Master 2 Enseignement
T. Champion & S. Junca

Variables Aléatoires Continues

1 Calculs de densité – Loi uniforme

1. Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[-1, \frac{3}{2}]$. Quelle est la loi de $Y = X^2$?

2. Soit X une v.a.r. qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On note $D_k(X)$ la variable aléatoire qui donne la $k-$ème décimale de X. Donner la loi de $D_k(X)$.

3. Soit $X_1, ..., X_k$ k des v.a.r. mutuellement indépendantes de même loi uniforme sur $[0, n]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
a- Déterminer la loi de $Y = \min(X_1, ..., X_k)$.
b- Déterminer la loi de $Z = \max(X_1, ..., X_k)$.
c- On suppose que $n = 1$. Etudier la fonction qui à $a \in [0, 1]$ associe $P(Y \leq a \leq Z)$.

4. Soit X une v.a.r. qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que $Y = \alpha X + \beta$ suive une loi uniforme.

5. Soit X une v.a.r. à densité, et F sa fonction de répartition.
a- Déterminer la fonction de répartition G pour chacune des v.a. suivantes :
$$(1)\ aX + b \qquad (2)\ X^n \qquad (3)\ [X] \qquad (4)\ \exp(X) \qquad (5)\ \varphi(X)$$
où a et b sont des réels, n un entier relatif, $[.]$ la fonction partie entière et φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
b- Déterminer si les v.a. précédentes admettent une densité g, et si oui la calculer.

6. Soit X une v.a.r.. Montrer qu'il existe un réel m tel que $\frac{1}{2} \leq P(X \leq m)$ et $\frac{1}{2} \leq P(X \geq m)$. A quelle condition ce nombre est-il unique ?

2 Loi exponentielle

1. *La désintégration nucléaire.*
A partir d'un instant 0, on s'intéresse à la désintégration nucléaire d'un atome. La v.a.r. dite de "durée de vie" de cet atome est notée T.
Pour $t > 0$, on note $G(t) := P(T > t)$ la probabilité que l'atome soit encore en vie à la date t. On pose également $F(t) := 1 - G(t)$.
On admet que si on considère un atome radioactif à un instant t, la probabilité qu'il ne soit toujours pas désintégré à la date $t' > t$ ne dépend que de la durée $t' - t$. C'est à dire, on admet que la durée T de vie d'un atome est indépendant du temps déjà écoulé. Cette propriété se traduit souvent en disant que "l'atome ne vieillit pas", ou qu'il est "sans mémoire" (sous-entendu que la durée de vie l'instant $t' > t$ n'a pas la mémoire du temps t déjà écoulé).

a- Comment interpréter $F(t)$?
b- Montrer que pour tout $t > 0$ et $t' > 0$, on a $G(t + t') = G(t).G(t')$.
c- En déduire qu'il existe $\lambda > 0$, caractéristique du type d'atome considéré, tel que pour tout $t > 0$, F est donnée par $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
d- Montrer que T est une v.a. à densité, donner sa densité f, et calculer $\mathbb{E}(T)$ et $V(T)$.
e- Calculer la probabilité qu'un atome dépasse son espérance de vie.
f- Calculer la probabilité qu'un atome dépasse le double de son espérance de vie.
g- Calculer la demi-période τ définie par $P(T > \tau) = \frac{1}{2}$.

2. *la demi-vie*
Soit T une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
a- Montrer que $P(T \geq \mathbb{E}(T))$ est indépendant de λ.
b- Calculer le maximum p_λ de $t \mapsto P(T \in [t, 2t])$. La valeur de t où le maximum est atteint est appelé demi-vie.

3 Loi de Cauchy

Soit X une v.a. de loi de Cauchy.
a- Calculer l'espérance et la variance de X.
b- Déterminer la loi de la v.a. $Y = 1/X$.
c- Déterminer la loi de $Z = \ln |X|$ (calculer sa densité). Calculer $\mathbb{E}(Z)$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1 + x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} (\ln x)^2 dx$.
En déduire une expression de $\mathbb{E}(Z^2)$ à l'aide d'une série.

4 Loi normale

1. Lors de la fabrication en série de billes, on admet que le diamètre d'une bille X est réparti suivant une loi normale. A l'aide de deux cribles, l'un avec des trous de $10mm$ de diamètre et l'autre avec des trous de $13mm$, on établi les probabilités suivantes:
$$P(X \leq 10) = 0,1736 \quad et \quad P(X \geq 13) = 0,1446$$
Déterminer les paramètres de la loi de X.

2. Une usine fabrique des vis dont le diamètre obéit à une loi normale de moyenne $0,25cm$ et d'écart-type $0,02mm$. On considère qu'une vis est défectueuse si son diamètre n'est pas compris dans l'intervalle $[0,20; 0,28]$. Calculer la proportion de vis défectueuses.