$\mathbb{R}$: inf, sup, $\overline{\lim} = \limsup$, $\underline{\lim} = \liminf$

$\limsup u_n = \inf_n \sup_{k>n} u_n$, $\qquad \liminf u_n = \sup_n \inf_{k>n} u_n$,

$\limsup_{x\to a} f(x) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{|x-a|<\varepsilon} f(x)$, $\qquad \liminf_{x\to a} f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{|x-a|<\varepsilon} f(x)$.

1 Suites sous-additives

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle pour tout couple $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ on a $u_{n+p}\leq u_n+u_p$.

1. Soit $p>0$ quelconque, à l'aide de la division euclidienne de n par p, montrer que $\limsup \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p}$. En déduire que $\frac{u_n}{n}$ converge vers $\inf_{p>0} \frac{u_p}{p}$.
2. En déduire que si A est une matrice carrée à coefficients réels, et $\|.\|$ une norme matricielle alors $\|A^n\|^{1/n}$ converge vers $\inf_{p>0} \|A^p\|^{1/p}$.

2 Morphismes monstrueux

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(1)=1$ et $f(\sqrt{2})=1$.

1. Vérifier que f est $\mathbb{Q}$ linéaire et qu'elle existe bien.
2. Montrer que $\overline{\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}}=\mathbb{R}$.
   (Les sous groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont ou bien discret ($a\mathbb{Z}$) ou bien dense dans $\mathbb{R}$).
3. En déduire que pour tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$, $\sup f(I)=+\infty$ et $\overline{f(I)}=\mathbb{R}$.

3 Fonction s.c.i. (semi-continue inférieurement)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, s.c.i., c'est à dire que pour tout a, on a $\liminf_{x\to a} f(x)\geq f(a)$.

1. Vérifier que les fonctions suivantes sont s.c.i: une fonction continue, l'indicatrice d'un intervalle ouvert, le sup de fonctions s.c.i.
2. Montrer que :$\forall a\in\mathbb{R}, \forall\varepsilon>0, \exists\eta>0, |x-a|<\eta \Rightarrow f(a)-\varepsilon\leq f(x)$.
3. Montrer que toute fonction s.c.i. admet un minimum sur tout segment $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$.
4. La théorie des équations différentielles permet de montrer que le temps de vie $T(x_0)$ de la solution maximale d'une équation différentielle de condition initiale x_0 vérifie que pour tout $T<T(x_0)$, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $y_0\in V$, $T(y_0)>T$.
   Montrer que $T(.)$ est s.c.i.

Références: de cours avec des exemples corrigés

- [R1], Rudin, Principes d'Analyse Mathématique.
- [TM], Tissier & Mialet, Analyse à une variable réelle.
- [ZQ], Zuily-Queffelec, Eléments d'Analyse pour l'Agrégation.