Univers fini & Probabilités discrètes

1 Notion d'univers et de probabilités

Une expérience alátoire est "une expérience dont on ne connaît pas l'issue à l'avance". Or le mot "expérience" sort du cadre mathmatique. Car pour faire des mathématiques tant on doit précisér où l'on travaille. En géométrie, on a besoin du plan : ensemble des points, en Analyse de $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels et en probabilité d'un univers, ensemble de toutes les éventualités possibles pour une expérience aléatoire donnée.

Ainsi, Une expérience alátoire est une expérience dont on ne connaît pas l'issue à l'avance mais dont on connaît déjà l'ensemble des issues possibles.

Par l'exemple lorsque l'on joue à "pile ou face" avec une pièce de monaie, on peut décrire cette expérience aléatoire par l'univers $\Omega := \{P, F\}$ où l'événement $\{P\}$ désigne pile et $\{F\}$ face. Pour le lancer de dé on prendra comme univers $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Proposons un premier exemple où le choix de l'univers peut être problématique :

Lancer de deux pièces : plusieurs univers peuvent coder la même expérience aléatoire. Par exemple, si l'on jette deux pièces de monaie on peut prendre $\Omega_1 := \{PP, PF, FP, FF\}$, ou $\Omega_2 := \{0, 1, 2\}$. En effet lorque l'on jette deux pièces, il suffit de compter le nombre de côtés piles obtenues pour décrire le résultat du lancer. Cependant, comme on le verra par la suite, Ω_1 est mieux adatpté à la description de cette expérience pour calculer des probabilités.

Ce problème du choix de l'univers apparaît de manière encore plus simple pour l'expérience suivante : tirer une boule dans une urne contenant 3 boules blanches et 1 boule rouge. Pour que cette expérience garde un aspect vraiment aléatoire, on suppose que les boules sont bien mélangées et que l'on a autant de chance de tirer chaque boule. En effet, considérons un cas extrème qui tue le caractère aléatoire de l'expérience. Si l'urne à la forme d'un tube dont le diamétre est égal à celui des boules. Avant de tirer une boule, remplissons l'urne de manière méthodique, d'abord les blanches puis la rouge. Désormais l'expérience est trés simple, l'univers $\Omega_3 := \{R\}$ suffit à décrire l'expérience.

Sans aller jusqu'à un cas aussi caricatural on peut penser à des boules mal mélangées. Tout le monde a fait l'expérience en jouant aux cartes de retouver des séquences (peu probables) de la partie précédente si l'on mélange mal les cartes.

Pour notre urne bien mélangée on peut prendre $\Omega_1 := \{B_1, B_2, B_3, R_1\}$, ou $\Omega_2 := \{B, R\}$. Cependant bien que Ω_2 décrit correctement l'expérience aléatoire, Ω_1 rend mieux compte de la supériorité numérique des boules blanches sur la boule rouge. Comment quantifier le fait que l'on a plus de chance d'obtenir une boule blanche qu'une boule rouge ? On pourrait dire qu'il y a trois fois plus de chance de tirer une boule blanche car les blanches sont trois fois plus nombreuses.

On pourrait aussi faire plusieurs essais, comptabiliser la fréquence d'apparition d'une boule blanche f_B et d'une boule rouge f_R. Remarquez que $f_B + f_R = 1$.

Donnons une définition qui va bientôt rallier les deux points précédents : combinatoire et statistiques.

Définition 1 (Probabilité sur un univers fini)
Soit Ω un ensemble fini de cardinal N : $\Omega := \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$,
$p_1, p_2, \cdots, p_N$ des nombres positifs ou nuls tels que $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$.
$\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des sous-ensembles de Ω, appelé aussi l'ensemble des parties de Ω.
On définit P une probabilté sur Ω comme une application définie comme suit :

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(A) := \displaystyle\sum_{\omega_k \in A} p_k \end{array}$$

On appelle ω_k un *événement élémentaire*, ainsi $p_k = P(\{\omega_k\})$ est une *probabilité élémentaire.* La probabilité d'un événement est donc la somme des probabilités des évenements élémentaires qui le constituent :

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} P(\{\omega_k\}) = P\left(\bigcup_{\omega_k \in A} \{\omega_k\}\right).$$

Ainsi une probabilité sur Ω est parfaitement déterminée par l'application qui à un événement élémentaire associe sa probabilité. On prendra garde tout de même de ne pas confondre l'application P avec celle qui va de Ω dans $[0,1]$ et qui à ω_k associe p_k comme cela est parfois écrit par abus de langage dans des livres du secondaires. En effet P est une application définie sur l'ensemble des évènements possibles, i.e. les parties de Ω.

Remarquer le passage du langage ensembliste au langage probabiliste.

Exercice : Traduire en langage ensembliste les expressions suivantes : évènement élémentaire, évènement, évènement contraire, évènements incompatibles.

Noter le caractère **additif** de cette notion de probabilité comme la longueur ou l'aire en Géometrie, l'intégrale en Analyse, la masse, la charge, l'énergie en physique, ... En fait cette additivité est fondamentale, elle caractérise les probabilités :

Proposition 1 *une application des parties de Ω dans $\mathbb{R}^+$ qui est additive par rapport à l'union (disjointe) et qui associe 1 à Ω est nécessairement une probabilité sur Ω.*

Exercice : Démontrer la proposition **??**.

Proposition 2 (Propriétés additives des lois de probabilités)
Soient A et B deux sous ensembles de Ω, $\overline{A} := \Omega - A$ le complémentaire de A dans Ω, Alors, on a les propriétes suivantes :

1. *$P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$,*
2. *Si A et B sont disjoints alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*
3. *$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.*

4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

5. Si $C_1, \cdots, C_m$ *forment une partition de* Ω : $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ *et* $i \neq j \Longrightarrow C_i \cap C_j = \emptyset$ *alors*
$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A \cap C_i)$.

Exercice : Démontrer la proposition **??**.

2 Loi uniforme : le cas équiprobable

Le cas équiprobable est celui où tous les évènements élémentaires ont la même probabilité. Ce cas est très important pour une première approche des probabilités. Mais il ne faudrait pas réduire les probabilités au cas équiprobable. En effet, combien peut-on définir de probabilité P sur un univers Ω donné (non réduit à un seul élément) ?

Si chaque événement élémentaire à autant de chance de survenir alors tous les probabilités élémentaires sont égales. Comme leur somme fait 1 elles sont toutes égales à $1/N$ et on a la fameuse formule :

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exercice : Démontrer cette formule dans le cas équiprobable.

Ainsi, dans ce cas, les probabilités deviennent de la combinatoire. Ce modéle peut être justifié dans des cas de symétrie parfaite, par exemple pour des raisons géométriques ou physique : dé parfaitement cubique, piéce bien équilibrée, ou pour des mélanges parfaits : cartes, urnes, ...

Mais en pratique on dévie de ce cas uniforme. Par exemple, lorsque l'on fait un enfant, la probabilité d'avoir un garçon est plus proche de 51% que de 50%, ... En statistiques, la loi uniforme peut représenter plutôt une abscence de connaissance à priori sur la population étudiée.

3 Le modèle de l'urne

Le modèle de l'urne est trés important car il permet d'appréhender beaucoup d'expériences aléatoires : lancer de pièces, jeux de cartes, sondages, ... On le traite d'abord avec des méthodes combinatoires en guise d'introduction. Mais on y reviendra de manière plus efficace et trés instructive en utilisant des arbres, c'est à dire en utilisant des probabilités conditionnelles.

On dispose d'une urne de N boules numérotées de 1 à N, contenant r boules rouges et b boules blanches : $b + r = N$. Nous allons procéder à divers tirages de trois boules dans une urne.

Exercice : Répondre aux questions suivantes. Prendre $N = 5, r = 3, b = 2$, pour les applications numériques.

1. Tirage avec remise : On tire successivement trois boules dans l'urne. A chaque fois, Lorsqu'on tire une boule, on note sa couleur, on la replace dans l'urne et on mélange bien l'urne. Ainsi, on peut tirer plusieurs fois la même boule.
   (a) Précisez un univers pertinent associé à cette expérience aléatoire.
   (b) Quelle est la probabilité de tirer avec remise la séquence suivante : RBR (une rouge, puis une blanche, puis une rouge) ?
2. Tirage sans remise : On tire successivement trois boules distinctes dans l'urne.
   (a) Donnez un univers associé à cette expérience aléatoire.
   (b) Quelle est la probabilité de tirer sans remise la séquence suivante : RBR ?
3. Dans les trois questions suivantes on ne considère plus l'ordre d'apparition des couleurs.
   (a) Quelle est la probabilité de tirer avec remise deux boules rouges et une boule blanche ?
   (b) Quelle est la probabilité de tirer sans remise deux boules rouges et une boule blanche ?
   (c) Quelle est la probabilité de tirer simultanément deux boules rouges et une boule blanche ?
4. Approximation du tirage sans remise par le tirage avec remise : Dans cet exercice, si N est trés grand, y-a-t-il une grande différence entre les résultats obtenus pour le tirage sans remise de ceux obtenus pour le tirage avec remise ?

4 Quelques exercices de Combinatoire

1. On tire un nombre x d'au plus 5 chiffres au hasard. Quelle est la probabilité que les 5 chiffres soient tous disctints ? Pour simplifier, on prend la convention suivante : si un nombre comporte moins de 5 chiffres, on rajoutera des 0 devant pour obtenir les 5 chiffres : $x = 123 = 00123$.
2. On jette au hasard n balles dans n casiers. Quelle est la probabilité que chaque casier contienne une balle ? Traiter numériquement le cas où $n = 7$.
3. On jette 6 dés. Quelle est la probabilité que chaque face soit disctinte ?
4. 7 personnes rentrent dans un immeuble de 10 étages et prennent l'ascenceur. Quelle est la probabilité que deux personnes quittent l'ascenceur au même étage ?

5 Le paradoxe des anniversaires

1. Quelle est la probabilité $p(r)$ que r personnes ont tous des dates d'anniversaires différentes ? On considère qu'une année fait 365 jours.

2. Si r est petit, montrer que $p(r) \simeq 1 - \dfrac{1+2+\cdots+r-1}{365} = 1 - \dfrac{r(r-1)}{730}$. Vérifier cette approximation pour $r = 10$.
3. Pour r plus grand (mais pas trop) on obtient une meilleure approximation en passant au logarithme. Montrer que $\ln p(r) \simeq -\dfrac{1+2+\cdots+r-1}{365} = -\dfrac{r(r-1)}{730}$. Vérifier cette approximation pour $r = 30$.
4. La majorité des gens pensent que quelques dizaines de personnes prises au hasard ont généralement des dates d'anniversaires toutes différentes. En effet il y a presque 400 dates d'anniversaires possibles. Et pourtant, à partir de combien de personnes est-il plus probable qu'au moins deux personnes aient la même date d'anniversaire ?
5. Pouvez vous expliquer ce paradoxe ?