

Relaxation du système d'Euler isotherme avec amortissement vers l'équation de la chaleur

Stéphane Junca

Laboratoire J. A. Dieudonné, U.R.A. C.N.R.S. 168, Université de Nice,
Parc Valrose, B.P. 71, F-06108 Nice, Cédex 2, France
email : junca@gaston.unice.fr

13 Décembre 1996

Résumé : On étudie la convergence de solutions BV du système des équations d'Euler isothermes avec un coefficient d'amortissement, lorsque ce coefficient tend vers l'infini. On montre que la densité tend vers la solution de l'équation de la chaleur. Les estimations-clé sont obtenues à l'aide du schéma de Glimm. Le même type de résultat avait été obtenu dans [4] - par des techniques totalement différentes - pour des solutions régulières du p-système.

Relaxation of the Isothermal Euler equations with damping to the heat equation

Abstract: We consider the system of isothermal Euler Equations. For BV solutions, we show that the density converges to the solution to the heat equation when the friction coefficient ε^{-1} tends to infinity. The same type of results has been obtained in [4] - with totally different methods - for smooth solution to the p-system.

1 Introduction

On s'intéresse à des solutions faibles (pouvant présenter des chocs) du système d'Euler isotherme, avec un second membre modélisant la porosité du milieu.

Soit $1/\varepsilon > 0$ le coefficient d'amortissement, ρ^ε la densité et u^ε la vitesse du fluide. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\varepsilon + \partial_x(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) & = & 0, & \rho^\varepsilon(0, x) & = & \rho_0(x) \\ \partial_t(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) + \partial_x(\rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2 + \rho^\varepsilon) & = & -\rho^\varepsilon u^\varepsilon / \varepsilon, & u^\varepsilon(0, x) & = & u_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

On demande que les données initiales vérifient :

$$\rho_0(x) \geq \rho_{min} > 0 \text{ et } \rho_0(\cdot), u_0(\cdot) \in BV(\mathbb{R}) \quad (2)$$

où $BV(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions à variation bornée sur \mathbb{R} . On peut montrer que $\rho^\varepsilon u^\varepsilon = O(\varepsilon)$, et que quand $\varepsilon \rightarrow 0_+$, (ρ^ε) converge vers ρ_0 dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x)$, ce qui n'est pas une information d'un grand intérêt! Pour avoir plus d'informations, il faut étudier le comportement des solutions pour des temps grands en $\frac{1}{\varepsilon}$. Ceci a été fait dans [4] pour le p-système mais pour des données initiales régulières. Le but de cette Note est de démontrer un résultat analogue pour des données présentant des chocs et dans le cas où $p(n) = n$. Pour cela, on introduit, comme dans [10], une variable de temps lent :

$$s := \varepsilon t,$$

sans modifier la variable d'espace : il s'agit donc d'un scaling "parabolique". Pour alléger les notations, on notera encore ρ^ε et u^ε la densité et la vitesse en variable (s, x) . Le contexte précisera la variable de temps choisie. De manière précise nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ une famille de solutions entropiques de (1), (2) construites par le même schéma que dans [11], et soit ρ l'unique solution de*

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0, \quad \rho(0, x) = \rho_0(x). \quad (3)$$

Alors, nous avons les convergences suivantes (en variables s, x)

$$\rho^\varepsilon \rightarrow \rho \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}_s^+ \times \mathbb{R}_x) \text{ fort et, } \rho^\varepsilon u^\varepsilon / \varepsilon \rightharpoonup -\partial_x \rho \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}_s^+ \times \mathbb{R}_x) \text{ faible .}$$

Le terme d'amortissement a tendance à évidemment tendance à réduire la taille des discontinuités de la densité et la quantité de mouvement limite est donnée par $-\partial_x \rho$.

2 Estimations uniformes

On commence par donner des estimations sur la solution du système (1) discrétisé. On utilise le même splitting que dans [11]. Le système se décompose en deux parties :

$$(E) : \begin{cases} \partial_t \rho^\varepsilon & + \partial_x(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) & = 0, \\ \partial_t(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) & + \partial_x(\rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2 + \rho^\varepsilon) & = 0, \end{cases} \quad (O) : \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = -u^\varepsilon / \varepsilon.$$

Rappelons que pour le système d'Euler isotherme (E), (où le coefficient ε n'intervient plus), le problème de Riemann est le problème de Cauchy associé à la donnée initiale $V(0, x) = V_\pm, \pm x > 0$, où ici $V := (\rho, u)$. La solution présente au plus deux ondes simples reliant V_- et V_+ à un état intermédiaire V_0 . Soit $\eta := \ln \rho$, on note $S(V_-, V_+) := |\eta_0 - \eta_-| + |\eta_0 - \eta_+|$. On a pour tout $t > 0$: $TV_x \eta(t, \cdot) = S(V_-, V_+)$, et de plus

$$|u_\pm - u_0| \leq f(|\eta_\pm - \eta_0|), \quad (4)$$

où f est une fonction donnée: $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f(0) = 0$. On utilisera le résultat suivant :

Lemme 1 ([11]) Soit $0 \leq \alpha \leq 1$, $V_{\pm} := (\rho_{\pm}, u_{\pm})$ et $\tilde{V}_{\pm} := (\rho_{\pm}, \alpha u_{\pm})$ alors $S(\tilde{V}_-, \tilde{V}_+) \leq S(V_-, V_+)$.

Rappelons brièvement le schéma numérique utilisé dans [11]. On introduit un pas d'espace h et d'un pas de temps k qui vérifiera la condition C. F. L. Soient, $x_i := ih, i \in \mathbb{Z}$, $t_j := jk, j \in \mathbb{N}$. A chaque instant t_j , la solution approchée $V_h(t_j, \cdot)$ est constante sur chaque intervalle $I_i :=]x_i - h/2, x_i + h/2[$, et $V_h(0, x_i)$ est égale à la moyennede $V_0(x)$ sur I_i . Soit $(\gamma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite équadistribuée sur $] - 1, 1[$, on définit V_h par récurrence sur j . Pour chaque i , on résout le problème de Riemann sur $[t_j, t_{j+1}[\times]x_i, x_{i+1}[$. On pose $\tilde{V}_h(t_{j+1}, x_i) := \lim_{t \rightarrow t_{j+1}} V_h(t, x_i + \gamma_j h/2)$. C'est donc simplement une étape du schéma de Glimm. Puis, on effectue la deuxième partie du splitting :

$$\rho_h(t_{j+1}, x_i) = \tilde{\rho}_h(t_{j+1}, x_i) \text{ et } u_h(t_{j+1}, x_i) = \tilde{u}_h(t_{j+1}, x_i) \exp(-k/\varepsilon).$$

Les estimations-clé vont s'obtenir grâce à la fonctionnelle de Nishida: $N_j := \sum_{i \in \mathbb{Z}} S_{i,j}$ où $S_{i,j} := S(V_h(t_j, x_i), V_h(t_j, x_{i+1}))$. Pour $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, soit $VT_x(h)$ sa variation totale :

$$VT_x(h) := \sup_{n \in \mathbb{N}, x_0 < x_1 < \dots < x_n} \sum_{i=1}^n |h(x_i) - h(x_{i-1})|.$$

Proposition 1 La suite $(N_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et il existe une constante K , telle que :

$$\sup_{\varepsilon > 0} \sup_{t \geq 0} (VT_x \rho^\varepsilon(t, \cdot) + VT_x u^\varepsilon(t, \cdot)) + \|\rho^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x)} + \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x)} \leq K \quad (5)$$

DÉMONSTRATION : Montrons la décroissance de (N_j) par récurrence sur j .

$$N_{j+1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} S_{i,j+1} \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} S(\tilde{V}_h(t_{j+1}, x_i), \tilde{V}_h(t_{j+1}, x_{i+1})) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} S_{i,j} = N_j$$

La première inégalité s'obtient par le Lemme 1, la deuxième est une propriété remarquable de (N_j) : la fonctionnelle de Nishida décroît pour le système (E) [9]. On a donc, pour tout $t \geq 0$, $VT_x \eta_h(t, \cdot) \leq N_0$. D'après [13], $\lim_{x \rightarrow +\infty} V_h(t, x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} V_0(t, x)$. Ainsi une borne $L^\infty(\mathbb{R}_t^+, BV(\mathbb{R}_x))$ de V_h donne une borne $L^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x)$ de V_h . Donc η_h est borné dans $L^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x)$. D'après l'inégalité (4) : $VT_x u_h^\varepsilon(t_j + k/2, \cdot) \leq CN_j \leq CN_0$, où C est une constante indépendante de t et de ε . Ceci nous donne une borne de u_h^ε dans $L^\infty(\mathbb{R}_t^+, BV(\mathbb{R}_x))$. L'inégalité (5) est donc démontrée pour les solutions approchées. Elle reste vraie, à la limite quand h tend vers 0 (cf [3]). \square

Nous utiliserons aussi le résultat suivant.

Lemme 2 Il existe une constante C telle que $\forall \varepsilon > 0, \forall A > 0$:

$$\int_{-A}^A \rho^\varepsilon(s, x) \frac{|u^\varepsilon|(s, x)}{\varepsilon} dx \leq C + CA \frac{\exp\left(-\frac{s}{\varepsilon^2}\right)}{\varepsilon}. \quad (6)$$

DÉMONSTRATION : On écrit le système (1) en variable s .

$$\begin{cases} \partial_s \rho^\varepsilon & + \partial_x(\rho^\varepsilon u^\varepsilon / \varepsilon) & = & 0, \\ \varepsilon \partial_s(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) & + \partial_x(\rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2 + \rho^\varepsilon) & = & -\rho^\varepsilon u^\varepsilon / \varepsilon. \end{cases} \quad (7)$$

Soit $sign$ la fonction signe : $sign(x) = \pm 1$ si $\pm x > 0$. Soit $\eta > 0$, on note σ_η la régularisée classique de la fonction signe définie par :

$$\sigma_\eta(u) := \begin{cases} \pm 1 & \text{si } \pm u \geq \eta \\ \frac{u}{\eta} & \text{si } |u| \leq \eta \end{cases} .$$

On va effectuer un calcul dans $BV(\mathbb{R})$ ([14]). On multiplie la deuxième équation par σ_η , on intègre par rapport à x sur $] -A, A[$ et on en prend la limite supérieure quand η tends vers 0. On obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{ds} \int_{-A}^A \rho^\varepsilon |u^\varepsilon|(s, \cdot) dx & + \limsup_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-A}^A \sigma_\eta \partial_x(\rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2)(s, \cdot) dx + \int_{-A}^A \sigma_\eta \partial_x \rho^\varepsilon(s, \cdot) dx \right\} \\ & = - \int_{-A}^A \rho^\varepsilon \frac{|u^\varepsilon|}{\varepsilon}(s, \cdot) dx. \end{aligned}$$

Le terme entre accolades est une mesure bornée sur \mathbb{R} multipliée par σ_η et intégrée sur $] -A, A[$. C'est donc majoré par une constante C_1 indépendante de A , de ε et de η . En posant $Y(s) = \int_{-A}^A \rho^\varepsilon \frac{|u^\varepsilon|}{\varepsilon}(s, x) dx$, on a donc :

$$\varepsilon^2 Y' + Y \leq C_1 \quad (8)$$

De plus, à l'aide de la borne L^∞ de la proposition 1, on a $\rho^\varepsilon |u^\varepsilon|$ qui est majorée par une constante C_2 et donc :

$$Y(0) \leq C_2 A \frac{1}{\varepsilon} \quad (9)$$

Donc, par le lemme de Gromwall, on obtient (6) avec $C = C_1 + C_2$. \square

Remarque 1 *On a seulement un contrôle $BV \cap L^\infty(\mathbb{R})$ de la donnée initiale. Si on rajoute un contrôle $L^1(\mathbb{R})$ de $u_0(\cdot)$, alors on obtient une majoration indépendante de la taille de l'intervalle dans les inégalités (9) et (6). Cependant l'estimation BV ne donne qu'une compacité dans L^1_{loc} , on a donc pas besoin ici d'estimation indépendante de A .*

3 Démonstration de la convergence

Proposition 2 *Nous avons les convergences faibles suivantes :*

$$\rho^\varepsilon \rightharpoonup \rho \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_s^+ \times \mathbb{R}_x) \text{ faible}, \quad \frac{\rho^\varepsilon u^\varepsilon}{\varepsilon} \rightharpoonup -\rho_x \text{ dans } L^1(\mathbb{R}_s^+ \times \mathbb{R}_x) \text{ faible-étoile.}$$

DÉMONSTRATION : Fixons S et A . La suite $\varepsilon^{-1}\rho^\varepsilon u^\varepsilon$ est bornée dans $L^1_{loc}([0, S] \times [-A, A])$ grâce au lemme 2. Quitte à extraire une sous suite, on peut noter r une limite faible de (ρ^ε) dans L^∞ et j une limite faible de $(\varepsilon^{-1}\rho^\varepsilon u^\varepsilon)$. En passant à la limite faible dans la deuxième équation de (7) on a $j = -r_x$. En reportant dans la première équation de (7) on trouve que r est une solution de (3) sur $[0, S] \times [-A, A]$. Par le procédé de la sous-suite diagonale, on peut montrer que r est solution de (3) sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Donc $r = \rho$ et la suite bornée (ρ^ε) n'a qu'une limite faible, donc toute la suite converge faiblement. \square

Nous pouvons maintenant montrer la convergence forte de la densité du fluide.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 : Nous avons :

$BV_x(\cdot - A, A) \subset L^1_x(\cdot - A, A) \subset (W^{1,\infty})'(\cdot - A, A)$. La première injection est compacte, la deuxième continue. La suite (ρ^ε) est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_s^+, BV(\mathbb{R}_x))$. Soit $S > s_0 > 0$.

D'après la première équation de (7) et la borne du Lemme 2, la suite $\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial s}$ est bornée

dans $L^\infty([s_0, S], (W^{1,\infty})'(\cdot - A, A))$. En utilisant une extension du Lemme d'Aubin (voir [7],[12]), on en déduit que (ρ^ε) converge fortement vers ρ dans $L^1([s_0, S] \times \cdot - A, A)$. Ceci étant vrai pour tout $s_0 > 0$ et (ρ^ε) étant bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R})$, la convergence forte a aussi lieu sur $L^1([0, S] \times \cdot - A, A)$. \square

Ceci achève de démontrer le résultat annoncé. Dans un travail en préparation [6], nous démontrerons un résultat analogue - avec une méthode totalement différente - pour la convergence du système d'Euler-Poisson isotherme vers les équation de dérive-diffusion.

Références

- [1] **J. P. Aubin, 1963.** Un théorème de compacité, *C. R. Acad. Sci.*, 256, p. 5042-5044.
- [2] **H. Brezis, 1983.** *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris.
- [3] **J. Glimm, 1965.** Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *Com. Pure. Appl. Math.*, 18, p. 698-715.
- [4] **L. Hsiao and T.P. Liu, 1992.** Convergence to nonlinear diffusion waves for solutions of a system of hyperbolic conservation laws with damping, *Com. Math. Phys.*, 143, p. 599-605.
- [5] **S. Junca, 1995.** Optique géométrique non linéaire, chocs forts, relaxation, Thèse, Université de Nice-Sophia antipolis.
- [6] **S. Junca and M. Rascle, 1996.** *Relaxation of isothermal Euler-Poisson system to the Drift-Diffusion Equations*, preprint.
- [7] **J. L. Lions, 1969.** *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris.
- [8] **M. Luskin and J. B. Temple, 1982.** The existence of a global weak solution for a model equation for a fluid flow in a pipe, *Com. Pure Appl. Math.*, 35, p. 697-735.

- [9] **T. Nishida, 1968.** Global solutions for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system, *Japan Acad.*, 44, p. 642-646.
- [10] **P. Marcati and R. Natalini, 1995.** Weak Solutions to a Hydrodynamic Model for Semiconductors and Relaxation to the Drift-Diffusion Equation, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 129, p. 129-145.
- [11] **F.Poupaud, M. Rascle and J.P. Vila, 1995.** Global Solutions to the Isothermal Euler-Poisson System with Arbitrarily Large Data, *J.D.E.*, 123, p. 93-121.
- [12] **J. Simon 1987.** Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$, *Annali di Matematica pura ed applicata, (IV), Vol. CXLVI, p. 65-96.*
- [13] **J. Smoller, 1983.** *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer, New York.
- [14] **A.I. Volpert, 1967.** The spaces BV and quasilinear equations, *Math USSR Sb.* 73, p. 225-267.