du quart de plan, de mesure asymptotiquement pleine en 0.

Combien ont disparu, dure et triste fortune ?
Dans une mer sans fond, par une nuit sans lune,
Sous l'aveugle océan à jamais enfoui ?

Oceano Nox (Victor Hugo)

→→AMS: 76B15; 47J15; 35S15; 76B07

mots clé: nonlinear water waves; small divisors; bifurcation theory; pseudodifferential operators; travelling gravity waves; asymmetric 3D waves; rotation number

1 Le problème des vagues

On s'intéresse aux ondes progressives à la surface d'une couche infinie de fluide parfait incompressible, qui se propagent à la vitesse $\mathbf{c} = -c\mathbf{u}$ où $c > 0$ et \mathbf{u} désigne un vecteur unitaire horizontal (voir la figure 1). On suppose l'écoulement irrotationnel, le potentiel étant noté φ et étant défini à une constante additive près. Choisisant les échelles L (précisée plus loin) et c respectivement pour les longueurs et les vitesses, dans le référentiel en mouvement suivant l'onde, la vitesse relative des particules de fluide est alors indépendante du temps et donnée par

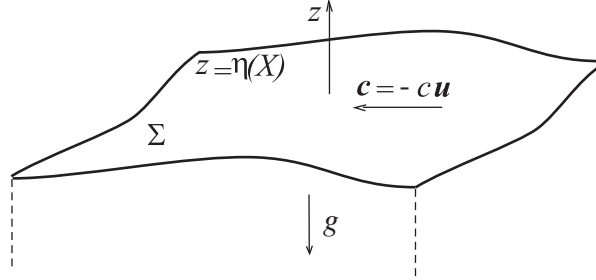


Figure 1: Domaine de l'écoulement

$\nabla\varphi + \mathbf{u}$. Notons $X = (x_1, x_2)$ les coordonnées horizontales, z la coordonnée verticale ascendante, et $z = \eta(X)$ l'équation de la surface libre. Les équations d'Euler se réduisent à écrire le système suivant

$$\Delta\varphi = 0 \text{ pour } z < \eta(X), \quad \nabla\varphi \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 0, \quad (1.1)$$

avec les conditions aux limites suivantes en $z = \eta(X)$

$$\nabla\eta \cdot (\mathbf{u} + \nabla_X\varphi) - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + \mu\eta = 0. \quad (1.3)$$

La condition (1.2) exprime que la vitesse relative $(\mathbf{u} + \nabla_X\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial z})$ est tangente à la surface. L'intégrale première de Bernoulli des équations d'Euler mise sous forme adimensionnelle dans le référentiel relatif

$$\frac{1}{2} \left((\mathbf{u} + \nabla_X\varphi)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right) + \mu z + \frac{p}{\rho c^2} = Const$$

donne la pression p dans tout le domaine fluide. Alors, la condition (1.3) exprime que la pression est continue à la traversée de la surface (absence de tension de surface). Le paramètre μ est sans dimension (carré de l'inverse du nombre de Froude) défini par

$$\mu = gL/c^2.$$

On observe que ce système admet la solution $(\varphi, \eta) = 0$, qui représente la situation d'une surface libre plate et horizontale, le fluide étant au repos. Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux vagues périodiques dans deux directions horizontales. La figure 2 montre, d'une part des vagues obtenues expérimentalement par Hammack, Henderson, Segur [7], d'autre part 3 trains de vagues périodiques obtenues à l'aide des formules décrites plus loin, la première étant symétrique par rapport à la direction de propagation, les deux dernières étant non symétriques.

Le problème des vagues a été étudié notamment par Stokes en 1847 [18] dans le cas bidimensionnel (périodique dans une seule direction horizontale, et indépendant de la direction transverse), où il a calculé le développement en série de puissances de l'amplitude, jusqu'à l'ordre 3. C'est un calcul analogue (en beaucoup plus simple) à celui fait à la section 3 ci-après. Les premières preuves mathématiques de l'existence de solutions périodiques bidimensionnelles sont dues à Nekrasov [14] et Levi-Civita [13]. Les résultats concernant le cas tridimensionnel (périodique dans deux directions horizontales), sont venus bien plus tard, tout d'abord de façon formelle [4], [17], puis la première preuve d'existence des vagues de gravité - capillarité (donc en présence de tension de surface) en 1981 par Reeder et Shinbrot [16] utilisant la méthode de

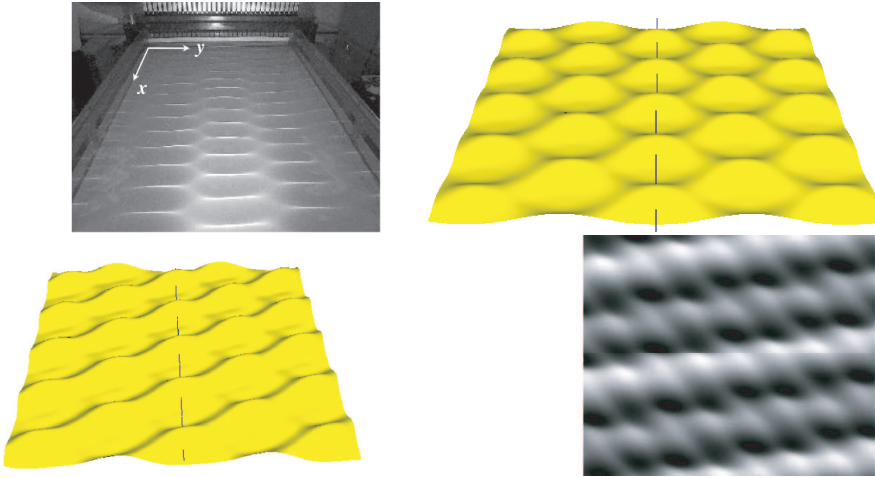


Figure 2: Exemples de vagues périodiques

Lyapunov - Schmidt, avec certaines conditions de non résonance. Ensuite notamment Craig-Nicholls [2] utilisent une méthode variationnelle qui s'affranchit des conditions de non résonance et obtiennent un théorème d'existence plus général, mais moins précis. Enfin Groves-Haragus [6] utilisent la méthode de "dynamique spatiale" où une direction horizontale joue le rôle du temps et où on impose seulement dans une direction transverse la périodicité des vagues. Les vagues périodiques dans deux directions horizontales sont un cas particulier des vagues dont ils obtiennent l'existence. Quelle que soit la méthode utilisée, tous ces travaux mentionnent le rôle essentiel de la tension de surface pour obtenir le théorème d'existence. En fait, la présence de tension superficielle introduit le terme de courbure

$$-b \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \eta}{(1 + \nabla \eta^2)^{1/2}} \right)$$

dans le membre de gauche de l'équation (1.3), proportionnel au laplacien de η pour le problème linéarisé ($b = T/\rho Lc^2$ où T est la tension de surface, et le nombre de Weber b est un paramètre sans dimension). La tension de surface est en fait très petite dans les situations physiques usuelles et il est raisonnable de s'en affranchir afin d'éviter de n'obtenir un résultat d'existence que pour des vagues très petites seulement valides pour un domaine très réduit de l'espace des paramètres, dépendant de la petitesse de b . Comme on le verra plus loin, on est alors confronté à un problème de petits diviseurs, et pour obtenir un résultat d'existence on est amené à utiliser des techniques d'analyse plus lourdes. L'exposé qui suit est basé sur les deux (épais) articles [10], [11] et se concentre sur les méthodes utilisées pour prouver les résultats. On ne présente pas ici les détails, notamment pour les estimations.

1.1 Fonctions périodiques

On s'intéresse aux solutions (φ, η) périodiques en X . Pour cela on définit un réseau Γ' de longueurs d'ondes

$$\Gamma' = \{\boldsymbol{\lambda} = m_1 \boldsymbol{\lambda}_1 + m_2 \boldsymbol{\lambda}_2 : m_j \in \mathbb{Z}\}$$

où $\boldsymbol{\lambda}_j \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$, et le réseau dual Γ de nombres d'onde

$$\Gamma = \{\mathbf{k} = n_1 K_1 + n_2 K_2 : n_j \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{\lambda}_j \cdot K_l = 2\pi \delta_{jl}\}$$

où $K_j \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$. Dans la suite, la base de Γ est définie par

$$K_1 = (1, \tau_1), \quad K_2 = \lambda(1, -\tau_2),$$

où $\lambda > 0$, et $\tau_j > 0$, $j = 1, 2$ mesurent les angles que font K_1 et K_2 avec l'axe des x_1 , et où, fixer à 1 la première coordonnée de K_1 , revient à choisir l'échelle des longueurs L . Ainsi le développement de Fourier d'une fonction u périodique s'écrit

$$u(X) = \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma} \hat{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot X}$$

où $\mathbf{k} \cdot X$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs de \mathbb{R}^2 et

$$\hat{u}_{\mathbf{k}} = |\Omega|^{-1/2} \int_{\Omega} u(X) \exp(-i\mathbf{k} \cdot X) dX, \quad |\Omega| = 4\pi^2 \{\lambda(\tau_1 + \tau_2)\}^{-1}$$

où Ω est le parallélogramme construit avec λ_1, λ_2 . Pour $m \geq 0$ on note $H^m(\mathbb{R}^2/\Gamma')$ l'espace de Sobolev des fonctions de $X \in \mathbb{R}^2/\Gamma'$ qui sont de carré intégrable, ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre m , sur la période Ω et on choisit la norme hilbertienne

$$\|u\|_m = \left\{ \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma} (1 + |\mathbf{k}|)^{2m} |\hat{u}_{\mathbf{k}}|^2 \right\}^{1/2}.$$

1.2 Formulation de base

En choisissant (suivant V.E.Zakharov [19]) comme inconnue $U = (\psi, \eta)$ où $\psi(X) = \varphi(X, \eta(X))$, le système précédent se ramène à un système de deux équations scalaires. Pour cela on utilise l'opérateur de Dirichlet-Neumann \mathcal{G}_η , défini par (suivant [12])

$$\mathcal{G}_\eta \psi = (1 + (\nabla \eta)^2)^{1/2} \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{z=\eta(X)} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\eta(X)} - \nabla \eta \cdot \nabla_X \varphi,$$

où n est la normale à Σ extérieure au domaine fluide, et φ est la solution du problème de Dirichlet

$$\Delta \varphi = 0 \text{ pour } z < \eta(X), \quad \varphi|_{z=\eta(X)} = \psi, \quad \nabla \varphi \Big|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0.$$

Le système (1.1, 1.2, 1.3) s'écrit alors sous la forme suivante, avec $\mu > 0$, $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_1$

$$\mathcal{F}(U, \mu, \mathbf{u}) = 0, \quad \mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \text{ avec } U = (\psi, \eta),$$

$$\mathcal{F}_1(U, \mathbf{u}) = : \mathcal{G}_\eta(\psi) - \mathbf{u} \cdot \nabla \eta = 0, \tag{1.4}$$

$$\mathcal{F}_2(U, \mu, \mathbf{u}) = : \mathbf{u} \cdot \nabla \psi + \mu \eta + \frac{(\nabla \psi)^2}{2} - \frac{1}{2(1 + (\nabla \eta)^2)} \{\nabla \eta \cdot (\nabla \psi + \mathbf{u})\}^2 = 0, \tag{1.5}$$

$$U \in \mathbb{H}^m(\mathbb{R}^2/\Gamma') =: H_0^m(\mathbb{R}^2/\Gamma') \times H^m(\mathbb{R}^2/\Gamma'),$$

où $H_0^m(\mathbb{R}^2/\Gamma')$ désigne les fonctions périodiques de moyenne nulle (le potentiel est défini à une constante additive près). On peut montrer le Lemme suivant (voir [3], [2], [12], [8], [5], [10])

Lemme 1.1 *Pour tout $m \geq 3$, l'application*

$$(U, \mu, \mathbf{u}) \mapsto \mathcal{F}(U, \mu, \mathbf{u}) \text{ est } C^\infty : \mathbb{H}^m(\mathbb{R}^2/\Gamma') \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{H}^{m-1}(\mathbb{R}^2/\Gamma')$$

au voisinage de $\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$. Soit la famille d'opérateurs linéaires $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ définis par

$$\mathcal{T}_{\mathbf{v}}U(X) = U(X + \mathbf{v}),$$

qui représente les translations du plan. Alors, l'application $\mathcal{F}(\cdot, \mu, \mathbf{u})$ commute avec $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{v}}\mathcal{F}(U, \mu, \mathbf{u}) = \mathcal{F}(\mathcal{T}_{\mathbf{v}}U, \mu, \mathbf{u}),$$

et commute également avec la symétrie \mathcal{S}_0 définie par

$$(\mathcal{S}_0U)(X) = (-\psi(-X), \eta(-X)).$$

Enfin, il existe $M_3 > 0$, tel que si $\|U\|_3 \leq M_3$ et $|\mu| \leq M_3$, \mathcal{F} vérifie pour tout $m \geq 3$ l'estimation ("tame")

$$\|\mathcal{F}(U, \mu, \mathbf{u})\|_{m-1} \leq c_m(M_3)\|U\|_m,$$

où c_m ne dépend que de m et M_3 .

1.3 Méthode et résultats

Après l'étude du système linéarisé à l'origine, qui fournit l'équation de dispersion et les contraintes pour le choix des vecteurs d'onde formant la base $\{K_1, K_2\}$ du réseau Γ , on fournit à la section 3 un développement formel en puissances de deux amplitudes $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ d'une (famille de) solution(s) $(\psi, \eta, \mu, \mathbf{u})$ du système (1.4, 1.5). Ce développement fait apparaître un *problème de petits diviseurs*, et en le tronquant à l'ordre $|\varepsilon|^N$, ce développement fournit une solution approchée (à cet ordre) du système (1.4, 1.5), qui sert à démarrer le processus itératif de la méthode de Newton, comme il est d'usage pour le théorème des fonctions implicites de Nash-Moser. On est alors confronté au problème de l'inversion de la différentielle en un point variable, dépendant des itérés successifs.

En notant V le champ de vecteurs projection horizontale du champ de vitesses des particules de fluide à la surface libre, alors l'étude de la différentielle du système (1.4, 1.5) au voisinage de 0 (voir section 4) revient à étudier un opérateur différentiel du second ordre de la forme

$$-\mathcal{J}^* \left(\frac{1}{\mathfrak{a}} \mathcal{J}(\delta\phi) \right) + \mathcal{G}_\eta(\delta\phi), \quad (1.6)$$

où \mathcal{J} est l'opérateur de dérivation le long du champ de vecteurs V périodique, proche de $\mathbf{u}_0 = (1, 0)$, \mathfrak{a} est une fonction scalaire périodique voisine de μ , et \mathcal{G}_η est l'opérateur pseudodifférentiel de Dirichlet-Neumann d'ordre 1 (à coefficients périodiques). Montrer comment on inverse cette différentielle est l'objet principal de ces notes.

On commence à la section 5, par rendre constants les deux termes de dérivation principaux de la différentielle, en utilisant un difféomorphisme du tore $Y \mapsto X(Y)$ qui redresse notamment le champ de vitesses V (qui dépend du point de linéarisation) et fait apparaître le nombre de rotation ρ de ce champ sur le tore. Ceci signifie qu'on se limite aux cas où les courbes intégrales du champ V forment un feuilletage du tore \mathbb{R}^2/Γ' (équivalent au feuilletage du flot géodésique avec la métrique de Jacobi sur la surface libre donnée par

$$ds^2 = (1/2 - \mu\eta(X))\mathbb{Q}(X)dX \cdot dX$$

où $\mathbb{Q}(X)$ est la matrice de la première forme fondamentale de la surface libre (définie en (4.2)) (voir l'Appendice I de [10] pour les détails). Dans le cas de vagues symétriques par rapport à la direction de propagation \mathbf{u}_0 ($\tau_1 = \tau_2, \lambda = 1$, et amplitudes égales le long des vecteurs d'onde K_1, K_2), on a $\rho = 1$ et l'existence de ce feuilletage résulte des propriétés de symétries de la

solution (voir sous-section 5.3 ci-après et [10]). Dans le cas non-symétrique, ρ est un irrationnel inconnu a priori.

Une contrainte supplémentaire sur le difféomorphisme est qu'il rende constant le terme de dérivation d'ordre 1 dans l'opérateur de Dirichlet - Neumann, dominant dans une direction transverse à V . On montre alors que le difféomorphisme est solution d'une équation fonctionnelle non linéaire de la forme

$$\partial_{y_1} X + \rho \partial_{y_2} X - \left(\frac{|\det X'(Y)|}{\nu} \right)^{1/3} F(X) = 0,$$

où F est une fonction (2 composantes) connue en termes de $(\psi(X), \eta(X), \mu, \mathbf{u})$. On ajoute cette équation au système (1.4, 1.5). On a ainsi à résoudre finalement un système "étendu" (voir section 5) où les inconnues sont $\psi, \eta, X, \rho, \nu, \mu, \mathbf{u}$ (direction de propagation des vagues), exprimées en fonction de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. En fait, on remplace momentanément le paramétrage par les amplitudes $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, par un paramétrage par le couple des deux scalaires qui arrivent naturellement avec le difféomorphisme X , à savoir le nombre de rotation ρ du champ de vecteurs V , et ν qui est le coefficient de proportionalité entre les coefficients des deux termes principaux de dérivation de la différentielle. Inverser la différentielle du système "étendu" au voisinage de la solution approchée (déduite du développement formel mentionné plus haut) est l'objet des sections 6, 7 et 8. La section 6 montre que l'introduction de l'équation fonctionnelle supplémentaire a effectivement simplifié l'équation différentielle du second ordre à résoudre, faisant apparaître un opérateur principal à coefficients constants. L'opérateur à inverser est ainsi de la forme

$$\nu \mathcal{D}^2 + p \mathcal{D} + \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_0 + \mathfrak{L}_{-1},$$

où $\mathcal{D} = \partial_{y_1} + \rho \partial_{y_2}$, p est une fonction périodique de norme petite, l'opérateur pseudodifférentiel \mathfrak{G}_1 qui est d'ordre 1 provient de l'opérateur de Dirichlet - Neumann dont le coefficient du terme de dérivation ∂_{y_2} est devenu égal à 1, et les opérateurs pseudodifférentiels \mathfrak{G}_0 et \mathfrak{L}_{-1} sont respectivement borné et d'ordre -1 . La section 7 est consacrée à la "méthode de descente" qui utilise abondamment les techniques d'opérateurs pseudodifférentiels développées dans les notes de G.Lebeau, afin de trouver un difféomorphisme qui permet de supprimer ou moyennner les opérateurs non constants apparaissant aux ordres principaux dans l'opérateur ci-dessus. Cette méthode introduite dans l'étude des ondes stationnaires (périodiques en temps et en la dimension horizontale) [15], [9], est également utilisée avec succès pour l'étude des vagues périodiques en deux directions horizontales [10], [11]. D'une façon générale, cette méthode est bien adaptée aux cas des opérateurs à caractéristiques doubles.

On aboutit ainsi à un opérateur linéaire dont on peut contrôler l'inverse, grâce à un choix approprié des paramètres (ρ, ν) , dont une hypothèse diophantienne sur le nombre de rotation ρ (voir le Théorème 8.4). On peut alors enfin utiliser le théorème de Nash-Moser pour montrer l'existence d'une solution au voisinage de la solution approchée, pour des valeurs de $(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2) \subset \mathbb{R}^{+2}$ ayant 0 comme point de Lebesgue (voir le Théorème 9.1).

2 Système linéarisé à l'origine

La linéarisation à l'origine du système (1.4, 1.5) avec $\mu = \mu_c$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ donne $\mathcal{L}_0 U = 0$ avec

$$\mathcal{L}_0 U =: \begin{pmatrix} \mathcal{G}^{(0)} \psi - \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \eta \\ \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \psi + \mu_c \eta \end{pmatrix} \quad \text{où } \mathcal{G}^{(0)} = (-\Delta)^{1/2}, \quad (2.1)$$

est l'opérateur de Dirichlet-Neumann qui correspond à une surface Σ plate. Le développement en série de Fourier du système (2.1) donne pour tout $\mathbf{k} \in \Gamma$

$$|\mathbf{k}| \widehat{\psi}_{\mathbf{k}} - i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0) \widehat{\eta}_{\mathbf{k}} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0) \widehat{\psi}_{\mathbf{k}} + \mu_c \widehat{\eta}_{\mathbf{k}} = 0,$$

ce qui conduit à la *relation de dispersion*

$$\Delta(\mathbf{k}, \mu_c, \mathbf{u}_0) =: \mu_c |\mathbf{k}| - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0)^2 = 0. \quad (2.2)$$

Sans restreindre la généralité on peut choisir les vecteurs $K_1 = (1, \tau_1)$, $K_2 = \lambda(1, -\tau_2)$ et $\mathbf{u}_0 = (1, 0)$ (invariance du système par les rotations du plan), satisfaisant l'équation de dispersion (2.2). Ceci implique

$$\lambda = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2}, \quad \mu_c = \cos \theta_1 = \frac{1}{|K_1|} = \frac{\lambda^2}{|K_2|} \quad (2.3)$$

où $\tau_i = \tan \theta_i$. Noter qu'on a *deux paramètres libres* dans le problème: τ_1, τ_2 , puisque

$$\mu_c = (1 + \tau_1^2)^{-1/2}, \quad \lambda = \left(\frac{1 + \tau_2^2}{1 + \tau_1^2} \right)^{1/2}.$$

Dans la suite on fait l'hypothèse de non résonance suivante

Hypothèse 2.1 *Les seules solutions $\mathbf{k} \in \Gamma$ de la relation de dispersion (2.2) sont $\mathbf{0}, \pm K_1, \pm K_2$.*

Cette hypothèse correspond pour le couple (τ_1, τ_2) à éviter de se trouver sur un ensemble dénombrable de courbes algébriques du plan. Pour l'opérateur linéaire \mathcal{L}_0 nous avons alors un noyau de dimension 4 engendré par

$$\begin{aligned} \zeta_{K_1} &= \left(i, \frac{1}{\mu_c}\right) e^{iK_1 \cdot X}, & \zeta_{-K_1} &= \overline{\zeta_{K_1}}, \\ \zeta_{K_2} &= \left(i, \frac{\lambda}{\mu_c}\right) e^{iK_2 \cdot X}, & \zeta_{-K_2} &= \overline{\zeta_{K_2}}. \end{aligned}$$

Remarque 2.2 *Lorsque $\tau_1 = \tau_2$, on a $\lambda = 1$ et $|K_1| = |K_2|$, alors Γ et Γ' sont des réseaux (deux) de losanges. Dans ce cas pour tout entier l , si $\tau = l$ ou $1/l$, alors le noyau de \mathcal{L}_0 est de dimension infinie. Ce sont des cas de "complète résonance". L'hypothèse 2.1 évite ces cas pathologiques.*

3 Solution sous forme de développement asymptotique

On montre le théorème suivant

Theorème 3.1 *On suppose que (τ_1, τ_2) satisfait l'Hypothèse 2.1 de non résonance, pour l'équation de dispersion (2.2). Alors, pour $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}^2$ on a une solution formelle de (1.4), (1.5), sous la forme du développement asymptotique suivant*

$$\begin{aligned} U &= (\psi, \eta) = \sum_{p+q \geq 1} \varepsilon_1^p \varepsilon_2^q U_{pq}, \quad \psi \text{ impair, } \eta \text{ pair en } X, \\ \tilde{\mu} &= \mu - \mu_c = \alpha_1 \varepsilon_1^2 + \alpha_2 \varepsilon_2^2 + O\{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^2\}, \\ \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 = (\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = -\frac{\omega_2^2}{2} + O(\omega_2^4) \\ \omega_2 &= \beta_1 \varepsilon_1^2 + \beta_2 \varepsilon_2^2 + O\{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{10} &= \zeta_{K_1} + \zeta_{-K_1} = (-2 \sin K_1 \cdot X), \quad \frac{2}{\mu_c} \cos K_1 \cdot X, \quad U_{01} = \zeta_{K_2} + \zeta_{-K_2}, \\ \mathcal{T}_{\lambda_1/2} U_{pq} &= (-1)^p U_{pq}, \quad \mathcal{T}_{\lambda_2/2} U_{pq} = (-1)^q U_{pq}. \end{aligned}$$

De plus, on a un tore de solutions translátées, données par $\{\mathcal{T}_{\mathbf{v}}U; \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}$, et les fonctions U_{pq} et coefficients α_j, β_j sont des fonctions analytiques explicites de (τ_1, τ_2) . Les paramètres de bifurcation $\tilde{\mu}$ et $\boldsymbol{\omega}$ sont sous la forme de séries formelles de ε_1^2 et ε_2^2 . Enfin, pour $\tau_1 = \tau_2$ (réseau Γ de losanges), et pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ on a $\boldsymbol{\omega} = 0$ (la direction de propagation est suivant l'axe des x_1).

Preuve. On utilise la méthode de **Lyapounov-Schmidt formelle**. Pour cela on écrit le système (1.4,1.5) sous la forme

$$\mathcal{L}_0U + \tilde{\mu}\mathcal{L}_1U + \mathcal{L}_2(\boldsymbol{\omega}, U) + \mathcal{N}_2(U, U) + \mathcal{N}_3(U, U, U) + \dots = 0, \quad (3.1)$$

où $U = (\psi, \eta)$, $\tilde{\mu} = \mu - \mu_c$, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$, et où on fait apparaître les termes de perturbations linéaires ($\tilde{\mu}\mathcal{L}_1U + \mathcal{L}_2(\boldsymbol{\omega}, U)$) et non linéaires (quadratique en U : $\mathcal{N}_2(U, U)$, cubique: $\mathcal{N}_3(U, U, U)$...). On décompose l'espace, suivant le noyau (de dimension 4) de \mathcal{L}_0 , et le supplémentaire orthogonal dans $\mathbb{H}_0^0(\mathbb{R}^2/\Gamma')$:

$$U = W + V, \quad W \in \ker \mathcal{L}_0, \quad W = A\zeta_{K_1} + B\zeta_{K_2} + \bar{A}\bar{\zeta}_{K_1} + \bar{B}\bar{\zeta}_{K_2},$$

et on note \mathcal{P}_0 la projection définie par $W = \mathcal{P}_0U$. L'idée est de résoudre tout d'abord la composante du système (3.1) orthogonale à $\ker \mathcal{L}_0$, par rapport à V en fonction de $(W, \tilde{\mu}, \boldsymbol{\omega})$, puis de reporter le résultat dans la composante du système sur $\ker \mathcal{L}_0$, ce qui donne un système de 2 équations complexes pour (A, B) (et les complexes conjuguées). L'opérateur linéaire \mathcal{L}_0 est formellement inversible sur $(\ker \mathcal{L}_0)^\perp$, mais il est non borné à cause d'un problème de petits diviseurs (expliqué plus bas). L'analyticité du système (3.1) par rapport à $(W + V, \tilde{\mu}, \boldsymbol{\omega})$ nous permet seulement d'obtenir V sous la forme d'une série formelle de "puissances" de $(W, \tilde{\mu}, \boldsymbol{\omega})$, et le système réduit sur $\ker \mathcal{L}_0$ sous la forme de développements en puissances de $(A, B, \bar{A}, \bar{B}, \tilde{\mu}, \boldsymbol{\omega})$. Il est alors fondamental d'utiliser les invariances du système (3.1) par les symétries $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ et \mathcal{S}_0 afin de montrer la simplicité de la structure du système des 2 équations complexes finales.

Étudions tout d'abord l'inverse de \mathcal{L}_0 . Le système $\mathcal{L}_0U = F = (f, g)$ se résout formellement en passant par les séries de Fourier:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma} \hat{U}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot X}, \quad \hat{U}_{\mathbf{k}} = (\hat{\psi}_{\mathbf{k}}, \hat{\eta}_{\mathbf{k}}), \quad \hat{\psi}_{\mathbf{0}} = 0, \\ F &= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma} \hat{F}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot X}, \quad \hat{F}_{\mathbf{k}} = (\hat{f}_{\mathbf{k}}, \hat{g}_{\mathbf{k}}), \quad \hat{f}_{\mathbf{0}} = 0, \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0\}^2 - \mu_c |\mathbf{k}| \neq 0$, i.e. par hypothèse pour $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}, \pm K_1, \pm K_2$, on obtient

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}} = -\frac{\mu_c \hat{f}_{\mathbf{k}} + i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0) \hat{g}_{\mathbf{k}}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0)^2 - \mu_c |\mathbf{k}|}, \quad \hat{\eta}_{\mathbf{k}} = \frac{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0) \hat{f}_{\mathbf{k}} - |\mathbf{k}| \hat{g}_{\mathbf{k}}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0)^2 - \mu_c |\mathbf{k}|}, \quad (3.2)$$

et pour $\mathbf{k} = \mathbf{0}$

$$\hat{\psi}_{\mathbf{0}} = 0, \quad \hat{\eta}_{\mathbf{0}} = \frac{1}{\mu_c} \hat{g}_{\mathbf{0}},$$

pour $\mathbf{k} = \pm K_1, \pm K_2$, on doit satisfaire la condition d'orthogonalité à $\ker \mathcal{L}_0$, $\mathcal{P}_0 F = 0$:

$$(F, \zeta_{K_1}) = (F, \bar{\zeta}_{K_1}) = (F, \zeta_{K_2}) = (F, \bar{\zeta}_{K_2}) = 0$$

c'est à dire

$$\mu_c \hat{f}_{\pm K_1} \pm i \hat{g}_{\pm K_1} = 0, \quad \mu_c \hat{f}_{\pm K_2} \pm i \lambda \hat{g}_{\pm K_2} = 0.$$

Le pseudo-inverse $\tilde{\mathcal{L}}_0^{-1}$, de \mathcal{L}_0 est alors défini de façon unique si on fixe U tel que

$$(U, \zeta_{K_1}) = (U, \bar{\zeta}_{K_1}) = (U, \zeta_{K_2}) = (U, \bar{\zeta}_{K_2}) = 0.$$

On observe dans (3.2) que la quantité au dénominateur (qui s'annule pour $\mathbf{k} = \pm K_1, \pm K_2$) peut prendre des valeurs aussi petites qu'on veut lorsque \mathbf{k} varie dans Γ . C'est ici qu'apparaît le *problème de petits diviseurs* (voir plus loin le Théorème 6.2).

Remarque 3.2 *Si on garde la tension de surface, alors dans l'équation de dispersion, un terme $|\mathbf{k}|^3$ apparaît, qui domine les autres termes pour $|\mathbf{k}|$ grand. Il en résulte que la méthode ci-dessous n'est autre qu'une adaptation du théorème des fonctions implicites dans le cas analytique, ce qui fournit un théorème d'existence (par exemple [16]). Dans notre cas, cela ne donne malheureusement qu'un développement formel.*

La résolution formelle de $(\mathbb{I} - \mathcal{P}_0)(3.1)$ par rapport à V , donne une série formelle unique en puissances de $\omega, \tilde{\mu}, A, \bar{A}, B, \bar{B}$, que l'on écrit

$$V = \mathcal{V}(\tilde{\mu}, \omega, A, \bar{A}, B, \bar{B}).$$

L'unicité de cette série, l'équivariance du système (3.1) par les symétries $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ et \mathcal{S}_0 , et la commutativité de \mathcal{P}_0 avec ces symétries, donnent les identités suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathbf{v}}\mathcal{V}(\tilde{\mu}, \omega, A, \bar{A}, B, \bar{B}) &= \mathcal{V}(\tilde{\mu}, \omega, Ae^{iK_1 \cdot \mathbf{v}}, \bar{A}e^{-iK_1 \cdot \mathbf{v}}, Be^{iK_2 \cdot \mathbf{v}}, \bar{B}e^{-iK_2 \cdot \mathbf{v}}), \\ \mathcal{S}_0\mathcal{V}(\tilde{\mu}, \omega, A, \bar{A}, B, \bar{B}) &= \mathcal{V}(\tilde{\mu}, \omega, \bar{A}, A, \bar{B}, B). \end{aligned} \quad (3.3)$$

La partie principale de \mathcal{V} est alors donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= -\tilde{\mathcal{L}}_0^{-1}\mathcal{N}_2(W, W) + O\{(|\tilde{\mu}| + |\omega|)\|W\| + \|W\|^3\}, \\ -\tilde{\mathcal{L}}_0^{-1}\mathcal{N}_2(W, W) &= A^2 e^{2iK_1 \cdot X} U_{2000} + \bar{A}^2 e^{-2iK_1 \cdot X} \bar{U}_{2000} + AB e^{i(K_1 + K_2) \cdot X} U_{1010} + \\ &\quad + \bar{A}\bar{B} e^{i(K_2 - K_1) \cdot X} U_{0110} + A\bar{B} e^{i(K_1 - K_2) \cdot X} \bar{U}_{0110} + \bar{A}\bar{B} e^{-i(K_1 + K_2) \cdot X} \bar{U}_{1010} \\ &\quad + B^2 e^{2iK_2 \cdot X} U_{0020} + \bar{B}^2 e^{-2iK_2 \cdot X} U_{0002}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où les vecteurs coefficients U_{pqrs} sont des fonctions analytiques explicites de (τ_1, τ_2) . Remplaçant maintenant V par $\mathcal{V}(\tilde{\mu}, \omega, A, \bar{A}, B, \bar{B})$ dans la projection sur le noyau, $\mathcal{P}_0(3.1)$, du système (3.1), on obtient deux équations complexes

$$f(\tilde{\mu}, \omega, A, \bar{A}, B, \bar{B}) = 0, \quad g(\tilde{\mu}, \omega, A, \bar{A}, B, \bar{B}) = 0, \quad (3.5)$$

pour lesquelles, l'équivariance du système (3.1) par les symétries $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ et \mathcal{S}_0 , conduit aux relations suivantes, pour tout $\mathbf{v}, A, B, \tilde{\mu}, \omega$:

$$\begin{aligned} f(\tilde{\mu}, \omega, Ae^{iK_1 \cdot \mathbf{v}}, \bar{A}e^{-iK_1 \cdot \mathbf{v}}, Be^{iK_2 \cdot \mathbf{v}}, \bar{B}e^{-iK_2 \cdot \mathbf{v}}) &= e^{iK_1 \cdot \mathbf{v}} f(\tilde{\mu}, \omega, A, \bar{A}, B, \bar{B}) \\ g(\tilde{\mu}, \omega, Ae^{iK_1 \cdot \mathbf{v}}, \bar{A}e^{-iK_1 \cdot \mathbf{v}}, Be^{iK_2 \cdot \mathbf{v}}, \bar{B}e^{-iK_2 \cdot \mathbf{v}}) &= e^{iK_2 \cdot \mathbf{v}} g(\tilde{\mu}, \omega, A, \bar{A}, B, \bar{B}) \\ f(\tilde{\mu}, \omega, \bar{A}, A, \bar{B}, B) &= \bar{f}(\tilde{\mu}, \omega, A, \bar{A}, B, \bar{B}) \\ g(\tilde{\mu}, \omega, \bar{A}, A, \bar{B}, B) &= \bar{g}(\tilde{\mu}, \omega, A, \bar{A}, B, \bar{B}). \end{aligned}$$

Les vecteurs K_1 et K_2 étant linéairement indépendants, il en résulte que (3.5) prend la forme suivante

$$A\phi_1(\tilde{\mu}, \omega, |A|^2, |B|^2) = 0, \quad B\phi_2(\tilde{\mu}, \omega, |A|^2, |B|^2) = 0$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont à valeurs réelles. Les solutions qui nous intéressent sont celles où A et $B \neq 0$ vérifient

$$\phi_1(\tilde{\mu}, \omega, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2) = 0, \quad \phi_2(\tilde{\mu}, \omega, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2) = 0,$$

$$\tau_1=0.5, \tau_2=1, \varepsilon_1=0.1, \varepsilon_2/\varepsilon_1=1$$

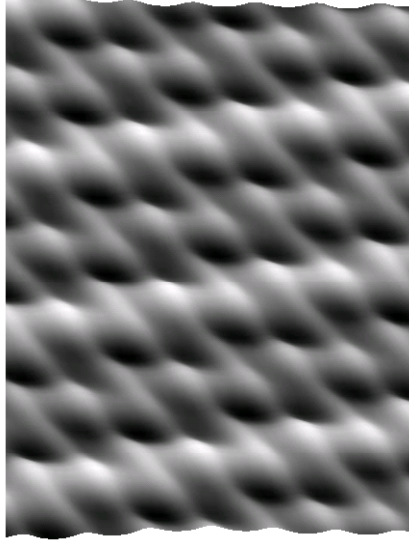


Figure 3: Solution calculée à l'ordre quadratique

où on a noté $|A| = \varepsilon_1$, $|B| = \varepsilon_2$. La partie principale de ce système s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mu}}{\mu_c} - 2(K_1 \cdot \boldsymbol{\omega}) + a_1 \varepsilon_1^2 + b_1 \varepsilon_2^2 + \dots &= 0 \\ \frac{\tilde{\mu}}{\mu_c} - \frac{2}{\lambda}(K_2 \cdot \boldsymbol{\omega}) + a_2 \varepsilon_1^2 + b_2 \varepsilon_2^2 + \dots &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où

$$a_1 = \frac{4}{\mu_c^2}, b_2 = \lambda^6 a_1, b_1 = \lambda^2 a_2,$$

et l'expression analytique (compliquée) de a_2 est donnée dans [11]. La résolution formelle de (3.6) par rapport à $(\tilde{\mu}, \boldsymbol{\omega})$ en puissances de $(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2)$ donne le théorème 3.1. Le fait que pour $\tau_1 = \tau_2$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ on ait $\boldsymbol{\omega} = 0$ résulte dans ce cas de la symétrie supplémentaire \mathcal{S}_1 représentant la symétrie par rapport à $0x_1$:

$$\mathcal{S}_1(U, \mu, \boldsymbol{\omega}) = (U, \mu, -\boldsymbol{\omega}),$$

qui commute avec le système (1.4, 1.5). L'invariance de la solution par \mathcal{S}_1 entraîne que $\boldsymbol{\omega} = 0$.

■

Si on se donne $(\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et qu'on retient les termes du développement de η jusqu'à l'ordre quadratique, on peut obtenir les exemples montrés à la Figure 2 et à la Figure 3.

4 Différentielle de $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)(U, \mu, \mathbf{u})$

Comme nous faisons face à un problème de petits diviseurs, nous allons utiliser le théorème des fonctions implicites de Nash-Moser. Celui-ci fait intervenir la *méthode de Newton* pour approcher

la solution, ce qui nécessite d'inverser la différentielle en tout point voisin de l'origine. Afin d'éviter toute ambiguïté dans la recherche de la solution (dans la famille de solutions translatées), nous imposons à celle-ci d'être invariante par \mathcal{S}_0 , c'est à dire ψ impair et η pair en X , ce qui correspond à la forme asymptotique de U donnée au théorème 3.1. On cherche donc U dans l'espace

$$\mathbb{H}_{(\mathcal{S})}^m = \{U \in \mathbb{H}^m(\mathbb{R}^2/\Gamma') : \mathcal{S}_0 U = U\}.$$

Un champ de vecteurs important dans la suite est la projection horizontale V du champ de vitesses des particules de fluide:

$$V = \mathbf{u} + \nabla\psi - \mathbf{b}\nabla\eta = \mathbb{Q}^{-1}(\mathbf{u} + \nabla\psi), \quad \mathbf{b} = \frac{1}{1 + |\nabla\eta|^2} \{\nabla\eta \cdot (\mathbf{u} + \nabla\psi)\} = V \cdot \nabla\eta, \quad (4.1)$$

où $\mathbb{Q}(X)$ est la matrice de la première forme fondamentale de la surface (en coordonnée X) définie par

$$\mathbb{Q} = \mathbb{I} + \nabla\eta \times \nabla\eta. \quad (4.2)$$

On montre alors que la différentielle de \mathcal{F} par rapport à U est de la forme

$$\partial_U \mathcal{F}(U, \mu, \mathbf{u})[\delta U] = \mathcal{L}_{\mu, \mathbf{u}}(U)[\delta\phi, \delta\eta] + \mathcal{R}(\mathcal{F}, U, \mu, \mathbf{u})[\delta U], \quad (4.3)$$

où $\delta U = (\delta\psi, \delta\eta) \in \mathbb{H}_{(\mathcal{S})}^m(\mathbb{R}^2/\Gamma')$, et

$$\delta\phi = \delta\psi - \mathbf{b}\delta\eta, \quad (4.4)$$

et où l'opérateur linéaire *symétrique* $\mathcal{L}_{\mu, \mathbf{u}}(U)$ est défini par

$$\mathcal{L}_{\mu, \mathbf{u}}(U) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_\eta & \mathcal{J}^* \\ \mathcal{J} & \mathbf{a} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{J} = V \cdot \nabla(\cdot), \quad \mathcal{J}^* = -\nabla \cdot (V(\cdot)), \quad \mathbf{a} = V \cdot \nabla\mathbf{b} + \mu, \quad (4.6)$$

et où le reste \mathcal{R} est identiquement nul lorsque U est solution de $\mathcal{F}_1 = 0$.

Inverser $\mathcal{L}_{\mu, \mathbf{u}}(U)$ est équivalent à résoudre par rapport à $\delta\phi$, l'équation du second ordre

$$-\mathcal{J}^* \left(\frac{1}{\mathbf{a}} \mathcal{J}(\delta\phi) \right) + \mathcal{G}_\eta(\delta\phi) = h \in H_{\text{impair}}^s(\mathbb{R}^2/\Gamma'), \quad (4.7)$$

qui devient, en $U = (\psi, \eta) = 0$, $\mu = \mu_c$, et $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$

$$\{\mu_c^{-1}(\partial_{x_1})^2 + (-\Delta)^{1/2}\}(\delta\phi) = h$$

ce qui n'est autre que l'équation de dispersion (2.2) après passage en Fourier.

Démonstration de (4.3)-(4.5): On a tout d'abord (notations évidentes)

$$\begin{aligned} \partial_U \mathcal{F}_1[\delta U] &= \partial_\eta \mathcal{G}_\eta[\delta\eta]\psi + \mathcal{G}_\eta(\delta\psi) - \mathbf{u} \cdot \nabla(\delta\eta), \\ \partial_U \mathcal{F}_2[\delta U] &= V \cdot \nabla(\delta\psi) + \mu\delta\eta + \{\mathbf{b}^2 \nabla\eta - \mathbf{b}(\nabla\psi + \mathbf{u})\} \cdot \nabla(\delta\eta) \\ &= V \cdot \nabla(\delta\phi) + \mathbf{a}\delta\eta. \end{aligned}$$

On utilise alors la formule (voir par exemple [12]) donnant la différentielle de \mathcal{G}_η :

$$\partial_\eta \mathcal{G}_\eta[\delta\eta]\psi = -\mathcal{G}_\eta(\zeta\delta\eta) + \nabla \cdot \{(\zeta\nabla\eta - \nabla\psi)\delta\eta\}, \quad (4.8)$$

avec

$$\zeta = \frac{1}{1 + |\nabla\eta|^2} \{\mathcal{G}_\eta\psi + \nabla\eta \cdot \nabla\psi\} = \mathbf{b} + \frac{\mathcal{F}_1}{1 + |\nabla\eta|^2},$$

et en remplaçant ζ par \mathbf{b} dans (4.8), on obtient les termes $\mathcal{G}_\eta(\delta\phi) - \nabla \cdot (V\delta\eta)$ pour $\partial_U \mathcal{F}_1[\delta U]$.

L'équation différentielle (4.7) est à coefficients périodiques, et pour la résoudre, il est nécessaire de la simplifier en utilisant, d'une part un changement de coordonnées, i.e. un difféomorphisme du tore, d'autre part un changement de variables, portant sur $\delta\phi$ et sur h .

Plus généralement, la méthode qu'on utilise dans la suite est particulièrement efficace lorsque l'opérateur différentiel à inverser, a sa partie d'ordre 2 sous la forme d'une dérivée seconde suivant la direction d'un champ de vecteurs, dont les courbes intégrales forment un feuilletage du tore. Une fois les 2 principaux coefficients rendus constants par un difféomorphisme adéquat, on utilise alors une "méthode de descente", analogue à une moyennisation, qui rend constante la partie essentielle de l'opérateur, dont on a une bonne estimation de l'inverse, qui sera suffisante pour inverser l'opérateur tout entier. Cette démarche a été notamment utilisée dans [15], [9], [10], [11].

5 Difféomorphisme du tore

5.1 Terme d'ordre 2

Dans (4.7) le terme de dérivation d'ordre 2 est donné par

$$\nabla \cdot \left(\frac{V}{\mathbf{a}} (V \cdot \nabla \delta\phi) \right) = \frac{V}{\mathbf{a}} \cdot \nabla (V \cdot \nabla \delta\phi) + (V \cdot \nabla \delta\phi) \nabla \cdot \left(\frac{V}{\mathbf{a}} \right),$$

ainsi les courbes intégrales du champ de vecteurs V servent de caractéristiques pour le système linéarisé. Il est alors naturel de chercher un difféomorphisme du tore qui redresse le champ de vecteurs V . Pour le système linéarisé à l'origine, avec $\mu = \mu_c$ et $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ on a $V = \mathbf{u}_0$ et les courbes intégrales sont rectilignes et parallèles. Par commodité on préfère travailler avec des fonctions de période 2π , ainsi le difféomorphisme non perturbé est

$$Y \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \mapsto X(Y) = \mathbb{T}^{-1}Y, \quad \text{où } \mathbb{T}X = (K_1 \cdot X, K_2 \cdot X),$$

et le champ de vecteurs \mathbf{u}_0 en coordonnée X , devient $\mathbb{T}\mathbf{u}_0 = K_1 = (1, \lambda)$ en coordonnée Y . Pour le système perturbé, (U, μ, \mathbf{u}) étant voisin de $(0, \mu_c, \mathbf{u}_0)$, on cherche maintenant un difféomorphisme de la forme

$$Y \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \mapsto X(Y) = \mathbb{T}^{-1}Y + \mathcal{W}(Y), \quad (5.1)$$

où $Y \mapsto \mathcal{W}(Y)$ est 2π - périodique, impair et petit en norme. On veut que le champ de vecteurs

$$\frac{dX}{dt} = V(X) \quad (5.2)$$

devienne

$$\frac{dY}{dt} = \sqrt{\nu} \tilde{f}(Y) \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} =: (1, \rho), \quad (5.3)$$

où ρ est le nombre de rotation de V . Le facteur $\sqrt{\nu} \tilde{f}(Y)$ est pour le moment une fonction positive périodique arbitraire de Y (on met un tilde sur les fonctions de X exprimées en coordonnée Y). Ce facteur vaut 1 et $\rho = \lambda$ lorsque le système est considéré pour $(U, \mu, \mathbf{u}) = (0, \mu_c, \mathbf{u}_0)$. La possibilité de trouver un tel difféomorphisme est une vraie restriction imposée ici, qui implique que les courbes intégrales de V forment un feuilletage du tore \mathbb{R}^2/Γ' , de nombre de rotation ρ voisin de λ . Comparant (5.2) et (5.3) on voit que le difféomorphisme X doit vérifier

$$\mathcal{D}X =: \partial_{y_1} X + \rho \partial_{y_2} X = \frac{\tilde{V}}{\sqrt{\nu} \tilde{f}} \quad \text{où } \tilde{V}(Y) =: V(X(Y)), \quad (5.4)$$

et le terme d'ordre 2 de l'équation différentielle, écrit en coordonnée Y , devient

$$-\mathcal{J}^* \left(\frac{1}{\mathbf{a}} \mathcal{J}(\delta\phi) \right) = \frac{\nu}{\tilde{\mathbf{a}}} \tilde{f}^2 \mathcal{D}^2(\tilde{\delta\phi}) + \sqrt{\nu} \left(\widetilde{\nabla \cdot \frac{Vf}{\mathbf{a}}} \right) \mathcal{D}(\tilde{\delta\phi}) \quad (5.5)$$

c'est à dire que l'on a maintenant un terme de dérivation du second ordre dans la direction $\boldsymbol{\rho}$ constante. Le jeu consiste maintenant à identifier le terme principal à l'ordre suivant, dans l'opérateur différentiel $-\mathcal{J}^* \left(\frac{1}{\mathbf{a}} \mathcal{J}(\cdot) \right) + \mathcal{G}_\eta$, et à trouver \tilde{f} tel que ce terme apparaisse avec un coefficient proportionnel à $\tilde{\mathbf{a}}^{-1} \tilde{f}^2$. Ainsi l'opérateur différentiel sera à coefficients constants aux ordres principaux (à un facteur multiplicatif près).

5.2 Termes d'ordre 1

L'opérateur de Dirichlet-Neumann \mathcal{G}_η est de symbole principal (terme d'ordre 1) (voir les notes de Gilles Lebeau)

$$G_1(Y, \mathbf{k}) = \frac{\sqrt{\det \mathbb{G}}}{|\det X'|} (\mathbb{G}^{-1} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{1/2},$$

où

$$\mathbb{G}(Y) = X'^*(Y) \tilde{\mathbb{Q}}(Y) X'(Y)$$

est la matrice de la première forme fondamentale de la surface Σ en coordonnée Y (en coordonnée X c'est $\mathbb{Q}(X)$ définie par (4.2)). Si on note

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

alors

$$(\det \mathbb{G}) \mathbb{G}^{-1} = \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$$

et on a

$$\begin{aligned} (\det \mathbb{G}) (\mathbb{G}^{-1} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) &= g_{22} k_1^2 - 2g_{12} k_1 k_2 + g_{11} k_2^2 \\ &= g_{22} \tilde{k}_1^2 - 2(g_{12} + \rho g_{22}) \tilde{k}_1 k_2 + (g_{11} + 2\rho g_{12} + g_{22} \rho^2) k_2^2 \end{aligned}$$

où on a défini

$$\tilde{\mathbf{k}} = (k_1 + \rho k_2, k_2). \quad (5.6)$$

Dans la partie d'ordre 2 de (5.5) le symbole principal de l'opérateur est

$$-\frac{\nu}{\tilde{\mathbf{a}}} \tilde{f}^2 \tilde{k}_1^2,$$

il convient donc de déterminer le terme d'ordre un en k_2 intervenant dans $-\mathcal{J}^* \left(\frac{1}{\mathbf{a}} \mathcal{J}(\cdot) \right) + \mathcal{G}_\eta$. D'après le calcul ci-dessus, il s'agit de la racine du terme en k_2^2 dans

$$\frac{\det \mathbb{G}}{|\det X'|^2} (\mathbb{G}^{-1} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k})$$

où \mathbf{k} est écrit à l'aide de $\tilde{\mathbf{k}}$. On trouve ainsi

$$\frac{1}{|\det X'|} (\mathbb{G} \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})^{1/2} = \frac{1}{|\det X'|} (\mathbb{Q} \mathcal{D}X \cdot \mathcal{D}X)^{1/2}.$$

On peut alors choisir la fonction \tilde{f} de façon à avoir la proportionnalité avec le coefficient du terme d'ordre 2 (le scalaire ν est libre pour l'instant):

$$\frac{\tilde{f}^2}{\tilde{\mathbf{a}}} = \frac{1}{|\det X'|} (\mathbb{Q} \mathcal{D}X \cdot \mathcal{D}X)^{1/2},$$

où $\mathcal{D}X = \frac{\tilde{V}}{\sqrt{\nu} \tilde{f}}$ d'après (5.4). On a ainsi

$$(\sqrt{\nu} \tilde{f})^3 = \frac{\nu \tilde{\mathbf{a}}}{|\det X'|} (\tilde{\mathbb{Q}} \tilde{V} \cdot \tilde{V})^{1/2}$$

d'où la nouvelle équation vérifiée par le difféomorphisme X :

$$\mathcal{F}_3(U, X, \mu, \mathbf{u}, \rho, \nu) =: \partial_{y_1} X + \rho \partial_{y_2} X - \left(\frac{|\det X'|}{\nu \mathbf{a}} \right)^{1/3} \frac{V}{(\mathbb{Q}V \cdot V)^{1/6}} = 0. \quad (5.7)$$

En résumé, si $X(Y)$ est solution de (5.7), alors l'opérateur linéaire $-\mathcal{J}^* \left(\frac{1}{\mathbf{a}} \mathcal{J}(\cdot) \right) + \mathcal{G}_\eta$ a ses termes de dérivations d'ordres 2 et 1 de la forme

$$\chi(Y)(\nu \mathcal{D}^2 + p(Y) \mathcal{D} + \mathfrak{G}_1)$$

où le symbole de \mathfrak{G}_1 est de la forme

$$J_1(Y, \mathbf{k}) = \{a(Y) \tilde{k}_1^2 + 2b(Y) \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 + \tilde{k}_2^2\}^{1/2}.$$

5.3 Développement formel du difféomorphisme dans le cas λ irrationnel

Nous avons déjà obtenu le développement en série formelle de puissances de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de (U, μ, \mathbf{u}) , solution du système (1.4, 1.5). Montrons qu'on peut également obtenir (X, ρ, ν) sous la forme d'un développement de puissances de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, solution de $\mathcal{F}_3 = 0$ (5.7). On considère l'équation

$$\mathcal{F}_3(U, X, \mu, \mathbf{u}, \rho, \nu) = 0,$$

où (U, μ, \mathbf{u}) est exprimé grâce aux développements indiqués au Théorème 3.1. Alors, pour $U = 0$, $\mu = \mu_c$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, on a $X = \mathbb{T}^{-1}Y$, $\mathbf{a} = \mu_c$, $\mathbb{Q} = \mathbb{I}$, $V = \mathbf{u}_0$, et l'équation $\mathcal{F}_3 = 0$ donne

$$\mathbb{T}^{-1} \boldsymbol{\rho}_c - \mathbf{u}_0 \{\lambda(\tau_1 + \tau_2) \mu_c \nu_c\}^{-1/3} = 0$$

qui implique

$$\rho_c = \lambda, \quad \nu_c = (\lambda(\tau_1 + \tau_2) \mu_c)^{-1}.$$

Pour le calcul des ordres successifs suivants dans les développements de $X(Y)$, ρ , ν , on utilise le Lemme suivant démontré en appendice, donnant la différentielle de \mathcal{F}_3 par rapport à X :

Lemme 5.1 *Soient $X \in C^2(\mathcal{O})^d$, tel que $|\det X'(Y)| \neq 0$ dans \mathcal{O} , et $\mathcal{H}(X) := \mathcal{D}X - |\det X'|^{1/3} \mathbf{F}(X)$, où la fonction vectorielle \mathbf{F} est régulière. Alors, pour tout $v \in C^1(\mathcal{O})^d$,*

$$D_X \mathcal{H}(X)[X'v] = X' \left(\mathcal{D}v - \frac{1}{3} (\nabla \cdot v) \boldsymbol{\rho} \right) + v \cdot \nabla \mathcal{H}(X) + \frac{1}{3} (\nabla \cdot v) \mathcal{H}(X). \quad (5.8)$$

On a donc

$$X'^{-1}\partial_X\mathcal{F}_3[X'v] = \mathcal{D}v - \frac{1}{3}(\nabla \cdot v)\mathbf{e} + \mathcal{R}(\mathcal{F}_3)[v] \quad (5.9)$$

où $\mathcal{R}(\mathcal{F}_3)$ est un opérateur identiquement nul lorsque $\mathcal{F}_3 = 0$. Ainsi, à chaque ordre on doit inverser un système linéaire de la forme suivante (2 composantes)

$$\mathcal{D}_c v - \frac{1}{3}(\nabla \cdot v)\mathbf{e}_c = f, \quad (5.10)$$

et pour avoir une solution périodique, on doit imposer que la moyenne de f sur une période, est nulle (2 conditions scalaires). Ces deux conditions permettent d'obtenir ρ et ν , et on a les coefficients $v_{\mathbf{k}}$ de la série de Fourier de v , à condition que $(k_1 + \lambda k_2)^2 \neq 0$ (voir la résolution de (6.4) dans le cas général), *condition réalisée si λ est irrationnel*, et v est unique si on impose $v_{\mathbf{0}} = 0$. Enfin, pour la même raison que pour μ et \mathbf{u} , les séries qu'on obtient pour ρ et ν sont en puissances de ε_1^2 et ε_2^2 :

$$\rho = \lambda + \rho_1\varepsilon_1^2 + \rho_2\varepsilon_2^2 + \dots, \quad \nu = \nu_c + \nu_1\varepsilon_1^2 + \nu_2\varepsilon_2^2 + \dots \quad (5.11)$$

où les coefficients ρ_j et ν_j sont des fonctions analytiques explicites de (τ_1, τ_2) .

Développement formel du difféomorphisme dans le cas $\lambda = 1$ Dans le cas où le réseau Γ est en losanges ($\tau_1 = \tau_2$, $\lambda = 1$), et pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ on a $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, et le système (1.4,1.5) commute avec la symétrie supplémentaire \mathcal{S}_1 ($K_1 \cdot X \leftrightarrow K_2 \cdot X$) (symétrie par rapport à $0x_1$). Alors la série U du Théorème 3.1 est invariante par \mathcal{S}_1 . La recherche du difféomorphisme X et des scalaires ρ et ν est alors modifiée par le fait que le nombre de rotation est maintenant fixé: $\rho = \lambda = 1$. Dans l'équation $\mathcal{F}_3 = 0$, on observe que le champ de vecteurs V qui est pair par rapport à X , vérifie $\mathcal{S}_1(V_1, V_2) = (V_1, -V_2)$, et l'on doit chercher $X(Y) = \mathbb{T}^{-1}Y + \mathcal{W}(Y)$ avec \mathcal{W} impair en Y , et vérifiant

$$\mathcal{S}_1(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) = (\mathcal{W}_1, -\mathcal{W}_2)$$

où en coordonnées Y la symétrie \mathcal{S}_1 est la symétrie par rapport à la bissectrice: $\mathcal{S}_1 f(y_1, y_2) = f(y_2, y_1)$. Pour un tel choix de \mathcal{W} , on montre facilement que $|\det X'|$ est invariant par \mathcal{S}_1 , et l'équation (5.7) ne donne qu'une condition scalaire (au lieu de deux) pour vérifier la condition sur la moyenne. En effet pour toute fonction f 2π -périodique, paire de Y , et antisymétrique pour la symétrie \mathcal{S}_1 on a $f_{k_1, k_2} = -f_{k_2, k_1}$ (réel). D'où $f_{\mathbf{0}} = 0$ et $f_{\mathbf{k}} = 0$ pour $k_1 + k_2 = 0$, ce qui neutralise notamment la condition de moyenne sur la deuxième composante de (5.7). L'obtention de $X(Y)$ diffère du cas précédent pour la résolution de (5.10). L'identité (5.9) montre qu'on doit résoudre à chaque ordre un système de la forme

$$\mathbb{T}^{-1}\mathcal{D}_c v - \frac{1}{3}(\nabla \cdot v)\mathbf{u}_0 = g$$

où g est 2π -périodique, pair en Y , et vérifie $\mathcal{S}_1(g_1, g_2) = (g_1, -g_2)$. En notant $v = (v_1, v_2)$ ce système donne

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_c(v_1 - v_2) &= 2\tau g_2, \\ \mathcal{D}_c(v_1 + v_2) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) &= 2g_1, \end{aligned}$$

ce qui se résout facilement par les séries de Fourier, en donnant d'abord $v_1 - v_2 = v_3 + h(y_1 - y_2)$ avec v_3 impair antisymétrique, complètement défini, et h impair, arbitraire. La deuxième équation donne alors

$$\frac{4}{3}\mathcal{D}_c v_1 - \frac{2}{3}h' = \mathcal{D}_c v_3 - \frac{2}{3}\partial_{y_2} v_3 + 2g_1.$$

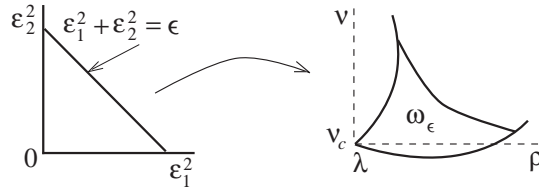


Figure 4: Paramétrage

Supposant la moyenne de g_1 nulle (seule condition qui reste pour déterminer ν), la condition de compatibilité donne h et v_1 périodiques impairs de Y avec $v_1 + v_2$ invariant par \mathcal{S}_1 (en ajustant l'arbitraire sur v_1).

Une autre méthode est utilisée dans [10], avec les courbes caractéristiques en coordonnée X , pour intégrer (5.7) ré-écrit en coordonnée X , la symétrie supplémentaire \mathcal{S}_1 jouant encore un rôle fondamental. Finalement, pour $\tau_1 = \tau_2$ ($\lambda = 1$), et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ dans U et μ du Théorème 3.1, on a $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, $\rho = 1$, et on obtient $X(Y)$ et ν en séries de puissances de ε_1 , solution de $\mathcal{F}_3 = 0$. De plus ν est en série de puissances de ε_1^2 et $\nu_c = (2\tau_1\mu_c)^{-1}$.

5.4 Système étendu

L'idée est maintenant de résoudre le système "étendu" de 3 équations (la dernière ayant 2 composantes)

$$\tilde{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)(U, X, \mu, \mathbf{u}, \rho, \nu) = 0.$$

Pour des raisons de clarté de l'exposé on ne considère dans la suite que les cas où $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ est fixé tel que $\lambda \notin \mathbb{Q}$, et vérifie l'hypothèse 2.1 de non résonance. On utilise comme solution approchée, le développement en série de puissances de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ obtenu plus haut, tronqué à l'ordre $|\boldsymbol{\varepsilon}|^{2m} = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^m$:

$$U_{2m}(Y, \boldsymbol{\varepsilon}), X_{2m}(Y, \boldsymbol{\varepsilon}), \mu_{2m}(\boldsymbol{\varepsilon}), \mathbf{u}_{2m}(\boldsymbol{\varepsilon}), \rho_{2m}(\boldsymbol{\varepsilon}), \nu_{2m}(\boldsymbol{\varepsilon}).$$

Supposant que la condition

$$\rho_1\nu_2 - \rho_2\nu_1 \neq 0 \tag{5.12}$$

est réalisée dans (5.11) (vrai pour presque tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{+2}$), on change de paramètres en choisissant $(\rho, \nu) : \rho = \rho_{2m}(\boldsymbol{\varepsilon}), \nu = \nu_{2m}(\boldsymbol{\varepsilon})$ à la place de $\boldsymbol{\varepsilon}$ grâce au difféomorphisme (voir la figure 4)

$$\{0 < \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < \epsilon\} \Leftrightarrow \{(\rho, \nu) = (\rho_{2m}(\boldsymbol{\varepsilon}), \nu_{2m}(\boldsymbol{\varepsilon})) \in \omega_\epsilon\}.$$

5.5 Processus itératif

Le théorème de Nash-Moser est basé sur un processus itératif suivant la méthode de Newton, que l'on modifie en remplaçant la différentielle, par une différentielle approchée (notée Λ ci-dessous), et en "régularisant" l'inversion de cette différentielle approchée. Pour $\rho \in \mathcal{E}(\nu)$, ν fixé, $(\rho, \nu) \in \omega_\epsilon$, $W = (\check{U}, \check{W}, \check{\mu}, \check{\mathbf{u}})$, on définit

$$\Phi(W, \rho) = \frac{1}{|\boldsymbol{\varepsilon}|^m} \tilde{\mathcal{F}}(U_{2m} + |\boldsymbol{\varepsilon}|^m \check{U}, X_{2m} + |\boldsymbol{\varepsilon}|^m \check{W}, \rho, \nu, \mu_{2m} + |\boldsymbol{\varepsilon}|^m \check{\mu}, \mathbf{u}_{2m} + |\boldsymbol{\varepsilon}|^m \check{\mathbf{u}}),$$

et le processus itératif est défini par

$$\begin{aligned} W_0(\rho) &= 0, \quad W_{q+1}(\rho) = W_q(\rho) + \mathcal{S}_{\wp_{q+1}(\rho)} \widetilde{W}_q(\rho), \\ \mathbf{\Lambda}(W_q(\rho), \rho) \widetilde{W}_q(\rho) &= -\Phi(W_q(\rho), \rho), \\ \mathbf{\Lambda}(W, \rho) - \partial_W \Phi(W, \rho) &= \mathcal{R}(\Phi, W) = 0 \text{ si } \Phi(W, \rho) = 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

où $\wp_q(\rho) = |\rho - \lambda|^{(3/2)^q}$, et l'opérateur \mathcal{S}_\wp tronque la série de Fourier à l'ordre $|n| \leq 1/\wp$.

Le cadre fonctionnel général et des conditions précises assurant la convergence de ce processus sont données par exemple dans [9], l'avantage étant que l'ensemble $\mathcal{E}(\nu)$ où varie ρ ne change pas au cours de l'itération, assurant une estimation uniforme pour l'inverse de l'opérateur $\mathbf{\Lambda}$. On observe, qu'on a des estimations "tame" pour les composantes $\mathcal{F}_j, j = 1, 2, 3$ en termes de \check{U}, \check{W} la perte de régularité étant fixée (voir par exemple le Lemme 1.1), ainsi que pour le reste $\mathcal{R}(\Phi, W)$ en termes de Φ et W (voir section suivante). Nous montrons dans la suite que l'inversion de $\mathbf{\Lambda}$, qui admet aussi une estimation "tame", fait également apparaître une perte fixe de régularité (voir le Théorème 8.4), cette perte devant être rattrapée par l'opérateur $\mathcal{S}_{\wp_{q+1}(\rho)}$. La rapidité de convergence de la méthode de Newton permet alors d'obtenir la convergence vers une solution unique (puisqu'on impose les symétries) W voisine de 0 de $\Phi(W, \rho) = 0$.

Remarque 5.2 Dans le cas $\tau_1 = \tau_2, \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ on utilise le paramètre ε (le seul qui reste).

6 Inversion de la Différentielle $\partial_{(U, X, \mu, \mathbf{u})} \widetilde{\mathcal{F}}$

L'inversion de la différentielle approchée $\mathbf{\Lambda}$ prend la forme suivante (voir [11]) où $(f, g, h) \in H_{\text{impair}}^s \times H_{\text{pair}}^s \times \{H_{\text{pair}}^s\}^2$: (les deux premières équations se déduisent aisément de (4.5) exprimé en coordonnée Y , la troisième vient de (5.9))

$$\begin{aligned} K \overline{\mathcal{G}}(\widetilde{\delta\phi}) - \frac{1}{H} \mathcal{D}(\widetilde{\delta\eta}) - q_1 \widetilde{\delta\eta} - \mathbf{q}_2 \cdot \delta \mathbf{u} &= f \\ \frac{1}{H} \mathcal{D}(\widetilde{\delta\phi}) + \widetilde{\alpha} \widetilde{\delta\eta} + \mathbf{q}_3 \cdot \delta \mathbf{u} + \widetilde{\eta} \delta \mu &= g \\ \mathcal{D}v - \frac{1}{3} (\nabla \cdot v) \boldsymbol{\rho} + \frac{\delta \mu}{3\widetilde{\alpha}} \boldsymbol{\rho} + \mathbf{T}[X'^* \delta \mathbf{u} + \nabla(\widetilde{\delta\phi}), \widetilde{\delta\eta}] &= X'^{-1} h, \end{aligned} \quad (6.1)$$

où v est défini par

$$\delta X = X'v,$$

et où les coefficients $K, H, q_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ sont définis par

$$\begin{aligned} K &= H \left(\widetilde{\mathcal{Q}} \widetilde{V} \cdot \widetilde{V} \right)^{1/2} \left(\widetilde{\mathcal{Q}} \mathcal{D}X \cdot \mathcal{D}X \right)^{-1/2} = 1 + O(\mathcal{F}_3) \\ q_1 &= \widetilde{\text{div}}_X \widetilde{V}, \quad \mathbf{q}_2 = \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\eta}, \quad \mathbf{q}_3 = (\widetilde{\nabla}_X \psi - \widetilde{\mathbf{b}} \widetilde{\nabla}_X \eta), \\ H &= |\det X'|^{1/3} \left\{ \nu \widetilde{\alpha} (\widetilde{\mathcal{Q}} \widetilde{V} \cdot \widetilde{V})^{1/2} \right\}^{-1/3}, \quad \overline{\mathcal{G}}(\widetilde{\delta\phi}) = \widetilde{\mathcal{G}}_\eta(\widetilde{\delta\phi}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

L'opérateur linéaire \mathbf{T} a une expression compliquée, et vérifie

$$\mathbf{T}[X'^* \delta \mathbf{u} + \nabla(\widetilde{\delta\phi}), \widetilde{\delta\eta}] \sim \frac{1}{3\mu_c} \boldsymbol{\rho} \mathcal{D}^2(\widetilde{\delta\eta}) + \frac{1}{3} \boldsymbol{\rho} \mathcal{D}(\widetilde{\delta\phi}) - \mathbf{T} \mathbf{T}^* \nabla(\widetilde{\delta\phi}) - \mathbf{T} \delta \mathbf{u}$$

où on note que $\mathbf{T} \delta \mathbf{u}$ est non colinéaire à $\boldsymbol{\rho} \sim (1, \lambda) = \mathbf{T} \mathbf{u}_0$ puisque $\delta \mathbf{u}$ est orthogonal à $\mathbf{u} \sim \mathbf{u}_0$, ce qui implique, si l'on intègre sur une période la dernière équation de (6.1), que le terme en $\delta \mu$ et le terme en $\delta \mathbf{u}$ ne sont pas colinéaires.

Pour résoudre le système (6.1) par rapport à $(\widetilde{\delta\phi}, \widetilde{\delta\eta}, v, \delta\mu, \delta\mathbf{u})$, on procède ainsi:

(i) On extrait $\widetilde{\delta\eta}$ de la 2ème équation et on le remplace dans la 1ère et la 3ème.

(ii) On moyennise la 3ème équation pour extraire $(\delta\mu, \delta\mathbf{u})$ comme des fonctionnelles de $\widetilde{\delta\phi}$.

(iii) On remplace $(\delta\mu, \delta\mathbf{u})$ dans la 1ère équation. On obtient ainsi une équation du second ordre pour $\widetilde{\delta\phi}$, qui n'est autre que (4.7) écrite en coordonnée Y , perturbée par des termes régularisants:

$$K\overline{\mathcal{G}}\widetilde{\delta\phi} + \frac{1}{H^2\overline{\mathbf{a}}}\mathcal{D}^2\widetilde{\delta\phi} + p_1\mathcal{D}\widetilde{\delta\phi} + \mathcal{H}_{-1}\widetilde{\delta\phi} = F, \quad (6.3)$$

où \mathcal{H}_{-1} est un opérateur régularisant (regagne un nombre fini de dérivées, dépendant de la régularité de W). *La résolution de cette équation est le problème principal traité dans les sections suivantes.*

(iv) L'équation (6.3) une fois résolue, on remplace alors $\widetilde{\delta\phi}$ dans la partie oscillante de la 3ème équation de (6.1), afin d'obtenir une équation pour v qu'on sait résoudre moyennant une hypothèse diophantienne sur ρ (voir ci-dessous).

Résolution en v (de moyenne 0) Il s'agit, dans la dernière étape, de résoudre le système

$$\mathcal{D}v - \frac{1}{3}(\nabla \cdot v)\mathbf{g} = G, \quad \int_{T^2} G dY = 0. \quad (6.4)$$

Par Fourier, on a pour $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} i(k_1 + \rho k_2)v_{\mathbf{k}}^{(1)} - \frac{i}{3}(k_1 v_{\mathbf{k}}^{(1)} + k_2 v_{\mathbf{k}}^{(2)}) &= G_{\mathbf{k}}^{(1)} \\ i(k_1 + \rho k_2)v_{\mathbf{k}}^{(2)} - \frac{i\rho}{3}(k_1 v_{\mathbf{k}}^{(1)} + k_2 v_{\mathbf{k}}^{(2)}) &= G_{\mathbf{k}}^{(2)}, \end{aligned}$$

système dont le déterminant est

$$\Delta = -\frac{2}{3}(k_1 + \rho k_2)^2.$$

Il est alors facile de montrer que si ρ vérifie (pour $\alpha > 0$ fixé) la condition diophantienne (voir la Proposition 6.4)

$$|k_1 + \rho k_2| \geq \frac{c}{|\mathbf{k}|^{1+\alpha}}, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

alors il existe une solution unique v de moyenne nulle, telle que $\|v\|_{s-3-2\alpha} \leq \|G\|_s$.

Remarque 6.1 *Dans le cas $\tau_1 = \tau_2$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ on a la symétrie supplémentaire \mathcal{S}_1 et l'étape (ii) ne fournit qu'une équation pour $\delta\mu$, puisque $\delta\mathbf{u} = 0$. On a vu à la sous-section 5.3 comment on doit procéder dans ce cas pour l'étape (iv) de la résolution en v .*

Equation pour $\widetilde{\delta\phi} = u$ Revenant à l'équation (6.3) pour $\widetilde{\delta\phi}$ que l'on note u pour simplifier, on a, par construction du difféomorphisme $Y \mapsto X(Y)$, une équation différentielle de la forme

$$\nu\mathcal{D}^2u + p\mathcal{D}u + \mathfrak{G}_1u + \mathfrak{G}_0u + \mathfrak{L}_{-1}u = f_1 \quad (6.5)$$

où le symbole de l'opérateur \mathfrak{G}_1 d'ordre 1 s'écrit

$$\begin{aligned} J_1(Y, \mathbf{k}) &= (\mathfrak{G}_1(Y)\widetilde{\mathbf{k}} \cdot \widetilde{\mathbf{k}})^{1/2}, \quad \widetilde{\mathbf{k}} = (k_1 + \rho k_2, k_2), \\ &= \{a(Y)\widetilde{k}_1^2 + 2b(Y)\widetilde{k}_1 k_2 + k_2^2\}^{1/2}, \end{aligned}$$

et où \mathfrak{G}_0 et \mathfrak{L}_{-1} sont respectivement d'ordre 0 et -1 (regagne une dérivée). Dans la suite, on note

$$\mathbb{A} = \frac{1}{4\pi^2} \int \mathfrak{G}_1(Y) dY, \quad \mathbb{A}_c = \begin{pmatrix} \nu_c^2 & -\nu_c \sin \theta_1 \\ -\nu_c \sin \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

qui est une matrice définie positive, où \mathbb{A} est une fonctionnelle de (ρ, ν) et du point W_q d'itération, et on note

$$\mathbb{B}(Y) = \mathfrak{G}_1(Y) - \mathbb{A}.$$

L'opérateur qui joue le rôle essentiel dans la suite est

$$\mathfrak{L} = \nu \mathcal{D}^2 + (-\Delta)^{1/2} \quad (6.7)$$

dont le symbole est

$$L(\mathbf{k}) = -\nu(k_1 + \rho k_2)^2 + (\mathbb{A}\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{k}})^{1/2}.$$

Pour $(\rho, \nu) = (\lambda, \nu_c)$ on a l'opérateur \mathfrak{L}_c pour l'inverse duquel le théorème suivant donne une estimation:

Theorème 6.2 *Pour tout $\alpha > 0$, il existe $\mathcal{T} \subset (\mathbb{R}^+)^2$ de mesure pleine, tel que pour $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{T}$, le noyau de \mathfrak{L}_c est de dimension 4: $\{e^{\pm iy_1}, e^{\pm iy_2}\}$. De plus, il existe $d > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} |k_1 + \lambda k_2| &\geq \frac{d}{|\mathbf{k}|^{1+\alpha}}, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \\ |L_c(\mathbf{k})| &\geq \frac{d}{|\mathbf{k}|^{1/2+\alpha}}, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus S_{triv}, \quad S_{triv} = \{(0,0), (\pm 1,0), (0,\pm 1)\}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Remarque 6.3 *Dans le cas $\tau_1 = \tau_2$, on a $\lambda = 1$ et on peut obtenir une minoration semblable pour $|L_c(\mathbf{k})|$, mais la preuve de celle-ci est plus délicate et fondamentalement différente de celle montrée ci-dessous.*

Tout d'abord on utilise le résultat classique suivant démontré en Appendice:

Proposition 6.4 *Pour tout $\alpha > 0$ et $N > 0$, il existe $\mathcal{E}_N \subset [-N, +N]$ de mesure pleine tel que*

$$\forall \rho \in \mathcal{E}_N, \exists d > 0 \text{ tel que } |k_1 + \rho k_2| > \frac{d}{|\mathbf{k}|^{1+\alpha}} \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Preuve du théorème. Alors $\lambda = \left(\frac{1+\tau_2^2}{1+\tau_1^2}\right)^{1/2} \in \mathcal{E}_N$ implique que $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ appartient à un ensemble de mesure pleine dans \mathbb{R}^{+2} , et on conclut en notant que N est arbitraire. Pour montrer (6.8) il suffit de considérer $|k_2| > M$, M assez grand et $\lambda \in (0, N)$. On cherche à déterminer où sont les "mauvais" λ tels que

$$|L_c(\mathbf{k})| < \omega.$$

L'équation $L_c(\mathbf{k}) = \omega$ conduit (en supposant $k_2 > 0$) à $|k_1| < 2Mk_2$ et

$$\lambda_{\pm} = -\frac{k_1}{k_2} \pm \frac{1}{\sqrt{\nu_c k_2}} \left\{ \left[1 - 2\nu_c \sin \theta_1 \left(\lambda_{\pm} + \frac{k_1}{k_2} \right) + \nu_c^2 \left(\lambda_{\pm} + \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{\omega}{k_2} \right\}^{1/2}.$$

On a

$$\sin \theta_1 = \frac{1}{2} [(\lambda \nu_c)^{-1} + \lambda \nu_c (1 - \lambda^2)],$$

et résolvant par rapport à λ , le théorème des fonctions implicites donne

$$\lambda_{\pm} = \Lambda_{\pm}(\nu_c, k_1, k_2, \omega),$$

avec

$$\frac{\partial \Lambda_{\pm}}{\partial \omega} = \mp \frac{1}{2\sqrt{\nu_c}} \frac{1}{k_2^{3/2}} + O(k_2^{-2}).$$

Ainsi, pour $|\omega| \leq d/|k_2|^{\alpha+1/2}$ les "mauvais" λ appartiennent à un intervalle d'épaisseur $Cd/|k_2|^{2+\alpha}$. L'épaisseur totale pour $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$, $|k_2| > M$, $|k_1| < 2M|k_2|$ est alors bornée par $C'd$. La mesure des "mauvais" λ tels que $|L_c(\mathbf{k})| < \frac{d}{|\mathbf{k}|^{1/2+\alpha}}$ est donc d'ordre d et on a $|L_c(\mathbf{k})| \geq \frac{d}{|\mathbf{k}|^{1/2+\alpha}}$ pour un ensemble de λ de mesure pleine $-O(d)$, ce qui suffit pour établir le Théorème. ■

En notant $\tilde{\mathfrak{L}}_c^{-1}$ le pseudo-inverse de \mathfrak{L}_c sur $\{\ker \mathfrak{L}_c\}^{\perp}$ on a alors le Corollaire suivant:

Corollaire 6.5 *Pour $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{T}$, et pour tout $s \geq 0$, il existe $c(s) > 0$ tel que pour $f \in H_{impair}^s \cap \{\ker \mathfrak{L}_c\}^{\perp}$*

$$\|\tilde{\mathfrak{L}}_c^{-1} f\|_{s-1} \leq c(s) \|f\|_s.$$

Ce Corollaire indique une perte de 1 degré de régularité pour l'inverse $\tilde{\mathfrak{L}}_c^{-1}$. On ne peut donc pas encore utiliser cet opérateur pour inverser

$$\nu \mathcal{D}^2 + p\mathcal{D} + \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_0 + \mathfrak{L}_{-1} \tag{6.9}$$

qui intervient dans (6.5). Il nous faut maintenant "améliorer" cet opérateur grâce à la méthode de descente expliquée plus loin. Ceci correspond à un changement de variables "moyennisant" (6.9) afin de rendre constante (indépendants de Y) la partie contenant les ordres les plus élevés de cet opérateur, jusqu'à des termes suffisamment régularisants. Cette opération permet ainsi d'écrire finalement (6.9) sous la forme d'un opérateur de la forme: opérateur inversible (Identité + perturbation régularisante). La méthode suivante est quasiment "algébrique" dans sa forme, et s'applique particulièrement bien lorsque la partie principale de l'opérateur est la somme d'une dérivée seconde dans une certaine direction, et d'une dérivée première dans une direction transverse (voir des exemples dans [15], [9], [10], [11]).

7 Méthode de descente

Cette section, essentielle pour inverser l'opérateur (6.9), fournit un moyen systématique de simplifier (6.9), à l'aide d'une succession de cinq changements de variables élémentaires (pas les mêmes changements dans les espaces objet et image). Ici on ne détaille que le processus algébrique des opérations. Les estimations précises nécessaires à chaque étape se trouvent dans [11]. Bien que dans le même esprit, la méthode de descente est sensiblement différente dans le cas $\tau_1 = \tau_2$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ($\rho = 1$), où l'on doit l'adapter à ce cas particulier. Ceci est dû à la structure différente de l'opérateur \mathcal{D} qui est alors simplement la dérivée dans la direction x_1 . On réfère à [10] pour les détails de cette méthode. Ci-dessous, nous ne considérons que le cas où ρ vérifie une hypothèse diophantienne (voir (7.3)).

7.1 Première étape (forme canonique)

On commence par mettre en évidence l'opérateur \mathfrak{L} (défini en (6.7)) déjà à coefficients constants, et qui contient les termes de dérivations principaux. On définit dans la suite

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\tilde{\mathbf{k}}}{(\mathbb{A}\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{k}})^{1/2}}, \quad \tilde{\mathbf{k}} = (k_1 + \rho k_2, k_2),$$

et on utilise l'identité suivante provenant de la définition de $L(\mathbf{k})$

$$\xi_1^2 = \frac{1}{\nu(\mathbb{A}\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{k}})^{1/2}} \left(1 - \frac{L(\mathbf{k})}{(\mathbb{A}\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{k}})^{1/2}} \right). \quad (7.1)$$

Alors le symbole de \mathfrak{G}_1 devient

$$\begin{aligned} J_1 &= (\mathbb{A}\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{k}})^{1/2} (1 + 2\mathbb{B}_{12}\xi_1\xi_2 + \mathbb{B}_{11}\xi_1^2)^{1/2} \\ &= (\mathbb{A}\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{k}})^{1/2} - i\xi_2\mathbb{B}_{12}i(k_1 + \rho k_2) + Q_0(Y, \xi) \left(1 - \frac{L(\mathbf{k})}{(\mathbb{A}\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{k}})^{1/2}} \right), \end{aligned}$$

où Q_0 est le symbole d'un opérateur borné \mathfrak{Q}_0 de norme $O(|\varepsilon|)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \nu\mathcal{D}^2u &+ p\mathcal{D}u + \mathfrak{G}_1u + \mathfrak{G}_0u + \mathfrak{L}_{-1}u = \\ &= (\mathbb{I} - \mathfrak{Q}_0(-\Delta)^{-1/2})(\mathfrak{L}u + \mathfrak{A}\mathcal{D}u + \mathfrak{B}u + \mathfrak{F}_{-1}u) \end{aligned}$$

où \mathfrak{B} et \mathfrak{F}_{-1} sont des opérateurs $O(|\varepsilon|)$ et respectivement d'ordre 0 et -1, et où le symbole de l'opérateur \mathfrak{A} d'ordre 0, s'écrit

$$A(Y, \xi) = p(Y) - i\xi_2\mathbb{B}_{12}(Y),$$

avec des fonctions p et \mathbb{B}_{12} de normes $O(|\varepsilon|)$ et de moyenne nulle. On est donc ramené à inverser

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{A}\mathcal{D} + \mathfrak{B} + \mathfrak{F}_{-1}. \quad (7.2)$$

7.2 Deuxième étape - élimination de $\mathfrak{A}\mathcal{D}$

Pour éliminer l'opérateur $\mathfrak{A}\mathcal{D}$ d'ordre 1, on fait un changement de variables de la forme $\mathbb{I} + \mathfrak{W}$, où le symbole W de \mathfrak{W} est de la même forme que $A(Y, \xi)$:

$$W(Y, \xi) = \widetilde{W}_r(Y) + i\xi_2\widetilde{W}_i(Y),$$

et on note \mathfrak{W}_1 l'opérateur d'ordre 0, de symbole $\mathcal{D}W$. Alors on a

$$(\mathfrak{L} + \mathfrak{A}\mathcal{D} + \mathfrak{B})\mathfrak{W} = \mathfrak{W}\mathfrak{L} + \{2\nu\mathfrak{W}_1 + (\mathfrak{A}\mathfrak{W})_0\}\mathcal{D} + \text{ordre } 0$$

où le symbole de $(\mathfrak{A}\mathfrak{W})_0$ est défini par (voir les notes de Gilles Lebeau)

$$\begin{aligned} A(Y, \xi)W(Y, \xi) &= N(Y, \xi) + \widetilde{A}_i\widetilde{W}_i(1 - \xi_2^2) \\ N(Y, \xi) &= \widetilde{N}_r(Y) + i\xi_2\widetilde{N}_i(Y), \quad \widetilde{N}(Y) = \widetilde{A}(Y)\widetilde{W}(Y). \end{aligned}$$

En utilisant (7.1) et l'identité

$$1 - \xi_2^2 = 2\mathbb{A}_{12}\xi_1\xi_2 + \mathbb{A}_{11}\xi_1^2,$$

on obtient

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{W})_0\mathcal{D} = \mathfrak{N}\mathcal{D} + \mathfrak{E}(\mathbb{I} - (-\Delta)^{-1/2}\mathfrak{L})$$

où \mathfrak{E} est $O(|\varepsilon|)$ et d'ordre 0, d'où

$$(\mathfrak{L} + \mathfrak{A}\mathcal{D} + \mathfrak{B})(\mathbb{I} + \mathfrak{W}) = (\mathbb{I} + \mathfrak{W} - \mathfrak{E}(-\Delta)^{-1/2})\mathfrak{L} + (2\nu\mathfrak{W}_1 + \mathfrak{N} + \mathfrak{A})\mathcal{D} + \text{ordre } 0.$$

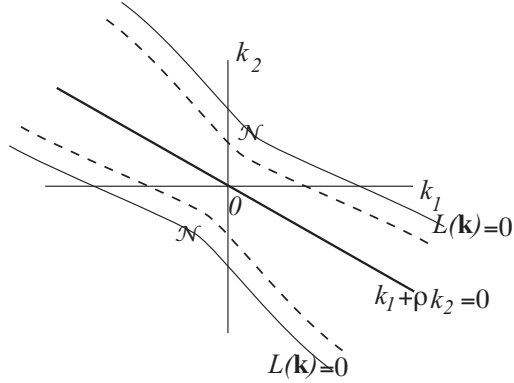


Figure 5: Définition de la projection II

On choisit alors la fonction \widetilde{W} telle que $2\nu\mathfrak{W}_1 + \mathfrak{N} + \mathfrak{A} = 0$, c'est à dire

$$2\nu\mathcal{D}\widetilde{W} + \widetilde{A}(1 + \widetilde{W}) = 0,$$

qui se résout aisément (au prix d'une perte de différentiabilité de \widetilde{W} par rapport à \widetilde{A}) si ρ vérifie la condition diophantienne

$$|k_1 + \rho k_2| > \frac{d}{|\mathbf{k}|^{1+\alpha}}, \text{ pour tout } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\} \quad (7.3)$$

en prenant (puisque \widetilde{A} est de moyenne nulle)

$$\widetilde{W} = e^{-\frac{1}{2\nu}\mathcal{D}^{-1}\widetilde{A}} - 1.$$

On a ainsi, par construction

$$(\mathfrak{L} + \mathfrak{A}\mathcal{D} + \mathfrak{B} + \mathfrak{F}_{-1})(\mathbb{I} + \mathfrak{W}) = (\mathbb{I} + \mathfrak{W} - \mathfrak{E}(-\Delta)^{-1/2})(\mathfrak{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0)$$

où l'opérateur pseudodifférentiel \mathfrak{B}_0 et l'opérateur \mathfrak{F}_0 sont $O(|\varepsilon|)$ et respectivement d'ordre 0 et -1. On est donc ramené à inverser

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0. \quad (7.4)$$

7.3 Troisième étape: décomposition de l'espace de Fourier - Projection II

Dans la suite on a besoin de couper en deux l'espace de Fourier. Ceci est dû au fait que l'opérateur \mathcal{D} n'a pas d'inverse borné, même pour des fonctions de moyenne nulle. On définit alors l'opérateur de projection II par (voir Figure 5)

$$\mathcal{N} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2; (k_1 + \rho k_2)^2 > \frac{1}{4\nu}(\mathbb{A}\widetilde{\mathbf{k}} \cdot \widetilde{\mathbf{k}})^{1/2}\}, \quad (\widehat{\Pi u})_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \widehat{u}_{\mathbf{k}} & \text{if } \mathbf{k} \in \mathcal{N} \\ 0 & \text{if } \mathbf{k} \notin \mathcal{N} \end{cases}.$$

Par construction on a facilement les estimations suivantes:

$$\|\mathfrak{L}^{-1}(\mathbb{I} - \Pi)u\|_{s+1} \leq c(s)\|u\|_s, \quad \|\mathcal{D}^{-1}\Pi u\|_{s+1/2} \leq c(s)\|u\|_s, \quad u \in H_{impair}^s,$$

qui indiquent que sur le sous-espace image de $(\mathbb{I} - \Pi)$, l'opérateur \mathcal{L}^{-1} est régularisant d'ordre -1, alors que sur le sous-espace image de Π , l'opérateur \mathcal{D}^{-1} est régularisant d'ordre -1/2. Pour les changements de variables ultérieurs, nous avons besoin du Lemme suivant qui exprime le commutateur de Π avec n'importe quel opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 (démontré dans l'Appendice):

Lemme 7.1 *Soit \mathfrak{H} un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0, dont les coefficients sont suffisamment réguliers, alors*

$$[\Pi, \mathfrak{H}] := \Pi\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\Pi = \mathfrak{Y}\mathcal{L} + \mathfrak{Z} \quad (7.5)$$

où \mathfrak{Y} et \mathfrak{Z} sont des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre -1:

$$\|\mathfrak{Y}u\|_{s+1} + \|\mathfrak{Z}u\|_{s+1} \leq c_{\mathfrak{H}}\|u\|_s, \quad u \in H_{impair}^s.$$

Triangularisation de $\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0$ Pour utiliser proprement l'opérateur Π , on doit présenter l'opérateur $\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0$ sous une forme "triangulaire". Pour cela on utilise les identités suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\mathbb{I} - \Pi)(\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0) &= (\mathbb{I} + \mathfrak{K})(\mathbb{I} - \Pi) + \mathfrak{K}\Pi \\ \mathfrak{K} &= \mathcal{L}^{-1}(\mathbb{I} - \Pi)(\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0), \quad (\mathbb{I} - \Pi)\mathfrak{K} = \mathfrak{K} \text{ (d'ordre -1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &:= (\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0)[\mathbb{I} + \mathfrak{K}(\mathbb{I} - \Pi)]^{-1}\mathcal{L}^{-1}(\mathbb{I} - \Pi) \\ \mathfrak{Q}_1(\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0) &= (\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0)(\mathbb{I} - \Pi) + (\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0)[\mathbb{I} + \mathfrak{K}(\mathbb{I} - \Pi)]^{-1}\mathfrak{K}\Pi. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\Pi(\mathbb{I} - \mathfrak{Q}_1)(\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0) = \Pi(\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_1)\Pi,$$

où \mathfrak{F}_1 est d'ordre -1, d'où finalement

$$(\mathbb{I} - \Pi\mathfrak{Q}_1)(\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0) = \Pi(\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_1)\Pi + (\mathbb{I} - \Pi)(\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0).$$

On est donc maintenant amené à inverser l'opérateur "triangulaire"

$$\Pi(\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_1)\Pi + (\mathbb{I} - \Pi)(\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_0). \quad (7.6)$$

7.4 Quatrième étape: moyennisation du terme d'ordre 0

Soit \mathfrak{H} un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 (qu'on choisit plus loin), de symbole $H(Y, \xi)$. Alors, avec les notations de la 2ème étape, où les symboles des opérateurs d'ordre 0 \mathfrak{H}_1 , \mathfrak{H}_{11} , $(\mathfrak{B}_0\mathfrak{H})_0$ sont respectivement $\mathcal{D}H$, \mathcal{D}^2H , B_0H et où $[(-\Delta)^{1/2}, \mathfrak{H}]_1$ désigne la partie d'ordre 0 du commutateur $[(-\Delta)^{1/2}, \mathfrak{H}]$ dont le symbole est $-i\nabla_Y H \cdot \nabla_{\mathbf{k}}(\mathbb{A}\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{k}})^{1/2}$ (voir les notes de Gilles Lebeau), on obtient

$$\begin{aligned} \Pi(\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_1)\Pi\mathfrak{H}\mathcal{D}^{-1}\Pi &= \Pi\mathfrak{H}\mathcal{D}^{-1}\Pi\mathcal{L}\Pi + 2\nu\Pi\mathfrak{H}_1\Pi + \Pi(\nu\mathfrak{H}_{11} + [(-\Delta)^{1/2}, \mathfrak{H}]_1)\mathcal{D}^{-1}\Pi + \\ &\quad + \Pi(\mathfrak{B}_0\mathfrak{H})_0 + (\mathfrak{B}_0\mathfrak{Y})_0\mathcal{L}\mathcal{D}^{-1}\Pi + \text{régul}(+1) \\ &= \mathfrak{Q}_2\mathcal{L}\Pi + 2\nu\Pi\mathfrak{H}_1\Pi + \Pi\mathfrak{B}_2\mathcal{D}^{-1}\Pi + \text{régul}(+1), \end{aligned}$$

avec le symbole de \mathfrak{B}_2 (ordre 0) et l'opérateur \mathfrak{Q}_2 (ordre -1/2) donnés par

$$\begin{aligned} B_2(Y, \xi) &= \nu\mathcal{D}^2H + B_0H - i\nabla_Y H \cdot \nabla_{\mathbf{k}}(\mathbb{A}\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{k}})^{1/2} \\ \mathfrak{Q}_2 &= \Pi(\mathfrak{H} + (\mathfrak{B}_0\mathfrak{Y})_0)\mathcal{D}^{-1}\Pi. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\Pi(\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_1)(\mathbb{I} + \Pi\mathfrak{H}\mathcal{D}^{-1}\Pi)\Pi = (\mathbb{I} + \Omega_2)\mathcal{L}\Pi + \Pi(2\nu\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_2\mathcal{D}^{-1})\Pi + \text{régul}(+1).$$

On choisit alors \mathfrak{H} tel que

$$2\nu\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{V}, \quad (7.7)$$

où l'opérateur \mathfrak{V} est indépendant de Y , de symbole

$$V(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{T^2} B_0(Y, \boldsymbol{\xi}) dY.$$

L'équation (7.7) se résout, grâce à l'hypothèse diophantienne (7.3) sur ρ , en donnant le symbole H de \mathfrak{H} sous la forme

$$H(Y, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2\nu}\mathcal{D}^{-1}[B_0(Y, \boldsymbol{\xi}) - V(\boldsymbol{\xi})]. \quad (7.8)$$

Ceci conduit à l'identité

$$\Pi(\mathcal{L} + \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{F}_1)(\mathbb{I} + \Pi\mathfrak{H}\mathcal{D}^{-1}\Pi) = (\mathbb{I} + \Omega_2)\Pi(\mathcal{L} + \mathfrak{V} + \mathfrak{B}_1\mathcal{D}^{-1} + \mathfrak{F}_2)\Pi,$$

où

$$B_1(Y, \boldsymbol{\xi}) = B_2(Y, \boldsymbol{\xi}) - H(Y, \boldsymbol{\xi})V(\boldsymbol{\xi}), \quad \int_{T^2} B_1(Y, \boldsymbol{\xi}) dY = 0.$$

On est donc maintenant amené à inverser l'opérateur

$$\Pi(\mathcal{L} + \mathfrak{V} + \mathfrak{B}_1\mathcal{D}^{-1} + \mathfrak{F}_2)\Pi + (\mathbb{I} - \Pi)(\mathcal{L} + \mathfrak{P}), \quad (7.9)$$

où \mathfrak{V} est $O(|\varepsilon|^2)$, constant d'ordre 0, \mathfrak{B}_1 est $O(|\varepsilon|)$, d'ordre 0, et de symbole de moyenne nulle, et \mathfrak{P} est $O(|\varepsilon|)$, d'ordre 0, et \mathfrak{F}_2 est $O(|\varepsilon|)$, d'ordre -1.

7.5 Cinquième étape: élimination de $\Pi\mathfrak{B}_1\mathcal{D}^{-1}\Pi$

Pour éliminer le terme $\Pi\mathfrak{B}_1\mathcal{D}^{-1}\Pi$, on procède de la même façon qu'à l'étape précédente, avec $\Pi\mathfrak{H}\mathcal{D}^{-2}\Pi$ au lieu de $\Pi\mathfrak{H}\mathcal{D}^{-1}\Pi$. Ici on trouve pour le nouvel \mathfrak{H} , le symbole $H(Y, \boldsymbol{\xi}) = -(2\nu)^{-1}\mathcal{D}^{-1}B_1(Y, \boldsymbol{\xi})$. On aboutit finalement au théorème suivant:

Theorème 7.2 *Soit $2 \leq s \leq 2 - 24$, $\alpha > 0$ et ψ, η, X tels que*

$$\|\psi\|_{C^r} + \|\eta\|_{C^r} + \|X - \mathbb{T}^{-1}\|_{C^r} \leq |\varepsilon|,$$

et supposons que soit vérifiée la condition diophantienne sur ρ : $|k_1 + \rho k_2| \geq d|\mathbf{k}|^{-(1+\alpha)}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$. Alors, il existe des opérateurs linéaires bornés $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \mathfrak{P}, H_{\text{impair}}^s \rightarrow H_{\text{impair}}^s$, et $\mathfrak{F} : H_{\text{impair}}^s \rightarrow H_{\text{impair}}^{s+1}$ tels que

$$\mathfrak{S}(\nu\mathcal{D}^2 + p\mathcal{D} + \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_0 + \mathcal{L}_{-1})\mathfrak{T} = \Pi(\mathcal{L} + \mathfrak{V} + \mathfrak{F})\Pi + (\mathbb{I} - \Pi)(\mathcal{L} + \mathfrak{P})$$

$$\|\mathfrak{V}u\|_s \leq c|\varepsilon|^2\|u\|_s, \quad \|\mathfrak{P}u\|_s \leq c|\varepsilon|\|u\|_s, \quad \|\mathfrak{F}u\|_{s+1} \leq c|\varepsilon|\|u\|_s$$

$$\|(\mathfrak{S}^{\pm 1} - \mathbb{I})u\|_s + \|(\mathfrak{T}^{\pm 1} - \mathbb{I})u\|_s \leq c|\varepsilon|\|u\|_s.$$

Les détails de la preuve pour ce qui concerne les estimations, sont contenus dans [11].

8 Inversion de l'opérateur linéaire

8.1 Inverse de $\mathfrak{L} + \mathfrak{V}$ sur $\{\ker \mathfrak{L}_c\}^\perp$

L'opérateur $\mathfrak{L} + \mathfrak{V}$ dépend de (ρ, ν) et du point d'itération W_q , obtenu comme indiqué à la section 5.5. On a vu qu'on doit obtenir à chaque itération

$$W_q = (\check{U}_q, \check{\mathcal{W}}_q, \check{\mu}_q, \check{\mathbf{u}}_q)$$

en fonction de $(\rho, \nu) \in \omega_{\varepsilon_0}$, où $|\varepsilon|^m$ est analytique en fonction de (ρ, ν) si m est pair, et où

$$U = U_{2m}(\varepsilon) + |\varepsilon|^m \check{U}_q, \quad X = X_{2m} + |\varepsilon|^m \check{\mathcal{W}}_q, \quad \mu = \mu_{2m} + |\varepsilon|^m \check{\mu}_q, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_{2m} + |\varepsilon|^m \check{\mathbf{u}}_q.$$

On a ainsi la matrice définie positive \mathbb{A} définie en (6.6) qui dépend également de q et qui s'écrit

$$\mathbb{A}_q = \begin{pmatrix} b_q & a_q \\ a_q & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

avec

$$\mathbb{A}_c = \begin{pmatrix} b_c & a_c \\ a_c & 1 \end{pmatrix}, \quad b_c = \nu_c^2, \quad a_c = -\nu_c \sin \theta_1,$$

où on a vu que $\sin \theta_1$ s'écrit en fonction de λ et ν_c . On fait alors l'hypothèse suivante, qu'il conviendra de vérifier lors des itérations successives:

Hypothèse 8.1 *On suppose que $r \geq 26$ et $c > 0$ sont tels que*

$$\begin{aligned} & \|\check{U}_q\|_{C^r(\mathbb{R}^2/\Gamma')} + \|\check{\mathcal{W}}_q\|_{C^r(\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2)} + |\check{\omega}_q| + |\check{\mu}_q| \leq c, \\ & \|\check{U}_q - \check{U}_{q+1}\|_{C^r(\mathbb{R}^2/\Gamma')} + \|\check{\mathcal{W}}_q - \check{\mathcal{W}}_{q+1}\|_{C^r(\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2)} + \\ & \quad + |\check{\omega}_q - \check{\omega}_{q+1}| + |\check{\mu}_q - \check{\mu}_{q+1}| \leq c2^{-q}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

et pour tout $(\rho, \nu), (\rho', \nu) \in \omega_{\varepsilon_0}$,

$$\begin{aligned} & \|\check{U}_q(\rho, \nu) - \check{U}_q(\rho', \nu)\|_{C^r(\mathbb{R}^2/\Gamma')} + \|\check{\mathcal{W}}_q(\rho, \nu) - \check{\mathcal{W}}_q(\rho', \nu)\|_{C^r(\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2)} + \\ & \quad + |\check{\omega}_q(\rho, \nu) - \check{\omega}_q(\rho', \nu)| + |\check{\mu}_q(\rho, \nu) - \check{\mu}_q(\rho', \nu)| \leq c|\rho - \rho'|. \end{aligned} \quad (8.3)$$

On montre alors que si l'hypothèse 8.1 est vérifiée, alors pour tout $(\rho, \nu) \in \omega_{\varepsilon_0}$ et m pair, les nombres réels a_q, b_q , définis par (8.1), sont de la forme

$$a_q = a_{2m}^{(0)}(\rho, \nu) + |\varepsilon|^m \check{a}_q(\rho, \nu), \quad b_q = b_{2m}^{(0)}(\rho, \nu) + |\varepsilon|^m \check{b}_q(\rho, \nu), \quad (8.4)$$

où $a_{2m}^{(0)}(\lambda, \nu_c) = a_c$ et $b_{2m}^{(0)}(\lambda, \nu_c) = b_c$. De plus, les fonctions $\check{\rho}, \check{\nu}, \check{a}_q, \check{b}_q$ vérifient les estimations

$$\begin{aligned} & |\check{a}_q| + |\check{b}_q| \leq c, \quad |\check{a}_q - \check{a}_{q+1}| + |\check{b}_q - \check{b}_{q+1}| \leq \frac{c}{2^q} \\ & |\check{a}_q(\rho', \nu) - \check{a}_q(\rho, \nu)| + |\check{b}_q(\rho', \nu) - \check{b}_q(\rho, \nu)| \leq c|\rho' - \rho|. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Les symboles $V_q(\mathbf{k})$ sont des fonctions homogènes d'ordre 0 en $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, telles que

$$V_q(\mathbf{k}) = V_{2m}^{(0)}(\rho, \nu, \mathbf{k}) + |\varepsilon|^m \check{V}_q(\rho, \nu, \mathbf{k}).$$

De plus, ces fonctions sont régulières en \mathbf{k} et pour tout $\gamma \geq 0$,

$$\begin{aligned} & |\partial_{\mathbf{k}}^\gamma V_q(\mathbf{k})| \leq c|\mathbf{k}|^{-\gamma} |\varepsilon|^2, \\ & |\partial_{\mathbf{k}}^\gamma \check{V}_q(\rho', \nu, \mathbf{k}) - \partial_{\mathbf{k}}^\gamma \check{V}_q(\rho, \nu, \mathbf{k})| \leq c|\mathbf{k}|^{-\gamma} |\rho' - \rho|, \\ & |\check{V}_{q+1}(\rho, \nu, \mathbf{k}) - \check{V}_q(\rho, \nu, \mathbf{k})| \leq \frac{c}{2^q}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

où c ne dépend pas de \mathbf{k} ni de q . Le résultat principal de cette section est le

Theorème 8.2 *Supposant que l'Hypothèse 8.1 soit vérifiée, alors pour tout $\alpha \in (0, 1/2)$, il existe $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^{+2}$ de mesure pleine, tel que pour $\tau \in \mathcal{T}$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout ν éligible (tel que l'intervalle $\omega_{\epsilon_0}|_\nu$ ne soit pas vide), il existe un sous-ensemble $\mathcal{E}_1(\nu)$ de \mathbb{R} tel que*

(i) $\mathcal{E}_1(\nu) \times \{\nu\} \subset \omega_{\epsilon_0}|_\nu$ vérifie uniformément par rapport à ν

$$\frac{1}{\text{mes}(\omega_{\epsilon_0}|_\nu)} \text{mes}\{\mathcal{E}_1(\nu) \cap \{|\lambda - \rho| \leq \epsilon\}\} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 1.$$

(ii) Pour $\rho \in \mathcal{E}_1(\nu)$ on a

$$\begin{aligned} |k_1 + \rho k_2| &\geq d|\mathbf{k}|^{-1-\alpha}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{S}_{triv} \\ |\nu(k_1 + \rho k_2)^2 - (\mathbb{A}_q \tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{k}})^{1/2} - V_q(\mathbf{k})| &\geq d|\mathbf{k}|^{-1/2-\alpha}. \end{aligned}$$

On en déduit pour l'inverse de $\mathfrak{L} + \mathfrak{V}$ sur $\{\ker \mathfrak{L}_c\}^\perp$ la même estimation que pour l'inverse de \mathfrak{L}_c :

$$\|(\mathfrak{L}_q + \mathfrak{V}_q)^{-1} f\|_{s-1} \leq c \|f\|_s, \quad f \in \{\ker \mathfrak{L}_c\}^\perp \cap H_{impair}^s.$$

Preuve. Le symbole de $\mathfrak{L}_q + \mathfrak{V}_q$ s'écrit

$$\Phi_q(\rho, \nu, k_1, k_2) \stackrel{def}{=} -\nu(k_1 + \rho k_2)^2 + \{k_2^2 + 2a_q k_2(k_1 + \rho k_2) + b_q(k_1 + \rho k_2)^2\}^{1/2} + V_q(\mathbf{k}),$$

où a_q, b_q, V_q vérifient les conditions énoncées plus haut. Le but est, pour ν éligible fixé, de borner l'ensemble des "mauvais" ρ uniformément par rapport à l'ordre q de l'itération. Procédons comme pour le Théorème 6.2, et considérons l'équation

$$\Phi_q(\rho, \nu, k_1, k_2) = \omega. \tag{8.7}$$

Pour $|k_2| > M$, M assez grand, et $\rho \in (0, N)$, on a $|\rho + \frac{k_1}{k_2}|$ d'ordre $O(1/k_2^{1/2})$, et $|k_1| < 2N|k_2|$. Sans nuire à la généralité on peut supposer $k_2 > 0$, $k_1 < 0$. Alors on a deux équations pour ρ de la forme

$$\rho_\pm = -\frac{k_1}{k_2} \pm \frac{1}{(\nu k_2)^{1/2}} \left[\left\{ 1 + 2a_q \left(\rho_\pm + \frac{k_1}{k_2} \right) + b_q \left(\rho_\pm + \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \right\}^{1/2} + \frac{(V_q - \omega)}{k_2} \right]^{1/2},$$

qu'on peut résoudre par le théorème des fonctions implicites pour M assez grand. On obtient ainsi ρ_\pm fonctions régulières de (ν, a_q, b_q, V_q) :

$$\rho_\pm = \tilde{\Lambda}_\pm(\nu, k_1, k_2, \omega, a_q, b_q, V_q), \tag{8.8}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\pm &= -\frac{k_1}{k_2} \pm \frac{1}{(\nu k_2)^{1/2}} + \frac{a_q}{2\nu k_2} \pm \left(\frac{(2b_q - a_q^2)}{8\nu^{3/2}} + \frac{(V_q - \omega)}{2\nu^{1/2}} \right) \frac{1}{k_2^{3/2}} + \\ &+ \frac{1}{k_2^2} R(a_q, b_q, V_q, \omega, k_2), \end{aligned} \tag{8.9}$$

où R est borné et régulier en ω , et en a_q, b_q, V_q qui sont Lipschitz en (ρ_\pm, ν) comme vu plus haut.

Pour q et ω fixés, les équations $\rho_\pm = \tilde{\Lambda}_\pm(\nu, k_1, k_2, \omega, a_q, b_q, V_q)$ peuvent être résolues par rapport à ρ_\pm par un argument de point fixe, ce qui définit

$$\rho_\pm = \Lambda_{q\pm}(\nu, k_1, k_2, \omega),$$

continument dérivable par rapport à ω . Ceci définit un ensemble dénombrable de courbes dans le plan $(\rho, \nu) \in \omega_{\epsilon_0}$. A partir de (8.9) on a

$$\frac{\partial \Lambda_{q\pm}}{\partial \omega} = \mp \frac{1}{2\nu^{1/2}k_2^{3/2}} + O\left(\frac{1}{k_2^2}\right).$$

Pour $\alpha > 0$, on considère la famille de courbes telles que

$$|\omega| \leq \frac{d}{|k_2|^{\alpha+1/2}}. \quad (8.10)$$

L'expression (8.9) montre que pour (q, k_1, k_2) fixé, les courbes $\rho_{\pm} = \Lambda_{q\pm}(\nu, k_1, k_2, \omega)$ sont contenues dans une bande, centrée sur la courbe obtenue pour $\omega = 0$, d'épaisseur uniformément bornée dans l'ouvert $(\rho, \nu) \in \omega_{\epsilon_0}$ par

$$|\delta\rho_{\pm}| \leq \frac{cd}{|k_2|^{2+\alpha}}, \quad (8.11)$$

où c est une constante indépendante de (q, k_1, k_2) pourvu que $|k_2| > M$.

Concernant l'influence des itérations successives, grâce à (8.5), (8.6) et (8.9), on obtient pour (k_1, k_2, ω) fixé

$$|\Lambda_{(q+1)\pm} - \Lambda_{q\pm}| \leq \frac{c}{2^q} \frac{|\varepsilon|^m}{k_2}$$

où c est indépendant de $(q, k_1, k_2, \nu, \omega)$, pourvu que ν soit voisin de ν_c et $|k_2| > M$.

Définissons K_{k_2} le nombre défini par

$$K_{k_2} = \frac{(1 + \alpha) \ln k_2}{\ln 2},$$

alors, pour (k_1, k_2) fixé, la largeur totale des bandes courbes contenant les courbes $\rho_{\pm} = \Lambda_{q\pm}(\nu, k_1, k_2, \omega)$ pour $q > K_{k_2}$ est bornée par

$$\sum_{q > K_{k_2}} \frac{c}{2^q} \frac{|\varepsilon|^m}{k_2} = c \frac{|\varepsilon|^m}{k_2 2^{K_{k_2}}} = c \frac{|\varepsilon|^m}{k_2^{2+\alpha}}.$$

Ainsi, pour $q > K_{k_2} = q_0$ et ω vérifiant (8.10) pour (k_1, k_2) fixé, toutes les courbes $\rho_{\pm} = \Lambda_{q\pm}(\nu, k_1, k_2, \omega)$ se trouvent dans une mince région courbée du plan (ρ, ν) , d'épaisseur

$$\frac{c}{k_2^{2+\alpha}} (d + |\varepsilon|^m),$$

et contenant la courbe $\rho_{\pm} = \Lambda_{q_0\pm}(\nu, k_1, k_2, 0)$. Pour $q \leq K_{k_2} = q_0$ on estime l'épaisseur totale des bandes associées aux courbes qui restent, par

$$\frac{cdK_{k_2}}{|k_2|^{2+\alpha}} = \frac{(1 + \alpha)cd}{\ln 2} \frac{\ln k_2}{k_2^{2+\alpha}}.$$

Pour (k_1, k_2) fixé, l'épaisseur totale des "mauvaises" bandes est alors bornée par une quantité indépendante de ν au voisinage de ν_c :

$$\frac{c' \ln |k_2|}{|k_2|^{2+\alpha}}.$$

Maintenant, on va estimer l'épaisseur totale des mauvaises bandes pour $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, $|k_2| > M$, sans oublier que (8.7) implique $|k_1| < 2N|k_2|$ et que grâce à (8.9), si

$$|\rho_{\pm} - \lambda| + |\nu - \nu_c| \leq r,$$

alors les valeurs pertinentes de k_2 sont telles que pour N assez grand (voir (8.11))

$$k_2^{2+\alpha} \geq c/r.$$

De plus, (8.9) montre que pour N assez grand

$$\frac{\partial(k_2 \Lambda_{q_{\pm}})}{\partial k_1} = -1 + O(|\varepsilon|^m),$$

d'où $|\Lambda_{q_{\pm}} - \lambda| \leq r$ donne

$$||k_1| - g(|k_2|)| \leq cr|k_2|,$$

où $g(|k_2|)$ ne dépend pas de k_1 . Ainsi la largeur totale des mauvaises bandes est bornée par

$$\sum_{||k_1| - g(|k_2|)| < cr|k_2|, |k_2| > c/r^{(2+\alpha)^{-1}}} \frac{c' \ln |k_2|}{|k_2|^{2+\alpha}} \leq \sum_{|k_2| > c/r^{(2+\alpha)^{-1}}} \frac{2rcc' \ln |k_2|}{|k_2|^{1+\alpha}} \leq c'' r^{\kappa},$$

avec

$$1 < \kappa = 1 + \frac{\alpha'}{2+\alpha}, \quad \alpha' = \alpha/2.$$

Il en résulte que pour ν fixé dans un voisinage de ν_c , il existe un ensemble $\mathcal{E}'_N(\nu)$ tel que pour $\rho \in \mathcal{E}'_N(\nu)$ on a l'estimation suivante uniformément en q :

$$|\Phi_q(\rho, \nu, k_1, k_2)| \geq \frac{d}{k_2^{\alpha+1/2}},$$

et choisissant $\nu \in \omega_{\varepsilon}|_{\rho} \neq \emptyset$, la mesure de $\mathcal{E}'_N(\nu) \cap \omega_{\varepsilon}|_{\nu}$ est au moins $\text{mes}(\omega_{\varepsilon}|_{\nu}) - c''\varepsilon^{\kappa}$. Puisque la mesure de $\omega_{\varepsilon}|_{\nu}$ est d'ordre ε ceci termine la preuve du théorème. ■

8.2 Résolution de $\{\Pi(\mathcal{L} + \mathfrak{B} + \mathfrak{F})\Pi + (\mathbb{I} - \Pi)(\mathcal{L} + \mathfrak{B})\}u = f$

Théorème 8.3 *Supposant que l'Hypothèse 8.1 soit vérifiée, alors pour $\tau \in \mathcal{T}$, $(\rho, \nu) \in \omega_{\varepsilon}$, $\rho \in \mathcal{E}_1(\nu)$, $1 \leq s \leq r - 25$, $0 < \delta < 1$, $\delta < \varepsilon_1/\varepsilon_2 < \delta^{-1}$, et $f \in H_{\text{impair}}^s$, on a une solution unique $u \in H_{\text{impair}}^{s-1}$ de*

$$\{\Pi(\mathcal{L} + \mathfrak{B} + \mathfrak{F})\Pi + (\mathbb{I} - \Pi)(\mathcal{L} + \mathfrak{B})\}u = f.$$

De plus, on a l'estimation

$$\|u\|_{s+l-1} \leq c|\varepsilon|^{-2} \{ \|f\|_{s+l} + E_l \|f\|_s \}$$

où c ne dépend que de τ, r, δ, s et $l \geq 0$, et où E_l est défini par

$$E_l = \|\eta\|_{C^{r+l}(\mathbb{R}^2/\Gamma')} + \|\psi\|_{C^{r+l}(\mathbb{R}^2/\Gamma')} + \|X - \mathbb{T}^{-1}\|_{C^{r+l}(\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2)}. \quad (8.12)$$

Preuve. On décompose les espaces H_{impair}^s de la façon suivante

$$u = u_0 + u_1 + u_2, \quad \Pi u = u_0 + u_1, \quad P_0 u = u_0 \in \ker \mathcal{L}_c, \quad Q_0 u = u_1$$

ce qui donne le système

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} + \mathfrak{V} + P_0\mathfrak{F})u_0 + P_0\mathfrak{F}u_1 &= P_0f \\ (\mathcal{L} + \mathfrak{V} + Q_0\mathfrak{F})u_1 + Q_0\mathfrak{F}u_0 &= Q_0f \\ (\mathbb{I} - \Pi)(\mathcal{L} + \mathfrak{P})u_2 + (\mathbb{I} - \Pi)\mathfrak{P}(u_0 + u_1) &= (\mathbb{I} - \Pi)f. \end{aligned}$$

(i) On résout d'abord les deux dernières équations par rapport à (u_1, u_2) , puis (ii) en écrivant $u_0 = \gamma_1 \sin y_1 + \gamma_2 \sin y_2$ ($\ker \mathcal{L}_c$ est maintenant de dimension 2 car u est impair), on obtient pour la première équation, un système où l'opérateur agissant sur u_0 est de la forme

$$(P_0\mathcal{L}^{(2)}P_0 - P_0\mathcal{L}^{(1)}\tilde{\mathcal{L}}_c^{-1}\mathcal{L}^{(1)}P_0)u_0, \quad (8.13)$$

où $\mathcal{L}^{(1)}$ et $\mathcal{L}^{(2)}$ sont respectivement les termes de degrés 1 et 2 en $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dans le développement en puissances de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de l'opérateur linéaire

$$\Pi(\mathcal{L} + \mathfrak{V} + \mathfrak{F})\Pi + (\mathbb{I} - \Pi)(\mathcal{L} + \mathfrak{P}) = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(3)}.$$

Un simple examen des harmoniques montre que les deux composantes de l'opérateur (8.13) sont de la forme

$$\begin{aligned} (a'_1\varepsilon_1^2 + a''_1\varepsilon_2^2)\gamma_1 + b'_1\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma_2 + h.o.t. \\ a'_2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma_1 + (b'_2\varepsilon_2^2 + b''_2\varepsilon_1^2)\gamma_2 + h.o.t., \end{aligned}$$

puis un calcul détaillé (voir [11]) montre que a''_1 et b''_2 sont nuls. Ainsi, le système réduit de dimension 2 est résoluble en (γ_1, γ_2) pourvu que $a'_1b'_2 - a'_2b'_1 \neq 0$. Cette condition analytique sur (τ_1, τ_2) est réalisée pour $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T}$ (quitte à redéfinir \mathcal{T} si nécessaire). L'estimation du Théorème est alors facile à obtenir. ■

8.3 Inversion de $(\partial_{(U, X, \mu, \mathbf{u})}\tilde{\mathcal{F}})^{-1}$

Une fois résolue l'équation (6.5) par rapport à $\tilde{\delta\phi} = u$, grâce aux Théorèmes 8.3 et 7.2, on est capable d'inverser le système (6.1) en utilisant l'inversion de (6.4). On obtient finalement le résultat suivant

Théorème 8.4 *On suppose que l'Hypothèse 8.1 soit vérifiée, et on choisit $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T}$, $(\rho, \nu) \in \omega_\varepsilon$, $\rho \in \mathcal{E}_1(\nu)$, $9 \leq s \leq r - 25$, $0 < \delta < 1$, $\delta < \varepsilon_1/\varepsilon_2 < \delta^{-1}$, et*

$$(f, g, h) \in H_{\text{impair}}^{s+l} \times H_{\text{pair}}^{s+l} \times \{H_{\text{pair}}^{s+l}\}^2,$$

avec un certain $l \geq 0$. Alors le système

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}(\tilde{\delta\phi}) - \frac{1}{H}\mathcal{D}(\tilde{\delta\eta}) - q_1\tilde{\delta\eta} - \mathbf{q}_2 \cdot \delta\mathbf{u} &= f \\ \frac{1}{H}\mathcal{D}(\tilde{\delta\phi}) + \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\delta\eta} + \mathbf{q}_3 \cdot \delta\mathbf{u} + \tilde{\eta}\delta\mu &= g \\ \mathcal{D}v - \frac{1}{3}(\nabla \cdot v)\boldsymbol{\rho} + \frac{\delta\mu}{3\tilde{\mathbf{a}}}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{T}[X'^*\delta\mathbf{u} + \nabla(\tilde{\delta\phi}), \tilde{\delta\eta}] &= X'^{-1}h, \end{aligned}$$

a une solution unique

$$(\tilde{\delta\phi}, \tilde{\delta\eta}, v, \delta\mu, \delta\mathbf{u}) \in H_{\text{impair}}^{s+l-2} \times H_{\text{pair}}^{s+l-3} \times \{H_{\text{impair}}^{s+l-9}\}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

De plus, celle-ci vérifie l'estimation suivante:

$$\|\tilde{\delta\phi}\|_{s+l-2} + \|\tilde{\delta\eta}\|_{s+l-3} + \|v\|_{s+l-9} + |\delta\mu| + \|\delta\mathbf{u}\| \leq \frac{c}{|\varepsilon|^2}(\|f, g, h\|_{s+l} + E_l\|f, g, h\|_s),$$

où E_l est défini en (8.12).

9 Théorème d'existence

Le résultat principal de ces notes, montrant l'existence des vagues non symétriques est donné par le théorème suivant:

Théorème 9.1 *Soient $l \geq 34$, m pair ≥ 4 , et $0 < \delta < 1$. Il existe un ensemble de mesure pleine $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^{+2}$ tel que pour $\tau \in \mathcal{T}$, il existe un sous-ensemble $\mathcal{E}(\tau)$ du quadrant $\{(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2) \in \mathbb{R}^{+2}\}$ pour lequel 0 est un point de Lebesgue, i.e.*

$$\frac{2}{\varepsilon^2} \text{mes}(\mathcal{E}(\tau) \cap \{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < \varepsilon\}) \rightarrow 1 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

De plus, pour $\delta < \varepsilon_1/\varepsilon_2 < \delta^{-1}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{E}(\tau)$, le système non linéaire (1.4, 1.5) a une solution unique $(U, \mu, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_{(S)}^l \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$ de la forme

$$U = U_{2m} + |\varepsilon|^m \check{U}(\varepsilon), \quad \mu = \mu_{2m} + |\varepsilon|^m \check{\mu}(\varepsilon), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_{2m} + |\varepsilon|^m \check{\mathbf{u}}(\varepsilon).$$

Remarque 9.2 *Dans le cas $\tau_1 = \tau_2$, et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ on a un résultat analogue avec $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ et en remplaçant $(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2) \in \mathcal{E}(\tau)$ par $\varepsilon_1^2 \in \mathcal{E}(\tau_1) \subset \mathbb{R}^+$ pour lequel 0 est point de Lebesgue.*

Pour démontrer le Théorème 9.1 on utilise le processus itératif indiqué à la section 5.5, où on exploite une version du théorème des fonctions implicites de Nash-Moser, démontrée dans [9]. Il s'agit de résoudre l'équation

$$\Phi(W, \gamma) = 0 \tag{9.1}$$

dans des échelles d'espace de Banach E_s et F_s paramétrés par $s \in \mathbb{N}$, et munis des normes $\|\cdot\|_s$ and $|\cdot|_s$. On suppose que ces espaces vérifient les conditions suivantes:

(A1) Pour $t < s$ il existe $c(t, s)$ tel que

$$\|\cdot\|_t \leq c(t, s) \|\cdot\|_s, \quad |\cdot|_t \leq c(t, s) |\cdot|_s.$$

(A2) Pour $\lambda \in [0, 1]$ avec $\lambda t + (1 - \lambda)s \in \mathbb{N}$,

$$\|\cdot\|_{\lambda t + (1 - \lambda)s} \leq c(t, s) \|\cdot\|_t^\lambda \|\cdot\|_s^{1 - \lambda}, \quad |\cdot|_{\lambda t + (1 - \lambda)s} \leq c(t, s) |\cdot|_t^\lambda |\cdot|_s^{1 - \lambda}.$$

(A3) Il existe une famille d'opérateurs régularisants S_φ définis sur les espaces E_s , tels que pour $\varphi > 0$ et $t < s$,

$$\begin{aligned} \|S_\varphi W\|_t &\leq c(t, s) \|W\|_s, & \|S_\varphi W\|_s &\leq c(t, s) \varphi^{t-s} \|W\|_t, \\ \|S_\varphi W - W\|_t &\leq c(t, s) \varphi^{s-t} \|W\|_s, \end{aligned}$$

et si $|\gamma| \mapsto \varphi(|\gamma|)$ est une fonction régulière croissante et convexe sur $[0, \infty)$ avec $\varphi(0) = 0$, alors, pour $0 < \gamma_1 < \gamma_2$,

$$\|(S_{\varphi(\gamma_1)} - S_{\varphi(\gamma_2)})W\|_s \leq c(t, s) |\gamma_1 - \gamma_2| \varphi'(\gamma_2) \varphi(\gamma_1)^{t-s-1} \|W\|_t.$$

(B1) L'opérateur $\Phi(\cdot, \gamma)$, dépend d'un paramètre $\gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0]$, et envoie un voisinage de 0 de E_r dans F_q . On suppose qu'il existe

$$\sigma \leq q \leq r - 1, \quad \sigma, q, r \in \mathbb{N},$$

et pour tout $l \in \mathbb{N}$, des nombres $c(l) > 0$ et $\gamma(l) \in [-\gamma_0, \gamma_0]$ avec les propriétés suivantes pour tout $W, U, W_i, U_i \in B$ et $\gamma, \gamma_i \in [-\gamma_0, \gamma_0]$, $i = 1, 2$, où $B = \{W \in E_r : |W|_r \leq R_0\}$ pour un certain $R_0 > 0$:

(B2) L'opérateur $\Phi : B \times [-\gamma_0, \gamma_0] \rightarrow F_q$ est deux fois continument différentiable,

$$|\Phi(W, \gamma)|_{q+l} \leq c(l)(1 + \|W\|_{r+l}) \quad (9.2)$$

et, pour $W, U \in E_{r+l}$, $\gamma \in [-\gamma(l), \gamma(l)]$, si on définit

$$D(W, U, \gamma) = \Phi(W, \gamma) - \Phi(U, \gamma) - \Phi'_W(U, \gamma)(W - U),$$

alors

$$\begin{aligned} |D(W, U, \gamma)|_{q+l} &\leq c(l)(1 + \|W\|_{r+l} + \|U\|_{r+l})\|W - U\|_r^2 + \\ &+ c(l)\|W - U\|_r\|W - U\|_{r+l}, \end{aligned} \quad (9.3)$$

et

$$\begin{aligned} |D(W_1, U_1, \gamma_1) - D(W_2, U_2, \gamma_2)|_q &\leq c(|\gamma_1 - \gamma_2| + \|W_1 - W_2\|_r + \|W_1 - W_2\|_r) \\ &\cdot (\|W_1 - U_1\|_r + \|W_2 - U_2\|_r). \end{aligned} \quad (9.4)$$

(B3) Il existe une famille d'opérateurs linéaires bornés $\Lambda(W, \gamma) : E_r \rightarrow F_q$, dépendant de $(W, \gamma) \in B \times [-\gamma_0, \gamma_0]$, avec

$$|\Lambda(W, \gamma)U|_q \leq c(0)\|U\|_r, \quad U \in E_r, \quad (9.5)$$

qui approche la dérivée Φ'_W au sens suivant: pour $W \in E_{r+l} \cap B$, $\gamma \in [-\gamma(l), \gamma(l)]$ et $U \in E_{r+l}$,

$$\begin{aligned} |\Lambda(W, \gamma)U - \Phi'_W(W, \gamma)U|_{q+l} &\leq c(l)(1 + \|W\|_{r+l})|\Phi(W, \gamma)|_r\|U\|_r + \\ &+ c(l)|\Phi(W, \gamma)|_{r+l}\|U\|_r + c(l)|\Phi(W, \gamma)|_r\|U\|_{r+l}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

(B4) Pour $W_i \in B \cap E_{r+l}$, $\gamma_i \in [-\gamma(l), \gamma(l)]$, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} |\Phi(W_1, \gamma_1) - \Phi(W_2, \gamma_2)|_{q+l} &\leq c(l)(1 + \|W_1\|_{r+l} + \|W_2\|_{r+l}) \\ &\cdot (|\gamma_1 - \gamma_2| + \|W_1 - W_2\|_r) + c(l)\|W_1 - W_2\|_{r+l}, \end{aligned} \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} |(\Phi'_W(W_1, \gamma_1) - \Phi'_W(W_2, \gamma_2))U|_{q+l} + |(\Lambda(W_1, \gamma_1) - \Lambda(W_2, \gamma_2))U|_{q+l} &\leq \\ \leq c(l) \left(\|W_1 - W_2\|_{r+l} + (|\gamma_1 - \gamma_2| + \|W_1 - W_2\|_r)(\|W_1\|_{r+l} + \|W_2\|_{r+l}) \right) \|U\|_r \\ + (|\gamma_1 - \gamma_2| + \|W_1 - W_2\|_r) \|U\|_{r+l}, \end{aligned}$$

- On dit que $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ est dense en 0, si $\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{2r} \text{mes}(\mathcal{E} \cap [-r, r]) = 1$.

(B5) Soit une application $\vartheta : [-\gamma(l), \gamma(l)] \rightarrow B \cap E_{r+l}$ Lipschitzienne. Alors, il existe $\mathcal{E}(\vartheta) \subset [-\gamma(l), \gamma(l)]$, dense en 0, tel que pour tout $\gamma \in \mathcal{E}(\vartheta)$ et $f \in F_{q+l}$, l'équation $\Lambda(\vartheta(\gamma), \gamma)\delta W = f$ a une solution unique telle que

$$\|\delta W\|_{q-\sigma+l} \leq \frac{1}{|\gamma|} c(l)(\|f\|_{q+l} + \|\vartheta(\gamma)\|_{r+l}\|f\|_q). \quad (9.8)$$

Théorème 9.3 *On suppose que les conditions (A1)–(B5) sont réalisées et que pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, l'équation (9.1) a une solution approchée $W = W_N(\gamma) \in \cap_{s \in \mathbb{N}} E_s$, avec, pour un certain $k(N, s)$,*

$$\|W_N(\gamma)\|_s \leq k(N, s)|\gamma|, \quad |\Phi(W_N(\gamma), \gamma)|_s \leq k(N, s)|\gamma|^{N+1}, \quad (9.9)$$

et

$$\|W_N(\gamma_1) - W_N(\gamma_2)\|_s \leq k(N, s)|\gamma_1 - \gamma_2|. \quad (9.10)$$

Alors, il existe un ensemble \mathcal{E} , dense en 0, et une famille de solutions de (9.1)

$$\{W = \vartheta(\gamma) : \gamma \in \mathcal{E}\} \subset E_r$$

avec $\|\vartheta(\gamma_1) - \vartheta(\gamma_2)\|_r \leq c|\gamma_1 - \gamma_2|$ pour une certaine constante c .

Preuve. Afin d'appliquer le Théorème 9.3 à la résolution du système $\tilde{\mathcal{F}}(U, X, \rho, \nu, \mu, \mathbf{u}) = 0$, on choisit $\tau \in \mathcal{T}$ et on définit

$$\begin{aligned} E_s &= \mathbb{H}_{(S)}^s \times (H_{impair}^s)^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \\ F_s &= \mathbb{H}_{(S)}^{s-1} \times (H_{pair}^{s-1})^2. \end{aligned}$$

La perturbation $W = (\check{U}, \check{W}, \check{\mu}, \check{\mathbf{u}})$ est définie à la section 5.5, et Φ est défini par

$$\Phi(W, \gamma) = \frac{1}{|\varepsilon|^m} \tilde{\mathcal{F}}(U_{2m} + |\varepsilon|^m \check{U}, X_{2m} + |\varepsilon|^m \check{W}, \lambda + \gamma, \nu, \mu_{2m} + |\varepsilon|^m \check{\mu}, \mathbf{u}_{2m} + |\varepsilon|^m \check{\mathbf{u}})$$

où on a remplacé $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ par (ρ, ν) en utilisant le difféomorphisme $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mapsto (\rho_{2m}(\varepsilon), \nu_{2m}(\varepsilon))$ de l'ouvert

$$\{\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \delta < \varepsilon_1/\varepsilon_2 < 1/\delta, \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < \epsilon_0\} \subset \mathbb{R}^{+2}$$

dans l'ouvert de forme triangulaire curviligne dans \mathbb{R}^2 , dont un sommet est (λ, ν_c) (voir la Figure 4). Ce difféomorphisme existe pour $\tau \in \mathcal{T}$ par construction, et la perte de régularité à l'origine en γ , due aux racines carrées, ne cause pas de problème ici, grâce au scaling qui donne une perturbation de l'ordre de $|\gamma|^m$, alors que nous avons seulement besoin d'être Lipschitz en γ . Alors, pour ν fixé éligible, voisin de ν_c , et γ voisin de 0, la fonction $\Phi(\cdot, \gamma)$ est une application régulière de E_s to F_{s-1} pour $s \geq 4$, et Φ est Lipschitzienne en γ au voisinage de 0. Un opérateur régularisant avec les propriétés requises peut être défini par (troncature de la série de Fourier à des ordres de plus en plus grands quand $\wp \rightarrow 0$)

$$\mathcal{S}_\wp u = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma} v(\wp|\mathbf{k}|) \hat{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot X},$$

où $v : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ est une fonction régulière qui vaut 1 sur $[0, 1]$ et 0 sur $[2, +\infty)$.

Par construction $W_N(\gamma) = 0$ avec $N = m$. D'où (9.9) et (9.10) sont vérifiées. On déduit de la régularité de Φ , que pour $10 \leq q \leq r - 24$, l'opérateur Φ vérifie les Conditions (B1) et (B2), et l'inégalité (9.7) de la Condition (B4). On note $\Lambda(W, \gamma)$ la différentielle approchée dont l'inversion est l'objet de (6.1). Les estimations (9.5) et (9.7) sont vérifiées pour $q \leq r - 1$ et le reste de la différentielle (détaillé dans [11]) vérifie (9.6) (on perd deux dérivées en W , une dérivée en Φ , et deux dérivées en δW , ce qui est OK avec $q \leq r - 1$). Ainsi, les Conditions (B3) et (B4) sont satisfaites. Pour appliquer le Théorème 8.4, nous devons vérifier l'Hypothèse 8.1, notamment (8.2). Cette propriété apparaît au cours de la démonstration du théorème 9.3 si on choisit de prendre $\wp_k(\gamma) = |\gamma|^{(3/2)^k}$ (voir [9]). Tenant compte du fait que $|\varepsilon|^2 \sim |\gamma| + |\nu - \nu_c|$, on applique maintenant le Théorème 8.4, et il apparaît que la Condition (B5), avec (9.8), est vérifiée avec $\sigma = 10$ et $r \geq q + 24$, $q \geq 10$. Noter que l'ensemble $\mathcal{E}_1(\nu)$ qui est dense en 0, est indépendant du point d'itération. Alors, le Théorème 9.3 s'applique, conduisant à l'existence d'une solution de $\Phi(W, \gamma) = 0$ dans E_r . Revenant aux variables U, μ, \mathbf{u} , et aux paramètres $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ au lieu de (ρ, ν) , donne le Théorème 9.1. ■

A Preuve du Lemme 5.1

En notant $\delta X = X'v$, on obtient

$$\mathcal{D}(\delta X) = X' \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla v + \sum_i v_i \boldsymbol{\rho} \nabla \partial_{y_i} X \quad \text{et} \quad D_X \mathbf{F}(X)[\delta X] = \sum_i v_i \mathbf{F}'(X) \partial_{y_i} X. \quad (\text{A.1})$$

D'autre part,

$$D_X |\det X'(Y)|[\delta X] = |\det X'(Y)| \operatorname{div} v + \sum_i v_i \partial_{y_i} |\det X'(Y)|,$$

se combine avec (A.1), et en utilisant l'identité

$$D_X (|\det X'|^\alpha \mathbf{F}(X))[\delta X] = \alpha |\det X'(Y)|^{\alpha-1} \{ D_X (|\det X'|)[\delta X] \} \mathbf{F} + |\det X'|^\alpha D_X \mathbf{F}[\delta X],$$

on aboutit à

$$\begin{aligned} D_X \mathcal{H}(X)[X'v] &= X' \mathcal{D}v - \frac{1}{3} \operatorname{div} v |\det X'|^{1/3} \mathbf{F} + \\ &+ \sum_i v_i \left(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \partial_{y_i} X - |\det X'|^{1/3} \mathbf{F}' \partial_{y_i} X - \frac{1}{3} |\det X'|^{-2/3} \partial_{y_i} (|\det X'|) \mathbf{F} \right) \\ &= X' \mathcal{D}v + v \cdot \nabla_Y \mathcal{H}(X) - \frac{1}{3} \operatorname{div} v |\det X'|^{1/3} \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Comme on a par définition

$$|\det X'|^{1/3} \mathbf{F}(X) = \mathcal{D}X - \mathcal{H}(X),$$

ceci conduit à (5.8) et le Lemme est démontré.

B Preuve de la Proposition 6.4

Soit $\delta \in (0, 1)$ tel que $(1 + \alpha)\delta > 1$, alors

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|\mathbf{k}|^{2(1+\alpha)\delta}} = S < \infty$$

et

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}, \quad \int_0^N \frac{dx}{|x + \frac{k_1}{k_2}|^\delta} \leq K_N.$$

Il en résulte que

$$\int_0^N \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|\mathbf{k}|^{2(1+\alpha)\delta} |x + \frac{k_1}{k_2}|^\delta} \leq SK_N,$$

et pour presque tout $\rho \in [-N, N]$

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|\mathbf{k}|^{2(1+\alpha)\delta} |\rho + \frac{k_1}{k_2}|^\delta} < \infty.$$

Une fois ρ choisi, il existe donc C tel que

$$|k_1 + \rho k_2| > \frac{C|k_2|}{|\mathbf{k}|^{2(1+\alpha)}}.$$

En considérant que les cas où $|\frac{k_1}{k_2}| > 2\rho$ donnent trivialement le résultat, il suffit de considérer les cas où $|\frac{k_1}{k_2}| \leq 2\rho$ et le résultat de la proposition s'en déduit.

C Preuve du Lemme 7.1

Le commutateur $\Pi\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\Pi$ est représenté, dans sa formulation Fourier par

$$((\Pi\widehat{\mathfrak{H}} - \widehat{\mathfrak{H}}\Pi)u)_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \widehat{H}(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{k})) (\chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{p}) - \chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{k})) \widehat{u}_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{p} \neq 0, \quad (\text{C.1})$$

où $\chi_{\mathcal{N}}$ est la fonction caractéristique de \mathcal{N} . On a $\chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{p}) - \chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{k}) \neq 0$ si et seulement si

$$\mathbf{p} \in \mathcal{N}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{N} \quad \text{ou} \quad \mathbf{k} \in \mathcal{N}, \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{N}. \quad (\text{C.2})$$

Ainsi, il existe \mathbf{x} dans l'intervalle $[\mathbf{p}, \mathbf{k}]$, tel que

$$|x_1 + \rho x_2| = \frac{1}{2\sqrt{\nu}} |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{x}}|^{1/2}.$$

Supposons maintenant que

$$|\mathbf{p} - \mathbf{k}| \leq \delta, \quad (\text{C.3})$$

où δ est précisé plus bas. On a $|\mathbf{p} - \mathbf{x}| \leq |\mathbf{p} - \mathbf{k}| \leq \delta$, d'où

$$|p_1 + \rho p_2| \leq |x_1 + \rho x_2| + |(p_1 - x_1) + \rho(p_2 - x_2)| \leq |x_1 + \rho x_2| + (1 + \rho)\delta.$$

Grâce au choix de \mathbf{x} on a donc

$$|p_1 + \rho p_2| \leq \frac{1}{2\sqrt{\nu}} |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{x}}|^{1/2} + (1 + \rho)\delta.$$

D'autre part, on a également

$$|\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{x}}|^{1/2} \leq |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{p}}|^{1/2} + |\mathbb{A}^{1/2}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{p}})|^{1/2} \leq |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{p}}|^{1/2} + \|\mathbb{A}\|^{1/4} (1 + \rho)^{1/2} \delta^{1/2},$$

qui donne alors

$$|p_1 + \rho p_2| \leq \frac{1}{2\sqrt{\nu}} |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{p}}|^{1/2} + (1 + \rho)\delta + \frac{1}{2\sqrt{\nu}} \|\mathbb{A}\|^{1/4} (1 + \rho)^{1/2} \sqrt{\delta}.$$

Choisissons $\delta > 0$ tel que

$$(1 + \rho)\delta + \frac{1}{2\sqrt{\nu}} \|\mathbb{A}\|^{1/4} (1 + \rho)^{1/2} \sqrt{\delta} \leq \frac{1}{4\sqrt{\nu}} |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{p}}|^{1/2}, \quad (\text{C.4})$$

ce qui est réalisé en prenant $\sqrt{\delta} \in [z_1, z_2]$, où z_i sont les racines du polynôme

$$z^2 + bz - d = 0, \quad b = \frac{1}{2(1 + \rho)^{1/2} \sqrt{\nu}} \|\mathbb{A}\|^{1/4}, \quad d = \frac{1}{4(1 + \rho) \sqrt{\nu}} |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{p}}|^{1/2}.$$

Puisque $z_1 < 0$ on peut choisir δ tel que

$$0 < \sqrt{\delta} \leq z_2 = \frac{1}{2} b \left(\sqrt{1 + \frac{4d}{b^2}} - 1 \right).$$

Enfin, comme $\mathbf{p} \neq 0$ (car nos opérateurs agissent sur des espaces de fonctions impaires), alors (p_j entiers)

$$|\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{p}}| \geq \inf_{|\mathbf{y}|=1} |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{y}}| > A_0 > 0,$$

d'où

$$\frac{4d}{b^2} \geq 4\sqrt{\nu} \sqrt{\frac{A_0}{\|\mathbb{A}\|}} := c_0$$

est indépendant de \mathfrak{H} et \mathbf{p} . Or, pour $z \geq c_0$ on a

$$\sqrt{1+z} - 1 \geq c_1 \sqrt{z} \quad \text{avec} \quad c_1 = \sqrt{1+c_0^{-1}} - c_0^{-1},$$

d'où

$$z_2 \geq \frac{1}{2} b c_1 \sqrt{\frac{4d}{b^2}} = c_1 \sqrt{d}.$$

Il en résulte que (C.4) est vérifiée si δ satisfait

$$\delta \leq c_1^2 \frac{1}{4(1+\rho)\sqrt{\nu}} |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{p}}|^{1/2} = c_2 |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{p}}|^{1/2}.$$

Finalement, pour tout $\mathbf{p}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ vérifiant (C.2) et l'inégalité

$$|\mathbf{p} - \mathbf{k}| \leq c_2 |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{p}}|^{1/2}, \quad (\text{C.5})$$

on a

$$|p_1 + \rho p_2| \leq \frac{3}{4\sqrt{\nu}} |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{p}}|^{1/2},$$

ce qui entraîne

$$L(\mathbf{p}) \geq \frac{7}{16} |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{p}}|. \quad (\text{C.6})$$

Pour $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ on note $\mathcal{K}(\mathbf{p}) \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, l'ensemble des points \mathbf{k} vérifiant (C.5). On définit alors les opérateurs \mathfrak{Y} et \mathfrak{Z} par

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathfrak{Y}u})_{\mathbf{p}} &= \frac{1}{L(\mathbf{p})} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}(\mathbf{p})} \widehat{H}(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{k})) (\chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{p}) - \chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{k})) \widehat{u}_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{p} \neq 0, \\ (\widehat{\mathfrak{Z}u})_{\mathbf{p}} &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{K}(\mathbf{p}) \cup \{0\}} \widehat{H}(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{k})) (\chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{p}) - \chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{k})) \widehat{u}_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{p} \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Il est clair que

$$\Pi \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \Pi = \mathfrak{Y} \mathfrak{L} + \mathfrak{Z},$$

et il reste à estimer les normes des opérateurs \mathfrak{Y} et \mathfrak{Z} . Par hypothèse sur la régularité de \mathfrak{H} on a, pour r choisi assez grand,

$$|\widehat{H}(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{k}))| \leq \frac{c_{\mathfrak{H}}}{(1 + |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)^r},$$

d'où

$$(1 + |\mathbf{p}|)^{s+1} |(\widehat{\mathfrak{Y}u})_{\mathbf{p}}| \leq c_{\mathfrak{H}} \frac{(1 + |\mathbf{p}|)^{s+1}}{|L(\mathbf{p})|} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}(\mathbf{p})} (1 + |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)^{-r} |\chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{p}) - \chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{k})| |\widehat{u}_{\mathbf{k}}|, \quad \mathbf{p} \neq 0.$$

Les relations (C.2) et (C.5) avec l'inégalité (C.6) donnent l'estimation

$$(1 + |\mathbf{p}|) \frac{1}{|L(\mathbf{p})|} |\chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{p}) - \chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{k})| \leq c \quad \text{pour} \quad \mathbf{k} \in \mathcal{K}(\mathbf{p}),$$

et pour tout entier $t \geq 0$

$$\frac{(1 + |\mathbf{p}|)^{t+1}}{|L(\mathbf{p})|} |\chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{p}) - \chi_{\mathcal{N}}(\mathbf{k})| \leq c(1 + |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)^t + c(1 + |\mathbf{k}|)^t \quad \text{pour } \mathbf{k} \in \mathcal{K}(\mathbf{p}),$$

où c est une constante générique dépendant de t . Ceci donne

$$(1 + |\mathbf{p}|)^{s+1} |(\widehat{\mathfrak{Y}}u)_{\mathbf{p}}| \leq cc_{\mathfrak{Y}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}(\mathbf{p})} ((1 + |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)^{-r} (1 + |\mathbf{k}|)^s + (1 + |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)^{-r+s}) |\widehat{u}_{\mathbf{k}}|, \quad \mathbf{p} \neq \mathbf{0}.$$

Par Cauchy-Schwarz sur chaque somme du membre de droite, on doit notamment majorer

$$\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}(\mathbf{p})} \frac{1}{(1 + |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)^{2(r-s)}},$$

et en comparant avec l'intégrale

$$\int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < c(1 + |\mathbf{x}|)^{1/2}} \frac{dx_1 dx_2 dy_1 dy_2}{(1 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^{2(r-s)}} \leq c' \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \frac{dx_1 dx_2}{(1 + |\mathbf{x}|)^{(r-s-1)}},$$

on conclut que pour $0 \leq s < r - 3$,

$$\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} (1 + |\mathbf{p}|)^{2s+2} |(\widehat{\mathfrak{Y}}u)_{\mathbf{p}}|^2 \leq cc_{\mathfrak{Y}}^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} (1 + |\mathbf{k}|)^{2s} |\widehat{u}_{\mathbf{k}}|^2,$$

qui donne l'estimation cherchée pour \mathfrak{Y} vraie si $s \in [0, r - 4]$.

Pour estimer \mathfrak{Z} on remarque que

$$|(\widehat{\mathfrak{Z}}u)_{\mathbf{p}}| \leq c_{\mathfrak{Z}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{K}(\mathbf{p}) \cup \{0\}} (1 + |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)^{-r} |\widehat{u}_{\mathbf{k}}|.$$

Puisque pour $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{K}(\mathbf{p}) \cup \{0\}$ et $\mathbf{p} \neq 0$, on a

$$|\mathbf{p} - \mathbf{k}| \geq c_2 |\mathbb{A}^{1/2} \tilde{\mathbf{p}}|^{1/2} \geq c(1 + |\mathbf{p}|)^{1/2}$$

et en utilisant encore

$$(1 + |\mathbf{p}|)^t \leq c(1 + |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)^t + c(1 + |\mathbf{k}|)^t,$$

on obtient

$$(1 + |\mathbf{p}|)^{s+1} |(\widehat{\mathfrak{Z}}u)_{\mathbf{p}}| \leq cc_{\mathfrak{Z}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{K}(\mathbf{p}) \cup \{0\}} ((1 + |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)^{-r+2} (1 + |\mathbf{k}|)^s + (1 + |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)^{-r+s+2}) |\widehat{u}_{\mathbf{k}}|.$$

Encore par Cauchy-Schwarz sur chaque somme du coté droit, et utilisant

$$\frac{1}{(1 + |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)^{2(r-s-2)}} \leq \frac{c}{(1 + |\mathbf{p} - \mathbf{k}|)^{\frac{2}{3}(r-s-2)}} \frac{1}{(1 + |\mathbf{p}|)^{\frac{2}{3}(r-s-2)}},$$

alors pour $0 \leq s < r - 5$

$$\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} (1 + |\mathbf{p}|)^{2s+2} |(\widehat{\mathfrak{Z}}u)_{\mathbf{p}}|^2 \leq cc_{\mathfrak{Z}}^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} (1 + |\mathbf{k}|)^{2s} |\widehat{u}_{\mathbf{k}}|^2$$

qui conduit au résultat souhaité pour \mathfrak{Z} .

References

- [1] W.Craig, D.Nicholls. Traveling gravity water waves in two and three dimensions. *EJMB/Fluids* **21** (2002) 615-641.
- [2] W.Craig, D.Nicholls. Travelling two and three-dimensional capillary gravity water waves. *SIAM J. Math. Anal.* **32** (2000) 323-359.
- [3] W.Craig, U.Schanz, C.Sulem. The modulational regime of three-dimensional water waves and the Davey-Stewartson system. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **14**, 5 (1997), 615-667.
- [4] R.Fuchs. On the theory of short-crested oscillatory waves. *U.S. Natl. Bur. Stand. Circ.* **521** (1952), 187-200.
- [5] B.Buffoni, M.Groves, S.M.Sun. Existence and conditional energetic stability of three-dimensional fully localised solitary gravity-capillary water waves. Preprint 2009.
- [6] M.Groves, M.Haragus. A bifurcation theory for three-dimensional oblique travelling gravity-capillary water waves. *J.Nonlinear Sci.* **13** (2003), 397-447.
- [7] J.Hammack, D.Henderson, H.Segur. Progressive waves with persistent, two-dimensional surface patterns in deep water. *J.Fluid Mech.* **532** (2005), 1-52.
- [8] B.Hu, D.Nicholls. Analyticity of Dirichlet-Neumann operators on Hölder and Lipschitz domains. *SIAM J. Math. Anal.* **37**, 1 (2005), 302-320.
- [9] G.Iooss, P.Plotnikov, J.Toland. Standing waves on an infinitely deep perfect fluid under gravity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **177** (2005), 3, 367-478.
- [10] G.Iooss, P.Plotnikov. Small divisor problem in the theory of three-dimensional water gravity waves. *Memoirs of AMS*, vol. 200, 940, 2009 (128p).
- [11] G.Iooss, P.Plotnikov. Asymmetrical three-dimensional gravity waves. Preprint 2009
- [12] D.Lannes. Well-posedness of the water-waves equations. *J.Amer. Math. Soc.* **18** (2005), 605-654.
- [13] T.Levi-Civita. Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. *Math. Annalen* **93** (1925), 264-314.
- [14] A.I.Nekrasov. On waves of permanent type. *Izv. Ivanovo-Voznesensk. Politekhn. Inst.*, **3** (1921), 52-65.
- [15] P.Plotnikov, J.Toland. Nash-Moser theory for standing waves. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **159** (2001), 1-83.
- [16] J.Reeder, M.Shinbrot. Three-dimensional, nonlinear wave interaction in water of constant depth. *Nonlinear Anal., T.M.A.*, **5** (1981), 3, 303-323.
- [17] L. Sretenskii. Spatial problem of determination of steady waves of finite amplitude (russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **89** (1953), 25-28.
- [18] G.G. Stokes. On the theory of oscillatory waves. *Trans. Camb. Phil. Soc.* **8** (1847), 441-455.
- [19] V.E.Zakharov. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **9** (1968), 86-94, *J.Appl. Mech. Tech. Phys.* **9** (1968) 190-194.