Simulation d'une loi binomiale

1 Enoncé

Le but de cet exercice est de simuler une loi biniomiale $\mathcal{B}(n,p)$, $0<p<1$ et de comparer les résultats obtenus à la théorie.

On veut savoire combien il y aura d'admissibles au concours cette année parmis les candidats d'un centre de l'IUFM des Alpes côtières. On compte que les candidats assidus de cette préparation sont environ une quarantaine: $n := 40$. Statistiquement, on s'est aperçu qu'un candidat assidu avait une chance sur 2 d'être admissible: $p = 1/2$. L'équipe enseignante du centre de l'IUFM des Alpes côtières s'est aussi aperçu que, malgré l'apparition de quelques sous-groupes de candidats travaillant profitablement ensemble, on peut considérer, en première approximation, que les chances de réussite d'un candidat dépendent peu de celles de ses camarades.

On note A la variable aléatoire qui représente le nombre d'admissibles.

1. Donner tous les arguments qui permettent de considérer que A suit la loi binomiale $\mathcal{B}(40, 0.5)$.
2. Trouver le plus petit $r > 0$ telle que $P(|A-20| \leq r) \geq 95\%$.
3. Comparez la fourchette obtenue précédemment en utilisant la loi Binomiale $\mathcal{B}(40, 0.5)$ avec la fourchette utilisée en Statistiques en première.
4. Si X suit la loi uniforme sur $[0,1]$, vérifiez que $B = [2\times X]-1$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0.5)$, où,$[y]$ désigne la partie entière de y.
5. En déduire une simulation d'une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ à l'aide de votre calculatrice. Puis, simuler la loi binomiale $\mathcal{B}(40, 0.5)$ à l'aide d'un petit programme (ou en utilisant la fonction somme de la calculatrice).
6. Exécuter de**nombreuses** simulations numériques, puis commenter judicieusement les résultats obtenus.

2 Travail demandé au candidat

1. Donnez tous les prérequis nécessaires avant d'aborder l'exercice proposé.
2. Il sera demandé au candidat de faire le lien entre les probabilités et les statistiques aux travers de l'exercice.
3. Le candidat sera amené à faire clairement la distinction entre la modélisation et la simulation.
4. On pourra proposer un exercice d'introduction de la loi binomiale.
5. Le candidat s'est-t'il simuler une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 0.5)$ autrement?
6. On pourrait envisager un exercice de mise en oeuvre de la simulation d'une loi $\mathcal{B}(p)$, puis $\mathcal{B}(n,p)$ pour $0<p<\frac{1}{2}$.
7. On pourrait aussi envisager la simulation d'une loi exponentielle à l'aide de $E = -\frac{\ln X}{\lambda}$ et $\lambda > 0$.