Probabilités conditionnelles, indépendance

1 Probabilités conditionnelles

En statistiques lors d'une étude d'un caractère sur une population donnée, les résultats sont souvent obtenus ou présentées par sous-population.

Regardons le nombre d'admissible au CAPES de Mathématiques à Nice suivant leur sexe. On utilise les notations suivantes H pour homme, F pour femme, A pour admissible, R pour recalé, N le nombre d'individu de la population, N_H le nombre d'hommes, $N_{HA} = N_{AH}$ le nombre d'hommes admissibles, et ainsi de suite. On a le tableau suivant :

	H	F	
A	8	12	20
R	8	4	12
	16	16	32

Ainsi, la fréquence des admissibles à Nice est $f(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8} = 0.625$, la fréquence des hommes admissibles est $f(HA) = \frac{N_{HA}}{N} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0.25$, la fréquence des admissibles chez les hommes est $f(A/H) = \frac{N_{HA}}{N_H} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0.5$, et $f(A/F) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0.75$.

On remarque que les femmes réussissent mieux que les hommes, que 75% femmes sont admissibles contre 50% des hommes.

En fait, on obtient la formule générale suivant sur les fréquences conditionnelles :

$$f(A/H) = \frac{N_{AH}}{N_H} \times \frac{N}{N} = \frac{f(AH)}{f(H)}.$$

Pour faire des probabilités, on peut prendre comme univers les 32 candidats. On choisit un individu au hasard en se plaant dans un cas d'équiprobalité. Ainsi les calculs précédents de fréquences deviennent des calculs de probabilités. Il suffit de remplacer f par P et d'interpréter les résultats obtenus en terme probabiliste. Par exemple on a 62.5% de chance de choisir un individu admissible. Sachant que cet individu est une femme on une probabilité de 0.75 d'avoir choisi une candidate admissible. Cet exemple nous introduit de manière naturelle la notion de :

Définition 1 (Probabilité conditionnelle)
Soit Ω un ensemble fini muni d'une loi de probabilité P, H un sous-ensemble de Ω.

Si $P(H) \neq 0$ on note la probabilité que l'évenement A se réalise sachant que l'événement H est réalisé, ou, plus rapidement, la probabilité de A sachant H par :

$$P(A/H) := \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$$

Ainsi $P(./H)$ est une probabilté sur Ω :

$$\begin{array}{rccc} P(./H): & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(A/H) \end{array}$$

En effet, on vérifie aisément que l'additivité de $P(./H)$ par rapport à l'union disjointe résulte de celle de P et que $P(\Omega/H) = P(H)/P(H) = 1$.

On pourrait aussi voir $P(./H)$ comme une probabilité sur le sous univers H et donc ne considérer que des événements dans H. En effet pour $B \subset H$, on pourrait regarder la probabilité trace sur le sous univers H en posant $P_H(B) = cP(B)$ où c est une constante strictement positive. Ainsi l'additivité de P_H est automatiquement vérifiée. En demandant que P_H soit une loi de probabilité sur H il faut en plus que $P_H(H) = 1$ soit $c = 1/P(H)$. Ainsi, pour tout $B \subset H$ on a $P(B/H) = P_H(B)$ et plus généralement $P(A/H) = P_H(A \cap H)$.

Ceci nous donne une deuxième interprétation de la probabilité conditionnelle comme la probabilité trace sur un sous ensemble de Ω. Cependant l'usage est de parler des événéments sur l'univers Ω et non des événements traces sur H. C'est pour cela que l'on dit que $P(./H)$ est une probabilité sur Ω et non sur le sous-univers H.

1.1 Trois enfants

Pierrot et Colombine ont trois enfants. On se demande s'ils ont une fille.

1. Quelle est la probabilité qu'ils aient au moins une fille ?
2. Sachant qu'un enfant s'appelle Jean de la Lune, quelle est la probabilité d'avoir au moins une fille ?
3. En fait, Jean de la Lune est le deuxième enfant, quelle est la probabilité d'avoir au moins une fille ?
4. Sachant de plus que que l'ané s'appelle Arlequin, quelle est la probabilité d'avoir au moins une fille ?

1.2 As de coeur

Pierre et Xavier ont chacun un jeu de $4 + n$ cartes dont les quatre As, $n = 28$ pour un jeu de 32 cartes, $n = 48$ pour un jeu de 52 cartes, ... Pierre et Xavier tirent 2 cartes dans leurs jeux. Pierre dit qu'il a un as. Xavier annonce qu'il a un as de coeur.

1. Qui a la plus grande chance d'avoir deux As ?
2. Y-a-t-il un valeur de n pour laquelle Pierre et Xavier ont autant de chance d'avoir deux As ?

En statistique, on partage souvent la population en sous-populations. En probabilité, on a fréquemment besoin de partitionner l'univers. On aura besoin de la définition suivante :

Définition 2 (Famille totale)
On dit que $\{C_1, \cdots, C_m\}$ est une famille totale de Ω muni de la probabilité P si :

1. *elle forme une partition de Ω : $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ et, $i \neq j \Longrightarrow C_i \cap C_j = \emptyset$,*
2. *pour tout i, $P(C_i) \neq 0$.*

Proposition 1 (Formule des probabilités totales)
Si $\{C_1, \cdots, C_m\}$ forme une falille totale de (Ω, P), alors, pour tout $A \subset \Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A/C_i)P(C_i).$$

Cette formule trés simple à démontrer mais surtout trés importante dans la pratique consititue la justification mathématique de l'utilisation des arbres dans le secondaire pour le calcul de probabilités.

2 Indépendance

La notion de probabilité conditionnelle conduit naturellement à celle d'indépendance. On dit que A est indépendant de H si le fait de savoir que H s'est réalisé ne change pas la probabilité de A de survenir, i.e. $P(A/H) = P(A)$, et donc de $P(A \cap H) = P(A/H)P(H)$ on demande que $P(A \cap H) = P(A) \times P(H)$. Cette dernière formule à l'avantage d'tre symétrique. De plus, on n'a plus besoin de supposer que H soit de probabilité non nulle. On a ainsi la définition générale :

Définition 3 (Indépendance de deux événements)
Soit Ω un ensemble fini muni d'une loi de probabilité P. On dit que deux événements A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

C'est ici que, pour la première fois dans ce cours, apparat la nécéssité de normaliser les lois de probabilité à 1. Expliquez pourquoi ?

Lemme 1 (Indépendance de deux événements et de leurs complémenetaires)
Soit Ω un ensemble fini muni d'une loi de probabilité P. Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Exercice : Démontrez le lemme. On peut remarquer qu'il suffit de démontrer la première implication dans le sens direct pour obtenir toutes les équivalences.

On vérifie que l'univers entier et l'ensemble vide sont indépendant de tout les événements de Ω.

Beaucoup de candidats au CAPES confondent independance et incompatibilité de deux événements A et B. Alors que cela n'est jamais possible (sauf si A ou B est le tout ou le rien).

Attention, l'indépendance de plus de deux événements est une notion bien plus compliquée.

3 Le modèle de l'urne traitée avec des arbres

On reprend l'execice des urnes en dessinant des arbres.

On dispose d'une urne de N boules numérotés de 1 à N, contenant r boules rouges et b boules blanches : $b + r = N$. Applications numériques : répondez à chaque question lorsque $N = 5, r = 3, b = 2$.

1. Quelle est la probabilité de tirer avec remise la séquence suivante : RBR (une rouge, puis une blanche, puis une rouge) ?
2. Quelle est la probabilité de tirer sans remise la séquence suivante : RBR ?

4 Formule de Bayes

La Formule de Bayes, appelé aussi (à tort) formule des probabilités des causes permet de passer de $P(A/B)$ à $P(B/A)$. Cette formule n'est pas au programme du secondaire, mais on la retouve naturellement dans les exercices. Ainsi, il ne faut pas apprendre cette formule mais savoir la retouver. En pratique, on représente souvent une expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré. Prenons un cas simple pour illustrer notre propos. On commence à partir de la racine de l'arbre par deux branches associées aux événements disjoints A et $\overline{A}$, puis par deux sous-branches associées aux événements disjoints B et $\overline{B}$. Ainsi, on a quatre parcours de l'arbre possibles : $\{AB, A\overline{B}, \overline{A}B, \overline{AB}\}$. La formule de Bayes revient à décrire l'expérience aléatoire en commenant par l'évènement B et en terminant par l'évènement A. Ce qui nous donne un nouvel arbre mais mathématiqument équivalent au premier avec les quatres nouveaux parcours : $\{BA, B\overline{A}, \overline{B}A, \overline{BA}\}$.

Recalculons cette fameuse formule : Si, on suppose que $P(A) \neq 0$ et $0 < P(B) < 1$ alors

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A),$$

donc

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}.$$

De la formule des probabilités totales on aussi $P(A) = P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B})$, ce qui nous donne la Formule de De Bayes qu'il ne faut pas apprendre mais savoir retrouver :

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B})}. \tag{1}$$

Voici un exercice classique est trés instructif sur l'utilisation de cette formule.

4.1 Test sanguin

Un population donnée a une proportion m d'individu atteint d'une certaine maladie. On dispose d'un test sanguin. On note M l'évènement : "tre malade", + :"le test est positif.

On connat l'efficacité de ce test sur les malades : $P(+/M) = 1 - \varepsilon < 1$. On sait aussi qu'il réagit parfois positivement sur des personnes saines : $P(+/\overline{M}) = \eta > 0$.

Le traitement de cette maladie est trés lourd et parfois mortel. On n'a donc tout intért à savoir lorsque le test est positif combien de fois il annonce qu'une personne saine est malade.

1. Calculez $P(\overline{M}/+)$ avec $m = \varepsilon = \eta = 1\%$. Commentez le résultat surprenant que vous obtenez.
2. En général, on suppose m, ε, η "petit" ($< 1\%$). Donnez une condition entre m et η pour que ce test soit intéressant.

5 Indépendance de n évènements

Cette notion est beaucoup plus difficile à appréhender et comporte de nombreux pièges. C'est surement pour cette raison qu'elle n'est pas au programme du secondaire. Cependant elle apparat naturellement au lycée par le jeu de pile ou face ou plus généralement par le schéma de Bernoulli. Il faut donc en dire un mot pour nos futurs enseignants.

Définition 4 (Indépendance de n événements)
Soit Ω un ensemble fini muni d'une loi de probabilité P. On dit que n événements $A_1, \cdots, A_n$ sont indépendants si, pour tout $k \in \{2, \cdots, n\}$ et toute injection φ de $\{1, \cdots, k\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{\varphi(i)}\right) = \prod_{i=1}^{k} P(A_{\varphi(i)}).$$

Cela fait de l'ordre de 2^n égalités à vérifier ! La confusion usuelle est de confondre l'indépendance de n évènements deux à deux et l'indépendance au sens de la définition précédente. Pour se familiariser avec cette notion, on propose deux exercices :

1. On lance une pièce parfaite deux fois et on note les deux résultats obtenus. On étudie l'indépendance des évènements suivants : A :" on a obtenu le côté pile au premier lancer ", B :" on a obtenu le côté face au deuxième lancer ", C :" on a obtenu deux fois le même résultat ".

(a) Montrer que A et B sont des événements indépendants, B et C sont indépendants, A et C sont indépendants.

(b) Cependant, montrer que $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$. Conclure.

2. Construire un exemple simple, Ω fini dans le cas de l'équiprobabilité, où trois évènements A, B, C sont tels que : A et B ne sont pas indépendants, A et C ne sont pas indépendants, B et C ne sont pas indépendants, et pourtant $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.Conclure.