Convergence des suites numériques.
Exemples & applications.

1) Convergence

Définition, suites extraites, opérations élémentaire (+,x, /),théorème des gendarmes,
exemples se traitant seulement avec la définition:
suites monotones, suite adjacentes, moyenne de Césàro.

Non convergence: divergence: à l'infini ,
a^n, a de module 1, (Polygône régulier ou suites équiréparties)

Ordre de convergence par comparaison aux suites de références: n^a, a^n, $n!$, n^n
Rapidité de convergence: algébrique, géométrique, superconvergence (quadratique)
convergence algébrique: de l'ordre de $1/n^a$, $a >0$ (e par la méthode d'Euler)
convergence géométrique: de l'ordre de r^n, $0<r <1$ (Pi par Archimède)
superconvergence: $o(r^n)$ pour tout $0<r<1$ (Algorithme de Babylone)
exemples: $1/n!$, $e_{n+1} = o(e_n)$; $e_{n+1} = O (e_n^2)$ & $e_n \to 0$.

2) utilisation de séries et d'intégrales
exemple classique: la constante gamma d'Euler, Stirling, ...

3) Le cas des suites récurrentes: $u_{n+1} = f (u_n)$.

$l=f(l)$, $r=f'(l)$,
i) $0 < |r| < 1$ convergence géométrique

ii) $r=0$, superconvergence Newton
exemple élémentaire et éclairant $u_{n+1} = u_n^2$, $0< u_o < 1$

iii) $|r|=1$, le cas critique, Quand il y a convergence elle est algébrique
$u_{n+1} = \sin(u_n)$ trrès (trop?) classique
$u_{n+1} = (1+ u_n^2)/2$ pour changer $u_n= 1 -2/n + O(1/n^2)$

- exemple des suites homographiques: convergence géométrique ou algébrique ou divergente
(tan n) est une suite homographique dense dans R.

4) Applications numériques
- Approximation d'un nombre:
  . $f(x)=0$: méthode de point fixe, de Newton, sécante*.
  . Méthode spécifique, e , pi.
- Approximation d'une aire:
  Méthode d'intégration numérique: convergence algébrique à l'aide des formules de Taylor
- Approximation d'une solution déquation différentielle.
  Méthode d'Euler et e.
- Accélération de convergence.

5) Applications théoriques

- définition de limites pour f avec epsilon <=> avec toutes suites ....
(preuve de non convergence de fonctions)

Preuves de théorèmes d'Analyse:

- théorème des valeurs intermédiaires et dichotomie,
- les fonctions continues sont bornées sur un segment et atteignent ses bornes.
- Compact métrique et critère de Bolzano-Weierstrass.
  Exemple [0,1]x[0,1] est compact (sachant que [0,1] l'est).
- prolongement de fonction uniformément continue
  exemple f définie sur]0,1[avec f' bornée sur]0,1[, (et aussi quand f' a une limite au bord)
- f(x+y) = f(x)+f(y) et f continue

6) Autres exemples
- suite adjacentes des moyennes (PGCD), superconvergence
- Intégrale de Wallis (un exemple de la méthode de Laplace) avec l'ordre
- suites définies implicitement:
  $1 < u_n < e < v_n$ uniques racines de $x^n = \exp(x)$ pour $x > 0$, $n > 2$.
- $u_n = r\, u_{n-1} + v_n$ où $|r| < 1$ & $v_n \to 0$

Références: Baranger, Chambert-Loir&Fermigier, Demailly , Dieudonné,
Gourdon, Mialet-Tissier, Rouvière PGCD, Schatzmann