Indications pour la feuilles TD probas discrètes

I) Mise en jambes

1)

1. ½ pour l'aîné.
2. 1/3 car: (FF), (FG), (G,F), et (GG) hors jeu

2)

$(A\cap B)\subset C$ donc $P(A\cap B)\leq P(C)$ et $1\geq P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

3) → au moins un 6 en 4 lancers d'un dé: 1 -(5/6)^4 = 0.51...
au moins un double 6 en 24 lancers de deux dés: 1 – (35/36)^24= 0.49....

Avec 100 essais, on risque de ne pas s'en rendre compte (précision 3%)

Remarque avec un DL à l'ordre 1 on ne voit pas la différence:
(5/6)= (1-1/6)^4 = 1 – 4/6 + 4* 3/(2*6^2) + …
= 1 – 2/3 + 1/ 6 + ...
(35/36)^24=(1-1/36)^24= 1 – 24/36 + 24 **23/(**2*36^2)+ …
= 1 - 2/3 + 1/3 * 23/36 + …
à l'ordre 2: 23/36 > ½ bingo

Remarque: comment le Chevalier Méré a trouvé un tel pb?
Il a peut-être dû raisonné Faux sur les espérances (approximatives???) sans le savoir.
La probabilité d'avoir un 6 est 1/6, son espérance est 6, avec 4 essais ~ 6/4
" " double 6 est 1/36, " 36, avec 24 essais ".
Rab: calculer vraiment les espérances, on trouve moins que ce qu'il croyaiT

4) 1 – (35/36)^n > ½ <=> n > - ln(2)/ ln(1 -1/36) = 24.6 …
prendre $n\geq 25$

Si P(A)=0 ou P(B)=0 car $P(A\cap B)=P(\emptyset)=0=P(A)P(B)$.
Attention cela ne veut pas dire forcément dire que A est vide (ou B).

II) Probabilités conditionnelles.

1) Problème classique des maladie rares,
Notations: M = « malades », P(M)= m
S = « sain », P(S)= s = 1 – m
+ = « Test positif », - = « test négatif »

On a $P_M(+)=0.96$, $P_S(\text{-})=0.94$
le test a l'air bon mais voilà:
Mais on voit tout de suite que si la maladie est rare m~ 0, on 6% de déclaré malade!
écrire l'arbre, Debayes ..
on a $P_+(M)=\mu/P_S(+)=\mu/0.06$ avec $\mu=P(M\cap+)=P_M(+)P(M)$

On voit que si la maladie est rare la probabilité d'être malade

application numérique: m = 0.60 donne $P_+(M)=0.96$
m = 0.05 donne $P_+(M)=0.46..$

Le dernier cas est dangereux, cela signifie qu'on a peu près ½ de chance d'être sain quand le test est positif.
Le test est donc mauvais pour les maladies rares.
C'est normal: les maladies rares sont plus dures à dépister.

Parler des stratégies de dépistages dans ce cas (Populations à risque …)

2) Un chaîne de Markov à 2 états:
$p_{n+1}=p_n(1-p)+(1-p_n)p=r\,p_n+p$ avec $r=1-2\text{p}$
cas particulier $p=0$ alors $p_n=1$ car $p_0=1$, aucun menteur
$p=1$ alors $p_n=1+(-1)^n=0$ ou 1, car $r=-1$, tous menteurs
$p=1/2, p_n=1/2$, l'incertitude totale
cas général: $0<p<1,\ p_n=1/2+O(r^n)\rightarrow 1/2$

3) Il est conseiller de dessiner le carré unité. Avec un raisonnement sur les aires on obtient
$P_{\alpha<min(X,Y)}(max(X,Y)<\beta)=(\beta-\alpha)^2/(1-\alpha)^2$

III)

1)
suivre l'indication et faire les calculs dans l'algèbre de Boole.
N=3 se fait et vérifie directement à la main.
Il faut utiliser que si X suit une B(p), E(X)=p.
$1_{\overline{A_1}\cap\ldots\cap\overline{A_n}}=(1-1_{A_1})\ldots(1-1_{A_n})=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{i_1<..<i_k}1_{A_{i_1}}\ldots 1_{A_{i_k}}$
Puis prendre l'espérance et utiliser sa linéarité.

Applications problème des parapluies: n personnes reprennent au hasard leur parapluie mais ce n'est jamais le sien. Univers les permuations s de {1,..,n}
B={ s, s(i) # i pour tout i}, A_i = {s, s(i)=i} … P(B) → 1/e.

2)
$(Y=j)=(X=j\wedge Y=j)\cup(X=j+1\wedge Y=j)\cup\ldots\cup(X=n\wedge Y=j)$

$P(Y=j)=\sum_{i\geq j}P_{X=i}(Y=j)P(X=i)=1/n\sum_{i\geq j}1/i$
On a bien une loi, à vérifier (jeu sur les sommes doubles).

3)
série génératrice. On commence à 1 et on E(X)=1/p, Var(X)= (1-p)/p

4)
Q est à valeurs rationnelles strictement positives. Elle porte bien son nom.
1. r = a/b, a>0, b>0, pgcd(a,b)=1
$P(Q=r)=\sum_{k\geq 1}P(X=ka)P(Y=kb)=\sum_k p^2q^{k(a+b)-2}=p^2q^{a+b-2}/(1-q^{a+b})$
2. Il faut d'abord vérifier que E(Q) est fini.

Aprés on peut appliquer l'inégalité de Jensen 1/E(Q) <E(1/Q)
(Q non constante, x → 1/x strictement convexe) .
Comme Q ~ 1/Q on a donc 1 < E(Q)^2.

On peut remarquer aussi que P(Q=r)= P(Q=1/r) et (r + 1/r)/2 > 1 sauf si r=1.

Formule de transfert pour calculer E(Q).

On utilisera les égalités:
$-\ln(1-x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n},\ \frac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0}x^n,\ \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n\geq 1}n\,x^n$

$$E(Q)=\sum_{a,b\geq 1}\frac{a}{b}P(X=a)P(Y=b)=\sum_{a,b\geq 1}\frac{a}{b}pq^{a-1}pq^{b-1}$$
$$=\frac{p^2}{q^2}\sum_{a\geq 1}aq^a\sum_{b\geq 1}\frac{1}{b}q^b=\frac{p^2}{q^2}\frac{1}{(1-q)^2}(-\ln(1-q))=\frac{|\ln(p)|}{q^2}$$

5)
1. Il suffit d'écrire explicitement le coefficient binômial.
2. la somme vaut 1. (Avait-on besoin de le vérifier? Oui et on a convergence étroite)
3. Fonction génératrice E(X)=1/lambda
4. idem