Master 2 Enseignement
T. Champion & S. Junca

Dénombrements

1 Des livres sur une étagère

Dans une bibliothèque, n livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces n livres, k sont du même auteur Godement, les autres étant d'auteurs tous différents. Calculer la probabilité qu'au moins p livres de Godement se retrouvent côte à côte dans les cas suivants:

1. $n = 20,\ k = 3,\ p = 3$;

2. * $n = 20,\ k = 5,\ p = 2$;

2 Compter des $p-$uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$

1. Montrer que $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ est le nombre de $p-$uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que: $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p < n$.

2. Montrer que $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}$ est le nombre de $p-$uplets $(y_1, y_2, \cdots, y_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que: $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_p < n$.
   On pourra poser $x_i = y_i + (i-1)$ et se ramener au cas précédent.

3. Montrer que $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$ est le nombre de $p-$uplets $(z_1, z_2, \cdots, z_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que: $z_1 + z_2 + \cdots + z_p = n$
   On pourra poser $y_i = z_1 + \cdots + z_i$ et se ramener au cas précédent.
   Une autre méthode élégante consiste à coder les solutions: z_i remplacé par des 1 (dont la somme est z_i) et garder les symboles $+$. On conclut en comptant le nombre de tels codes.

4. Soit $1 \leq p \leq n$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$ où $n_i \in \mathbb{N}$. Compter le nombre $C_n^{n_1, n_2, \cdots, n_p}$ de $n-$uplets $X := (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{N}^p$ tels que $card\{i,\ x_i = k\} = n_k$ pour $k = 1, .., p$. Cela signifie que X contient n_1 fois le nombre 1, n_2 fois 2, $\ldots n_p$ fois p.

5. Exemples :

   (a) Combien y-a-t'il d'injections croissantes de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$?

   (b) 20 auteurs ont écrit des livres particulièrement intéressants pour réussir notre concours. On a un buget suffisant pour acheter 10 livres. Il va falloir faire un choix. On ne pourra pas avoir un livre par auteur. En revanche, on pourra avoir plusieurs livres du même auteur. Pour chaque achat possible de 10 livres,

on ne s'intéresse qu'aux *séquences* des nombres de livres achetés de chacun de ces auteurs recommandés.
Sachant que ces auteurs ont tous publié au moins 10 livres, pouvez vous trouver le nombre de séquences possibles?

(c) De Combien de façons peut-on partager 100 pièces de 1 Euro entre 5 personnes?

(d) Compter les anagrammes du mot : MATHEMATIQUE.

(e) Montrer que $(z_1 + z_2 + \cdots + z_p)^n = \displaystyle\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_p=n} C_n^{n_1,n_2,\cdots,n_p} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \cdots z_p^{n_p}$.
Caluler le nombre de termes de cette somme.
Développer $(x + y + z)^3$.

3 Séries entières et dénombrement

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ cherchez le nombre c_n de solution entières $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ de:
$$x_1 + 2x_2 = n.$$
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = f(z) := \frac{1}{(1-z)(1-z^2)}$ pour $|z| < 1$.
3. Recalculer c_n en développant f en série entière à l'origine.
4. Compter le nombre de solutions entières positives ou nulles de $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = n$, pour $0 \leq n \leq 10$.

4 Partitions et Séries entières

$\{\Omega_1, \cdots, \Omega_k\}$ est une partition de $\{1, \cdots, n\}$, si les Ω_j sont non vides, deux à deux disjoints, et si leur union est $\{1, \cdots, n\}$. On note p_n le nombre de partition de $\{1, \cdots, n\}$: $p_0 = 1$ (par convention), $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$.

1. Montrer que $p_{n+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} C_n^j p_{n-j}$.
2. On pose alors $f(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$. Montrer que $f \in C^\infty(]-1,1[)$.
3. Montrer que $f'(x) = e^x f(x)$. En déduire une expression de f.
4. Calculer le nombre de partition de $\{a, b, c, d, e, f, g\}$.
5. Montrer que $p_n = \displaystyle\frac{1}{e} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^n}{j!}$.
indication: développer en série entière $e^{(e^x)}$.
En redéduire p_7 en évaluant numériquement la série pour $n = 7$.

5 Corrigé succint :

5.1 Des livres sur une étagère

Solution succinte:*[1] 1.2 p. 6.*
On peut considérer que tous les livres sont différents. En effet cela ne change pas le résultat. On a ainsi $20! \simeq 2.433\,10^{18}$ *façons de mettre ces 20 livres sur l'étagère.*

1. *Pour le premier des 3 livres de G. on 18 places. On peut permuter les 3 livres de G. Reste à permuter les 17 livres restant.* $p_1 = 18.3!.17!/20! = 3/190 \simeq 0.0158$
Supposons que les trois livres de G. soient identiques. De même supposons que les 17 autres livres qui ne sont pas de G. soient identiques. Alors $p_1 = 18/C_{20}^3 = 18.3.2/(20.19.18) = 6/380 = 3/190$*. C'est le même résultat. En effet si on considère les livres de G. tous différents on multiplie par 3! le nombre de cas favorables mais aussi par 3! le nombre de cas possibles, ce qui finalement ne change pas les probabilités.*

   En conclusion, le fait que les livres de G. (ou les autres) soient différents ou pas ne changent pas la probabilités d'être à côté. C'est bien normal.

2. *On peut imaginer que l'on commence par mettre les 15 livres qui ne sont pas de G. Ce qui laisse 16 places pour mettre un ou des livres de G.: au début des 15, entre deux des 15, à la fin des 15. Regardons l'événement contraire: aucun livres de G ne sont à côté. Donc on a* $A_{16}^5 = 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 = 16!/11!$ *manière de ranger les livres de G. Reste à permuter les 15 livres restant.*

   $1 - p_2 = 15!.16!./(11!.20!) = 91/323$. $p_2 = 232/323 \simeq 0.72$.

5.2 Compter des $p-$uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$

Solution succinte:*[2] p. 32-34*

1. $p > n$ *donne O solutions.*
$p \leq n$*:* n *valeurs possibles :* $x_i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, C_n^p.
Finalement en notant que $C_n^p = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$ *on voit que cette formule convient pour tout* p.

2. $x_1 = y_1;\ x_2 = y_2 + 1;\ x_3 = y_3 + 2; \ldots;\ x_p = y_p + p - 1$, *ainsi* $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p = n + p - 1$. *solution :* $C_{n+p-1}^p = C_{n+p-1}^{n-1}$.

3. $y_1 = z_1;\ y_2 = z_1 + x_2;\ y_3 = z_1 + z_2 + z_3; \ldots;\ y_p = z_1 + \ldots + z_p = n$, *ainsi* $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_{p-1} \leq y_p = n < n+1$ *On a* $(p-1)$ y_i.
solution : $C_{(n+1)+(p-1)-1}^{p-1} = C_{n+p-1}^{p-1} = C_{n+p-1}^n$.

4. $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$, *On a* n *boules de* p *couleurs, soit* $n!$ *arrangement de ces boules. On* n_1 *boules de couleurs* 1, *comme on on ne distingue pas la permutation de ces* n_1 *boules, il faut diviser par* $n_1!$*. Et ainsi de suite:* $C_n^{n_1, n_2, \cdots, n_p} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_p!}$.

5. *Exemples :*

   (a) *injections croissantes:* C_n^p *si* $p \leq n$, 0 *si* $n < p$.

(b) x_i: nbre de livre de l'auteur i, $x_1+\cdots+x_{20}=10$ donne :
$C_{10+20-1}^{10}=C_{29}^{10}\simeq 2\times 10^7$.

(c) De Combien de façons peut-on partager 100 piéces de 1 Euro entre 5 personnes?
$x_1+\cdots+x_5=100$ donne $C_{104}^5=91962520\simeq 92$ millions
avec Maple :with(combinat, numbcomb): numbcomb(104, 5);

(d) MATHEMATIQUE a 12 lettres, 2 M, 2 A, 2 T, 2 E, 1 H, 1 Q, 1 U , 1 I. On a donc $C_{12}^{2,2,2,2,1,1,1,1}=\frac{12!}{2!^4}=29937600\simeq 30$ millions d'anagrammes du moth MATHEMATIQUE.

(e) Coefficients multinomiaux, [2] P. 34; on dvt , voir aussi Godement.
$n_1+n_2+\cdots+n_p=n$,$0\leq n_i$ donne C_{n+p-1}^p termes à sommer.
$(x+y+z)^3=x^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+3xz^2+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$; $C_{3+3-1}^3=C_5^3=C_5^2=5*4/2=10$ termes.

(f) Rab:
On achète 20 livres. On en range 10 sur une étagère. Donner un encadrement du nombre de façons de ranger 10 livres parmi ces 20 livres par ordre alphabétique du nom de l'auteur (peu importe le titre). Au minimum: S'il sont tous d'auteurs différents on en a $C_{20}^{10}=184756$. Au maximum: ??? l'autre cas extrème: tous du même auteurs donne$10!\simeq 3.6\times 10^6$.

5.3 Séries entières et dénombrement

Solution succinte:

1. n pair, $0\leq x_1=2k\leq n$, $c_n=n/2+1$.
   n impair, $1\leq x_1=2k+1\leq n$, $0\leq k\leq (n-1)/2$, $c_n=n/2+1/2$.

2. $1/(1-z)\times 1/(1-z^2)=(1+z+z^2+\cdots)(1+z^2+z^4+\cdots)$. écrire un produit de série.

3. $1/(1-z)\times 1/(1-z^2)=1/(1+z)\times 1/(1-z)^2=1/4\times 1/(1+z)+1/4\times 1/(1-z)+1/2\times 1/(1-z)^2$,
   par Bezout: algorithme d'Euclide $a=bq+r$, $pgcd(a,b)=pgcd(b,r)$ donne $4=(1+z)(3-z)+(1-z)^2$ d'où $1/(1+z)\times 1/(1-z)^2=1/4(1/(1+z)+(3-z)/(1-z)^2)=1/4(1/(1+z)+1/(1-z)+2/(1-z)^2)$
   ou comportement asuymptotique en ± 1.
   Pour le 1/4 il faut voir que $z=1-h$, on multiplie par h^2 et $1/(2-h)=1/4\times h^2/(2-h)+ah+1/2$, donc $a=1/4$.
   On calcule les dérivée susccessives en 0: $(1/(1+z))^{(k)}|_{z=0}=(-1)^k k!$, $(1/(1-z))^{(k)}|_{z=0}=k!$, $(1/(1-z)^2)^{(k)}|_{z=0}=(k+1)!$
   $n!c_n=1/4\times(-1)^n n!+1/4\times n!+1/2\times(n+1)!$,
   $c_n=(n+1)/2+((-1)^n+1)/4=n/2+1$ ou si n est impair$(n+1)/2$.
   $1/((1-z)*(1-z^2))=1+z+2z^2+2z^3+3z^4+3z^5+4z^6+4z^7+5z^8+5z^9+6z^{10}+O(z^{11})$

4. $1/((1-z)*(1-z^2)*(1-z^3))$
   $=1+z+2z^2+3z^3+4z^4+5z^5+7z^6+8z^7+10z^8+12z^9+14z^{10}+O(z^{11})$

RAB [5] p 231, ou [3] 9 p. 217, $r-$partition

1. Montrez que l'ensemble des $r-$partition de $\{1,\cdots,n\}$ est en bijection avec l'ensemble des $r-$uplets $(y_1,\cdots,y_r)$, tel que $y_1+2y_2+\cdots+ry_r=n$.

2. *En déduire que* $\dfrac{1}{(1-z)\cdots(1-z^r)} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,r}z^n$.

3. *Calculez* $b_{n,3}$.

5.4 Partitions et Séries entières

Solution succinte: *[6] p. 57 ou mieux [4] p 313. On note* p_n *le nombre de partition de* $\{1,\cdots,n\}$.

1. *Partition de* $\{1,\cdots,n,n+1\}$*sont du type :* $\{1\}\cup\ldots$ *i.e.* p_n, $\{1,a\}\cup\ldots$ *i.e.* $C_n^1p_{n-1}$, $\ldots$, $\{1,a_1,\ldots,a_k\}\cup\ldots$ *i.e.* $C_n^kp_{n-k}$. *Pui on somme.*
   rem:[4] par rec. $p_n \leq n!$

2. $a_n = p_n/n!$, $(n+1)a_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \dfrac{a_{n-j}}{j!}$.
   $R[f] = +\infty$ *car si* $r>0$, $a_n \leq Cr^n$ *pour* $n \geq N_0$. *En effet, par rec.,* $a_{n+1} \leq r^{n+1}/[(n+1)r]\sum_{j=0}^{n} r^{-j}/j! \leq r^{n+1}C/(n+1)e^{-r}/r$. *Il sufit de prendre* N_0 *tel que* $e^{-r} \leq N_0r$ *et* $C := \max_{0\leq n\leq N_0} a_n/r^n$.

3. *Montrez que* $f(x) = \exp(e^x-1)$. $f(0) = 1$.

4. $f''/f = e^x + e^{2x}$, $f^{(3)}/f = e^x + 3e^{2x} + e^{3x}$, $f^{(4)}/f = e^x + 7e^{2x} + 6e^{3x} + e^{4x}$, $f^{(5)}/f = e^x + 15e^{2x} + 25e^{3x} + 10e^{4x} + e^{5x}$, $f^{(6)}/f = e^x + 31e^{2x} + 90e^{3x} + 65e^{4x} + 15e^{5x} + e^{6x}$, $f^{(7)}/f = e^x + 63e^{2x} + 301e^{3x} + 350e^{4x} + 140e^{5x} + 21e^{6x} + e^{7x}$. $p_4 = 15$, $p_5 = 52$,$p_6 = 203$,$p_7 = 877$,$p_8 = 4140$,$p_9 = 21147$, $p_{10} = 115975$.

5. *Mieux [4] p 313.* $f(x) = 1/e\exp(e^x) = 1/e\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{e^{jx}}{j!} = 1/e\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{j!}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{j^nx^n}{n!} = 1/e\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{j^n}{j!}\right)\dfrac{x^n}{n!}$,
   donc $p_n = \dfrac{1}{e}\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{j^n}{j!} = \lim S_N$. *pour* p_7, $S_9 = 876.14278$, $S_{10} = 877.15656$, $S_{11} = 877.33616$.

References

[1] Cottrell

[2] Foata Fuchs

[3] Mazliak exos resolus

[4] Meunier, Exercice d'Oral corrigés et commentés pour l'agregation interne

[5] Pommelet

[6] Tisssier, agi