Méthode volumes finis

Stella Krell

13 mai 2007

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce travail est l'étude d'une approximation de la solution d'un problème elliptique, appelé "équation de Laplace", par une méthode de volumes finis.

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) & = & f(x), & x \in \Omega, \\ u(s) & = & g(u(s), s), & s \in \partial\Omega. \end{array} \tag{1.1}$$

où l'on fait les hypothèses suivantes,

- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à frontière polygonale ou régulière,
- $f \in L^2(\Omega)$
- la fonction $g \in L^2(\partial\Omega)$ est définie suivant les différentes conditions limites qui seront exposées dans le deuxième chapitre :
  1. $u(s) = g(s)$, pour $s \in \partial\Omega$. Condition de Dirichlet
  2. $(\nabla u(s), \vec{n}) = g(s)$, pour $s \in \partial\Omega$. Condition de Neumann ($\vec{n}$ la normale extérieure du domaine)
  3. $-(\nabla u(s), \vec{n}) = \lambda(u(s) - g(s))$, pour $s \in \partial\Omega$. Condition de Fourier ($\lambda > 0$).

Dans le deuxième chapitre, on rappelle la méthode de volumes finis VF classique et une méthode plus atypique VF4. En effet, la méthode VF4 tolère des mailles non conservatives sur une interface de taille négligeable par rapport au domaine. L'estimation d'erreur entre la soluton exacte et la solution approchée pour ces deux schémas sera démontrée et illustrée par des exemples. Ensuite, on souhaite généraliser la méthode de volumes finis VF en enlevant certaines contraintes sur un maillage admissible en une méthode appelée "Discrete Duality Finite Volume" DDFV.

En effet, l'hypothèse d'orthogonalité de la droite reliant deux noeuds voisins $x_\mathcal{K} x_\mathcal{L}$ avec l'arête $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$ ne sera plus imposée. Et on élargira la définition d'arête. Un sommet d'une arête σ peut couper une autre arête à un autre point que son "sommet" (figure 1.1). Le troisième chapitre sera consacré à l'étude de la méthode DDFV. Sa première partie généralise le maillage appelé maillage primal et introduit un nouveau maillage appelé le maillage dual dont ses noeuds sont les sommets du maillage primal.

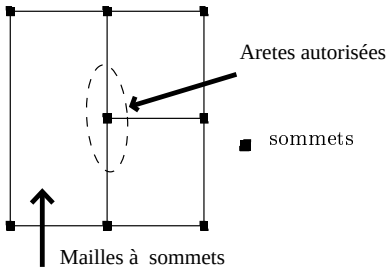

FIG. 1.1 – Arêtes autorisées

Dans ses deuxième et troisième parties, ces généralisations amènent à définir un gradient discret ainsi qu'une divergence discrète pour vérifier une formule de Green discrète. Le gradient discret est défini de manière à pouvoir se ramener à la méthode VF si on a un maillage admissible. La quatrième partie joue avec les conditions

limites en présentant un schéma numérique associé qui a une unique solution. Dans la cinquième partie, on estime l'erreur de la solution exacte du problème et la solution approchée par la méthode DDFV. C'est pour enlever des restrictions sur le maillage et pour obtenir un ordre de convergence de $\text{size}(\mathcal{T})$ au lieu de $\text{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}}$ que la méthode DDFV a été introduite.

Le quatrième chapitre présente la méthode de Schwarz. Sa première partie expose la convergence de la méthode de Schwarz d'abord dans un cadre continu ensuite dans un cadre discret pour la méthode VF4. Sa deuxième partie explique la méthode de Schwarz dans un cadre discret pour la méthode DDFV et sa "convergence".

Chapitre 2

Volumes Finis

2.1 Cas classique

2.1.1 Définition

On définit tout d'abord un maillage admissible.

Définition 1 (Maillage admissible).

Soit Ω un ouvert polygonal borné de $\mathbb{R}^2$.
Un maillage $\mathcal{T}$ admissible de Ω au sens des volumes finis est donné par :

1. *un ensemble $\mathfrak{M}$ d'ouverts polygonaux convexes disjoints 2 à 2, appelés volumes de contrôle κ, tels que $\overline{\bigcup_{\kappa} \kappa} = \overline{\Omega}$. On note $\partial\mathfrak{M}$ l'ensemble des bords de volume de contrôle de $\mathfrak{M}$ inclus dans $\partial\Omega$ qui sont considérés comme des volumes de contrôles dégénérés.*
2. *Pour tous les volumes de contrôle voisins κ et $\mathcal{L}$, on suppose que $\partial\kappa \cap \partial\mathcal{L}$ est un côté de chaque volume de contrôle, et il est appelé arête σ du maillage $\mathcal{T}$, notée $\sigma = \kappa|\mathcal{L}$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces arêtes.*
3. *A chaque volume de contrôle $\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$, on associe un point $x_\kappa \in \overline{\kappa}$. On impose pour $\sigma = \kappa|\mathcal{L}$ que la ligne joignant x_κ à $x_\mathcal{L}$ est orthogonale à l'arête $\sigma = \kappa|\mathcal{L}$ (figure 2.1) et pour $\sigma \in \partial\Omega \cap \overline{\kappa}$ que la ligne joignant x_κ à x_σ est orthogonale à l'arête σ.*

Notations :

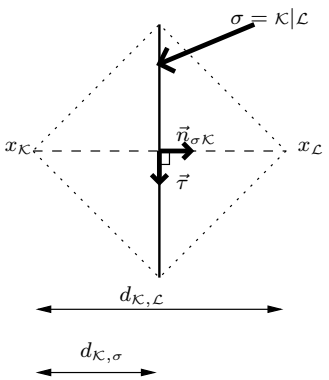

FIG. 2.1 – Notation

Pour un volume de contrôle $\kappa \in \mathfrak{M}$, on définit :
- m_κ la mesure de ma maille κ,
- $\mathcal{E}_\kappa$ l'ensemble des arêtes de $\kappa \in \mathfrak{M}$,
- $\vec{n}_\kappa$ la normale extérieure à κ,
- d_κ le diamétre de κ.

- m_σ la longueur de l'arête σ, $d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = d_{\mathcal{K},\sigma} + d_{\mathcal{L},\sigma}$ la distance orthogonale entre $x_\mathcal{K}$ et $x_\mathcal{L}$.
- $\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}$ la normale à σ sortant de $\mathcal{K}$,
- $\vec{\tau}$ la tangente à σ.

La méthode des volumes finis associe, à chaque volume de contrôle $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, une inconnue $u_\mathcal{K}$ et à $\sigma \in \partial\mathfrak{M}$, une inconnue u_σ.

2.1.2 Schéma

On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) & = & f(x), & x \in \Omega, \\ u(s) & = & g(s), & s \in \partial\Omega. \end{array} \tag{2.1}$$

où l'on fait les hypothèses suivantes,
- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à frontière polygonale ou régulière,
- $f \in L^2(\Omega)$
- la fonction $g \in L^2(\partial\Omega)$.

On intégre l'équation sur chaque volume de contrôle $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\mathcal{K} f(x)\mathrm{d}x & = & \displaystyle -\int_\mathcal{K} \Delta u(x)\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle -\int_{\partial\mathcal{K}} (\nabla u(s), \vec{n}_\mathcal{K})\mathrm{d}s \\ & = & \displaystyle -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} \int_\sigma (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s \end{array}$$

On impose $u_\sigma = g(x_\sigma)$ pour $\sigma \in \partial\mathfrak{M}$. Le schéma VF4 s'écrit pour toutes mailles $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma F_{\mathcal{K},\sigma} = m_\mathcal{K} f_\mathcal{K}$$

avec $F_{\mathcal{K},\sigma} = \dfrac{u_\mathcal{K} - u_\sigma}{d_{\mathcal{K},\sigma}}$ et $f_\mathcal{K} = \dfrac{1}{m_\mathcal{K}} \displaystyle\int_\mathcal{K} f(x)\mathrm{d}x$.

On note $u^\mathcal{T}$ la solution approchée de ce schéma. La conservation du flux numérique impose $F_{\mathcal{K},\sigma} = -F_{\mathcal{L},\sigma}$. On peut éliminer u_σ :

$$\begin{array}{rcl} F_{\mathcal{K},\sigma} & = & -F_{\mathcal{L},\sigma} \\ \dfrac{u_\mathcal{K} - u_\sigma}{d_{\mathcal{K},\sigma}} & = & -\dfrac{u_\mathcal{L} - u_\sigma}{d_{\mathcal{L},\sigma}} \\ u_\sigma & = & \dfrac{d_{\mathcal{L},\sigma} u_\mathcal{K} + d_{\mathcal{K},\sigma} u_\mathcal{L}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} \end{array}$$

Ainsi on peut écrire

$$F_{\mathcal{K},\sigma} = \frac{u_\mathcal{K} - u_\mathcal{L}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}}.$$

2.1.3 Exemples

Pour le domaine $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ dont le premier maillage est coupé en cinq en abscisse et en ordonné. Ensuite on raffine le maillage en découpant chaque arête en deux, ceci trois fois pour obtenir quatre maillages de plus en plus fin.
- Test 2 : Condition de Dirichlet homogène

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x,y) & = & 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y), & x, y \in \Omega, \\ u(s) & = & 0, & s \in \partial\Omega. \end{array}$$

  La solution exacte est :

$$u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

- Test 5 : Condition de Dirichlet non homogène

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= \left((x+1)^2+(y+1)^2\right)^{\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{(x+1)(y+1)}{2}\right) - \frac{3}{2}(x+1)(y+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1)^3, & x,y \in \Omega, \\ u(x,y) &= \sin\left(\tfrac{(x+1)(y+1)}{2}\right) + \tfrac{1}{4}(x+1)^3(y+1)^2, & x,y \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

La solution exacte est :

$$u(x,y) = \sin\left(\frac{(x+1)(y+1)}{2}\right) + \frac{1}{4}(x+1)^3(y+1)^2$$

Remarque 1 : C'est un problème raide. En effet, $u(1,1)$ est très grand comparé aux autres valeurs de la fonction.

Le logarithme de la norme H^1 de l'erreur entre la solution approchée $u^{\mathcal{T}}$ et la solution exacte u en fonction du logarithme du pas du maillage est représentée pour le test 2 (figure 2.2) et pour le test 5 (figure 2.3). L'ordre de convergence en norme H^1 est plus grand que 1.

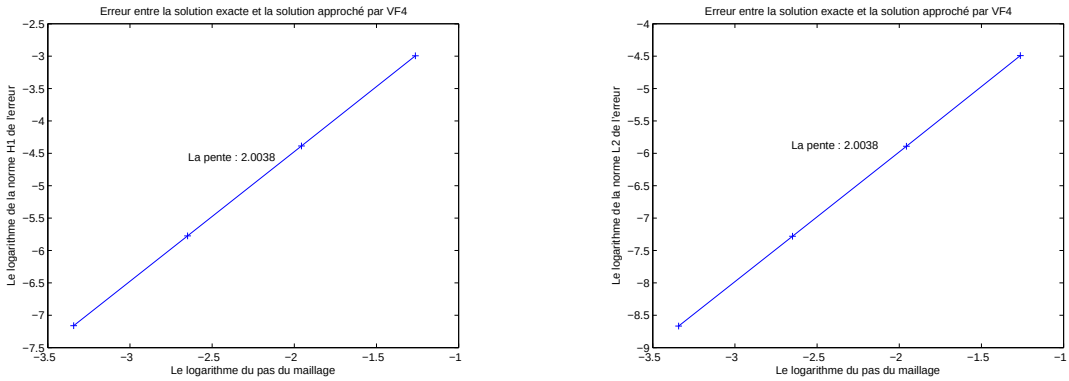

FIG. 2.2 – L'erreur en norme H^1 (à gauche) en norme L^2 (à droite) pour le test 2

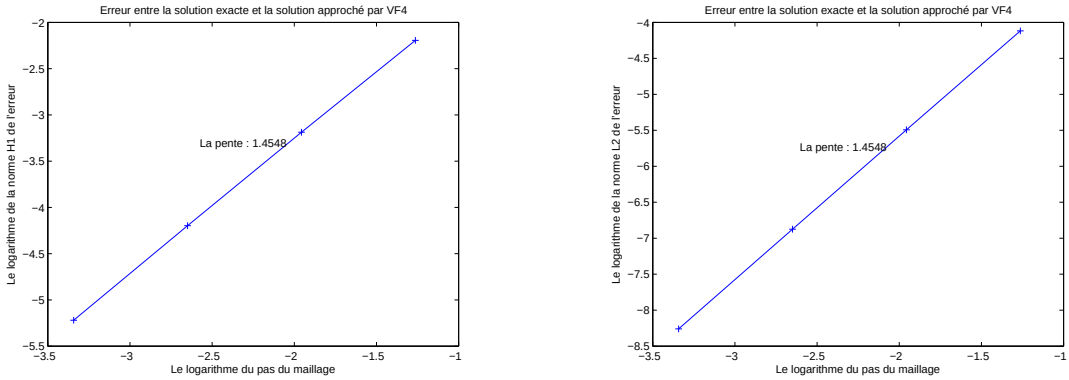

FIG. 2.3 – L'erreur en norme H^1 (à gauche) en norme L^2 (à droite) pour le test 5

2.1.4 Estimation d'erreur

Théorème 1.

On suppose que u la solution exacte du problème (2.1) est de classe C^3. Le schéma converge et cette convergence est d'ordre $\frac{3}{2}$.

Démonstration : On note la semi-norme H^1 discrète, $|.|_{1,\mathcal{T}}$:

$$|e|_{1,\mathcal{T}}^2 = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \left|\frac{e_{\mathcal{K}} - e_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}}\right|^2$$

On a intégré l'équation du problème (2.1) sur chaque volume de contrôle $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$:

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \int_\sigma -(\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s = m_{\mathcal{K}} f_{\mathcal{K}}$$

Le schéma VF4 s'écrit pour toutes mailles $\kappa \in \mathfrak{M}$,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma F_{\mathcal{K},\sigma} = m_\mathcal{K} f_\mathcal{K}$$

avec $F_{\mathcal{K},\sigma} = \dfrac{u_\mathcal{K} - u_\mathcal{L}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}}$. Donc on a

$$-\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} \int_\sigma (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma F_{\mathcal{K},\sigma}$$

On l'écrit sous la forme :

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma \overline{F}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} \underbrace{\left(\int_\sigma -(\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s - m_\sigma \overline{F}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)}_{=R_{\mathcal{K},\mathcal{L}}}$$

où $\overline{F}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \dfrac{u(x_\mathcal{K}) - u(x_\mathcal{L})}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}}$.
On remarque que $R_{\mathcal{K},\sigma} = -R_{\mathcal{L},\sigma}$, on pose $|R_{\mathcal{K},\sigma}| = R_\sigma$. On définit alors l'erreur $e_\mathcal{K}$ comme la différence entre la solution approchée et la solution exacte : $e_\mathcal{K} = u_\mathcal{K} - u(x_\mathcal{K})$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma R_{\mathcal{K},\sigma} &= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma \left(F_{\mathcal{K},\sigma} - \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}\right) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma \frac{e_\mathcal{K} - e_\mathcal{L}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}}
\end{aligned}$$

Si on multiplie par $e_\mathcal{K}$ puis on somme sur toutes les mailles $\kappa \in \mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma R_{\mathcal{K},\sigma} e_\mathcal{K} &= \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma \frac{e_\mathcal{K} - e_\mathcal{L}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} e_\mathcal{K} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \left(\frac{e_\mathcal{K} - e_\mathcal{L}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}}\right)^2 \\
&= |e|^2_{1,\mathcal{T}}
\end{aligned}$$

On retrouve la semi norme discrète de l'erreur :

$$\begin{aligned}
|e|^2_{1,\mathcal{T}} &= \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma R_{\mathcal{K},\sigma} e_\mathcal{K} \\
&\leq \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma R_\sigma |e_\mathcal{K} - e_\mathcal{L}| \\
&\leq \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} R_\sigma \frac{|e_\mathcal{K} - e_\mathcal{L}|}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} \\
&\leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \left|\frac{e_\mathcal{K} - e_\mathcal{L}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} |R_\sigma|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Il reste à l'évaluer l'erreur de consistance R_σ.

Pour simplifier le calcul, on pose $x_\mathcal{K} = (0,h)$ et $x_\mathcal{L} = (0,0)$ et $\sigma = \left[-\dfrac{h}{2}, \dfrac{h}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{K},\sigma} &= -\frac{1}{m_\sigma} \int_\sigma (\nabla u(s), \vec{n}_\mathcal{K})\mathrm{d}s - \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} \\
&= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_y(0,s)\mathrm{d}s - \frac{u(x_\mathcal{K}) - u(x_\mathcal{L})}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left(h u_y(0,0) + \frac{h^3}{24} u_{yyy}(0,\xi_1)\right) - \frac{1}{h}\left(h u_y(0,0) + \frac{h^2}{2} u_{yy}(0,0) + \frac{h^3}{6} u_{yyy}(0,\xi_2)\right) \\
&\leq Ch||u_{yy}||_\infty
\end{aligned}$$

où $\xi_i \in \left[-\dfrac{h}{2}, \dfrac{h}{2}\right]$ en utilisant une formule de Taylor.

On obtient que $\forall\ \sigma \in \mathcal{E}$:

$$R_\sigma \leq Ch$$

Donc

$$\begin{aligned}
|e|_{1,\mathcal{T}} &\leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}|R_\sigma|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Ch\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Ch^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Ch^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

■

2.2 Cas atypique : VF4

La méthode VF4 tolère que l'hypothèse d'orthogonalité soit enlevée, c'est-à-dire que la ligne joignant $x_\mathcal{K}$ à $x_\mathcal{L}$ ne doit plus être orthogonale à l'arête $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$. On peut voir un maillage de la forme suivante (figure 2.4) :

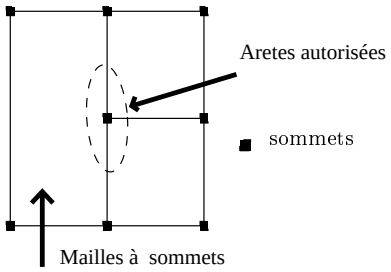

FIG. 2.4 – Arête atypique

Ainsi, la définition d'arête est changée : Pour tous les volumes de contrôles voisins $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$, on suppose $\partial\mathcal{K}\cap\partial\mathcal{L}$ est un segment noté $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$. On peut choisir la distance entre $x_\mathcal{K}$ et $x_\mathcal{L}$ de deux manières différentes :

1. on choisit $d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$ comme la **vraie** distance entre $x_\mathcal{K}$ et $x_\mathcal{L}$.

2. on choisit $d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$ comme la distance **orthogonale** entre $x_\mathcal{K}$ et $x_\mathcal{L}$ (figure 2.5).

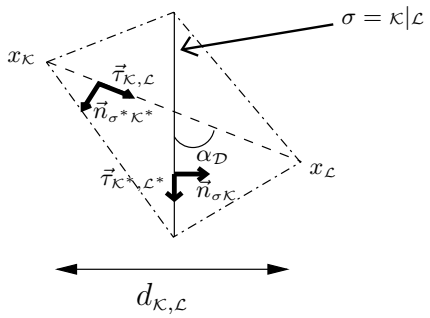

FIG. 2.5 – Arête atypique

2.2.1 Schéma

On s'intéresse toujours au problème (2.1).
Le schéma VF4 s'écrit de la même manière pour toutes mailles $\mathcal{K}\in\mathfrak{M}$,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma F_{\mathcal{K},\sigma} = m_\mathcal{K} f_\mathcal{K}$$

2.2.2 Exemples

Pour le domaine $\Omega = [-1,1]\times[0,1]$ dont le premier maillage est (figure 2.6) le suivant : on coupe $[-1,0]\times[0,1]$ en quatre en abscisse et en ordonné et $[0,1]\times[0,1]$ en huit en abscisse et en ordonné. Ensuite on raffine le maillage en découpant chaque arête en deux, ceci six fois pour obtenir sept maillages de plus en plus fin.

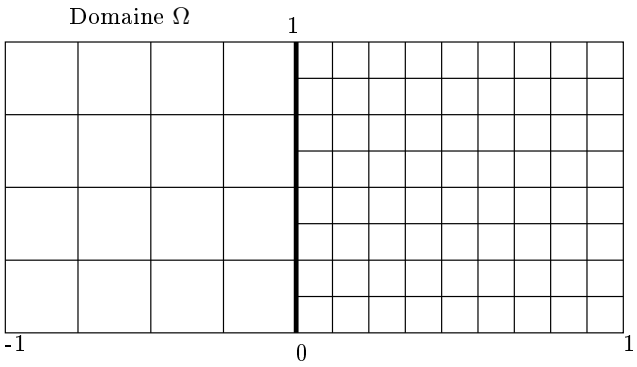

FIG. 2.6 – Le domaine Ω

- Test 2 : On rappelle la solution exacte :

$$u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

Remarque 2 : On a

$$\forall\ z \in [0,1], \quad u_y(0,z) = 0.$$

- Test 5 : On rappelle la solution exacte :

$$u(x,y) = \sin\left(\frac{(x+1)(y+1)}{2}\right) + \frac{1}{4}(x+1)^3(y+1)^2$$

Remarque 3 : On a

$$\forall\ z \in [0,1], \quad u_y(0,z) \neq 0.$$

1. On choisit $d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$ comme la **vraie** distance entre $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$.
   Le logarithme de la norme H^1 de l'erreur entre la solution approchée $u^{\mathcal{T}}$ et la solution exacte u en fonction du logarithme du pas du maillage est représentée pour le test 2 (figure 2.7) et pour le test 5 (figure 2.8). L'ordre de convergence en norme H^1 est de $\frac{1}{2}$.

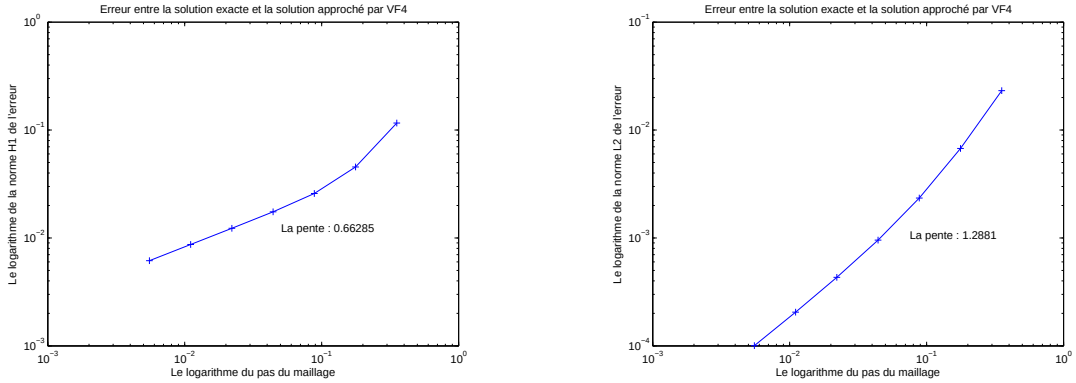

FIG. 2.7 – L'erreur en norme H^1 (à gauche) en norme L^2 (à droite) pour le test 2

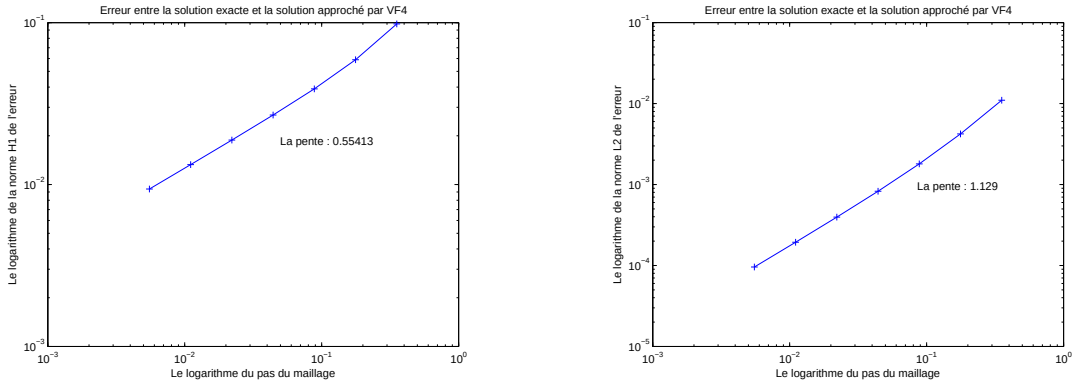

FIG. 2.8 – L'erreur en norme H^1 (à gauche) en norme L^2 (à droite) pour le test 5

2. On choisit $d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$ comme la distance **orthogonale** entre $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$ (figure 2.5). On trace les mêmes graphiques pour le test 2 (figure 2.9) et pour le test 5 (figure 2.10). L'ordre de convergence en norme H^1 est plus grand que 1 dans le test 2 et de $\frac{1}{2}$ pour le test 5. Cette différence vient du choix de la distance orthogonale et du fait que dans le test 5, on a :

$$\forall\ z \in [0,1], \quad u_y(0,y) \neq 0.$$

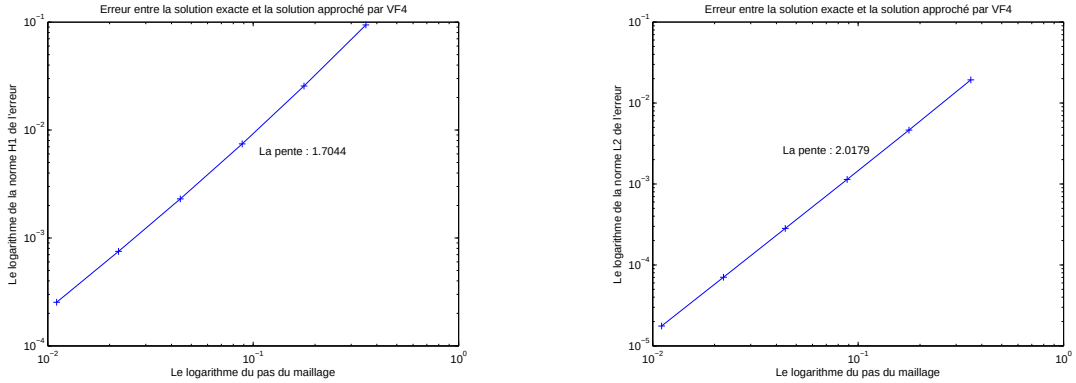

FIG. 2.9 – L'erreur en norme H^1 (à gauche) en norme L^2 (à droite) pour le test 2

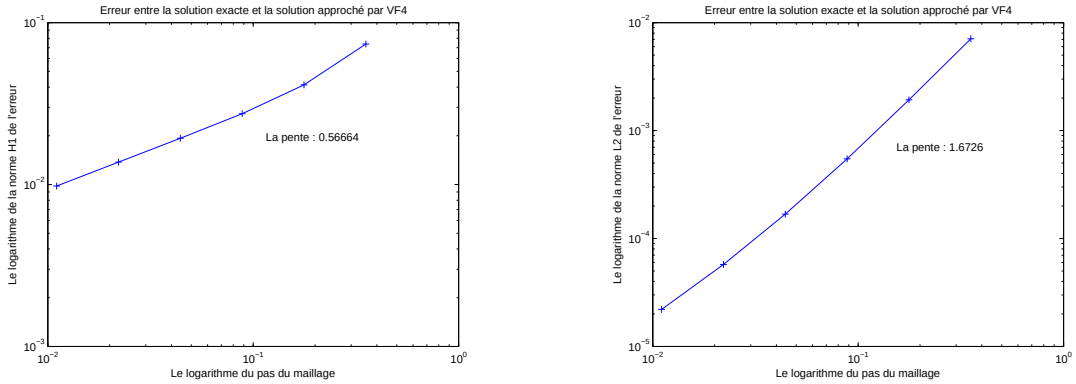

FIG. 2.10 – L'erreur en norme H^1 (à gauche) en norme L^2 (à droite) pour le test 5

2.2.3 Estimation d'erreur

Théorème 2.

On suppose que u la solution exacte du problème (4.10) est de classe C^3. Le schéma convergence et cette convergence est d'ordre $\frac{1}{2}$. De plus si on suppose que le domaine Ω est découpé de la même manière que dans la figure 2.6, c'est-à-dire un domaine avec des arêtes de longueur $2h$ et l'autre avec des arêtes de longueur h telles que à l'interface cela coïncident. Dans ce cas là, si $\forall\ z \in [0,1], \quad u_y(0,z) = 0$, on a un ordre de convergence de $\frac{3}{2}$.

Démonstration : On reprend le calcul effectué dans la première partie. La différence se situe dans le calcul de l'erreur de consistance R_σ. On a donc le résultat suivant :

$$|e|^2_{1,\mathcal{T}} \quad \leq \quad \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \left|\frac{e_\mathcal{K} - e_\mathcal{L}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} |R_\sigma|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Il reste à l'évaluer l'erreur de consistance R_σ. On va distinguer deux cas :
Premier Cas : $(\vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}, \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*}) = 0$, on a l'hypothèse d'orthogonalité. On a alors comme dans la première partie :

$$R_{\mathcal{K},\sigma} \quad \leq \quad Ch$$

Deuxième Cas : $(\vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}, \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*}) \neq 0$.

Pour simplifier le calcul, on pose pour $z \in [0,1]$, $x_\mathcal{K} = (-h, z)$ et $x_\mathcal{L} = \left(\frac{h}{2}, z + \frac{h}{2}\right)$ et $\sigma = [0,h]$, on a alors la distance entre $x_\mathcal{K}$ et $x_\mathcal{L}$ de $d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \alpha h$:

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{K},\sigma} &= -\frac{1}{m_\sigma}\int_\sigma (\nabla u(s), \vec{n}_\mathcal{K})\mathrm{d}s - \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} \\
&= -\frac{1}{h}\int_0^h u_x(s,z)\mathrm{d}s - \frac{u(x_\mathcal{K}) - u(x_\mathcal{L})}{\alpha h} \\
&= -\frac{1}{h}\left(hu_x(0,z) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(0,z) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(\xi_1,z)\right) - \frac{1}{\alpha h}\left(u(0,z) - hu_x(0,z) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(0,z) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(\xi_2,z)\right) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha h}\left(u(0,z) + \frac{h}{2}u_x(0,z) + \frac{h}{2}u_y(0,z) + \frac{h^2}{8}u_{xx}(0,z) + \frac{h^2}{8}u_{yy}(0,z) + \frac{h^2}{2}u_{xy}(0,z) + \Theta(h^3)\right) \\
&= u_x(0,z)\left(-1 + \frac{3}{2\alpha}\right) + \frac{1}{2\alpha}u_y(0,z) + \Theta(h)
\end{aligned}$$

où $\xi_i \in [0,h]$.

- Ainsi si on suppose le domaine Ω comme dans la figure 2.6 et si

$$\forall\ z \in [0,1], \quad u_y(0,z) = 0.$$

  On obtient alors en prenant comme distance $d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$ la distance orthogonale que $\alpha = \dfrac{3}{2}$ et $R_{\mathcal{K},\sigma} = \dfrac{1}{3}u_y(0,z) + \Theta(h)$. Donc $\forall\ \sigma \in \mathcal{E}$:

$$R_\sigma \leq Ch$$

  D'où

$$\begin{aligned}
|e|_{1,\mathcal{T}} &\leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}|R_\sigma|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Ch\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Ch^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Ch^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

- sinon on obtient que $\forall\ \sigma \in \mathcal{E}$:

$$R_\sigma \leq C$$

  Donc

$$\begin{aligned}
|e|_{1,\mathcal{T}} &\leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}|R_\sigma|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m_\sigma d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Ch^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Ch^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Schéma DDFV

3.1 Notations

Définition 2 (Le maillage).

Notre mailllage $\mathcal{T}$ est constitué d'un maillage primal $\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ (figure 3.1) et d'un maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ (figure 3.2).

- *Le maillage $\mathfrak{M}$ est un ensemble de polygones disjoints appelés volumes de contrôles $\kappa \in \Omega$ tels que $\cup\overline{\kappa} = \overline{\Omega}$. On note $\partial\mathfrak{M}$ l'ensemble des bords de volume de contrôle de $\mathfrak{M}$ inclus dans $\partial\Omega$ qui sont considérés comme des volumes de contrôles dégénérés. A chaque maille primale $\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$, on associe un point x_κ. On a ainsi une famille de points $X = \{x_\kappa,\ \kappa \in \mathfrak{M}\} \cup \{x_\kappa,\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}\}$, appelés noeuds du maillage primal.*

- *Les noeuds du maillage dual sont les sommets du maillage primal X^*. L'ensemble X^* se décompose en $X^* = X^*_{int} \cup X^*_{ext}$ où $X^*_{int} \cap \partial\Omega = \emptyset$ et $X^*_{ext} \subset \partial\Omega$. Les ensembles $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ sont deux familles de volumes de contrôle duaux. A chaque point $x_{\kappa^*} \in X^*_{int}$ (respectivement $x_{\kappa^*} \in X^*_{ext}$), on associe un polygone κ^* où ses sommets sont $\{x_\kappa \in X,\ \text{tel que } x_{\kappa^*} \in \overline{\kappa},\ \kappa \in \mathfrak{M}\}$ (respectivement $\{x_{\kappa^*}\} \cup \{x_\kappa \in X,\ \text{tel que } x_{\kappa^*} \in \overline{\kappa},\ \kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})\}$). On suppose que l'intérieur des volumes de contrôle du dual sont tous disjoints.*

- *Pour tous les volumes de contrôle voisins κ et $\mathcal{L}$, on suppose que $\partial\kappa \cap \partial\mathcal{L}$ est un segment que l'on appelle une arête σ du maillage primal $\mathfrak{M}$, notée $\sigma = \kappa|\mathcal{L}$. D'après cette définition, on peut voir les arêtes de la figure 1.1. On pose $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces arêtes.*

- *On note de même $\sigma^* = \kappa^*|\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{E}^*$ pour le maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$.*

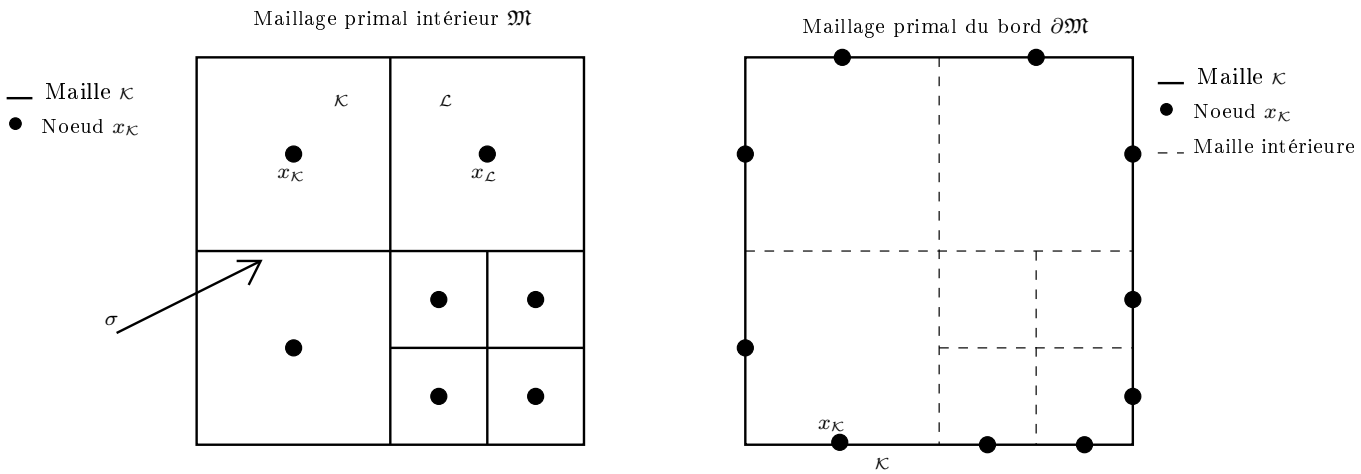

FIG. 3.1 – Le maillage primal intérieur $\mathfrak{M}$ et du bord $\partial\mathfrak{M}$

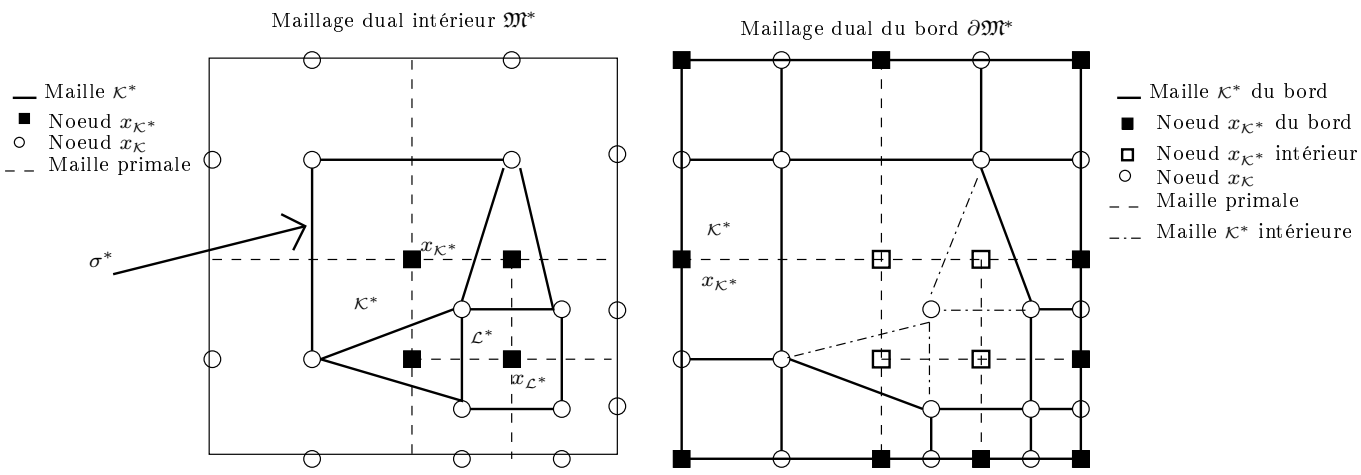

FIG. 3.2 – Le maillage dual intérieur $\mathfrak{M}^*$ et du bord $\partial\mathfrak{M}^*$

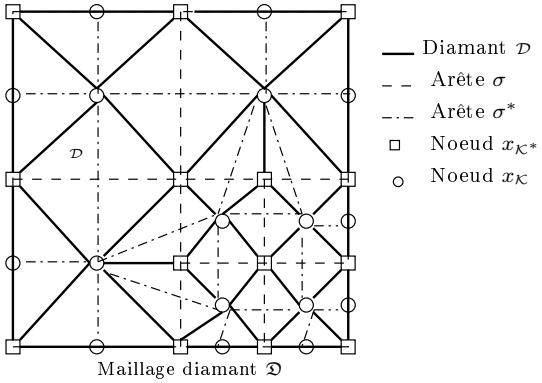

FIG. 3.3 – Le maillage diamant $\mathfrak{D}$

Définition 3 (Les diamants).

Grâce aux mailles primales et duales, on définit les diamants $\mathcal{D}$ (figure 3.3) du maillage tels que leurs diagonales principales soient une arête primale $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} = (x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}^*})$ et une duale $\sigma^* = \mathcal{K}^*|\mathcal{L}^* = (x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}})$, d'où la notation $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}$ (figure 3.4).
On remarque que les diamants sont une réunion de deux triangles disjoints et ne sont pas forcément convexes. En outre, si $\sigma \in \mathcal{E} \cap \partial\overline{\Omega}$, le quadrilatère $\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}$ est dégénéré, c'est un triangle. L'ensemble des diamants est noté $\mathfrak{D}$ et on a $\overline{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} \overline{\mathcal{D}}$. On a également que les intérieurs des diamants sont disjoints.

Notations :

Pour un volume de contrôle $\mathcal{K} \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$, on définit :
- $m_{\mathcal{K}}$ la mesure de ma maille $\mathcal{K}$,
- $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ l'ensemble des arêtes de $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et l'arête $\sigma = \mathcal{K}$ pour $\mathcal{K} \in \partial\mathfrak{M}$,
- $\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} = \{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D},\ \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}\}$,
- $\vec{n}_{\mathcal{K}}$ la normale extérieure à $\mathcal{K}$,
- $d_{\mathcal{K}}$ le diamétre de $\mathcal{K}$.

De même pour un volume de contrôle $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$, on définit :
- $m_{\mathcal{K}^*}$ la mesure de ma maille $\mathcal{K}^*$,
- $\mathcal{E}_{\mathcal{K}^*}$ l'ensemble des arêtes de $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$,
- $\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*} = \{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D},\ \sigma^* \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}^*}\}$,
- $\vec{n}_{\mathcal{K}^*}$ la normale extérieure à $\mathcal{K}^*$,
- $d_{\mathcal{K}^*}$ le diamétre de $\mathcal{K}^*$.

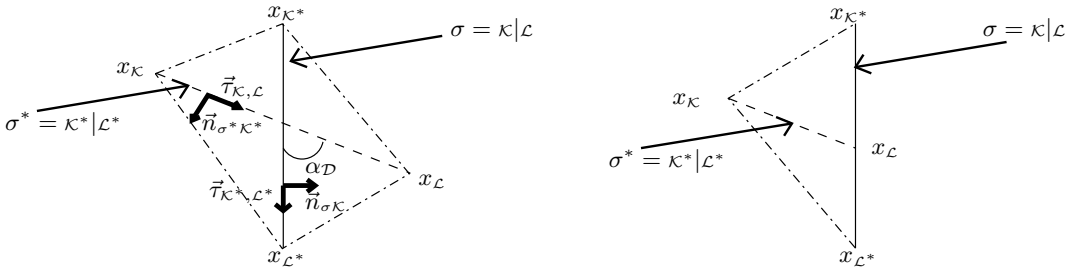

FIG. 3.4 – Le diamant $\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}$

Pour un diamant $\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}$ dont les sommets sont $(x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}, x_{\mathcal{L}^*})$, on note :
- m_σ la longueur de l'arête σ, m_{σ^*} la longueur de l'arête σ^*, $m_{\mathcal{D}}$ la mesure du diamant $\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}$,
- $\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}$ la normale à σ sortant de $\mathcal{K}$,
- $\vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}$ la normale à σ^* sortant de $\mathcal{K}^*$,
- $\vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \dfrac{\overrightarrow{x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}}}{\left\|\overrightarrow{x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}}\right\|}$ la tangente à σ^* (de $\mathcal{K}$ à $\mathcal{L}$),
- $\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*} = \dfrac{\overrightarrow{x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}}}{\left\|\overrightarrow{x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}}\right\|}$ la tangente à σ (de $\mathcal{K}^*$ à $\mathcal{L}^*$),
- $\alpha_{\mathcal{D}}$ l'angle entre $\vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$ et $\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*}$,
- $\sin \alpha_{\mathcal{T}} = \min\limits_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\sin \alpha_{\mathcal{D}}|$,
- $d_{\mathcal{D}}$ le diamétre de $\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}$.

On a les relations suivantes avec $\alpha_{\mathcal{D}} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:
- $\vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \cdot \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} = 0$
- $\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*} \cdot \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} = \sin \alpha_{\mathcal{D}}$
- $\vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \cdot \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}} = \sin \alpha_{\mathcal{D}}$
- $\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*} \cdot \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}} = 0$

La méthode des volumes finis associe, à chaque volume de contrôle primal $\mathcal{K} \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$, une inconnue $u_{\mathcal{K}}$ et, à chaque volume de contrôle dual $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$, une inconnue $u_{\mathcal{K}^*}$. On a deux fois plus d'inconnues que dans la méthode classique VF, mais cela permet de définir une approximation complète du gradient et pas uniquement dans la direction normale.

Définition 4.

On définit l'espace d'approximation $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ du maillage $\mathcal{T}$. Ainsi les éléments de $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ sont définis sur chaque maille de la manière suivante :

$$u^{\mathcal{T}} = \left((u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in(\mathfrak{M}\cup\partial\mathfrak{M})}, (u_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} \right)$$

On aura besoin de projeter des fonctions du bord $\partial\Omega$ sur les mailles du bords primal et dual. On projette de deux manières l'une en prenant la valeur moyenne sur une boule de centre $x_{\mathcal{K}}$ (respectivement $x_{\mathcal{K}^*}$) contenue dans $\overline{\mathcal{K}}$ (respectivement $\overline{\mathcal{K}^*}$) et l'autre en évaluant en $x_{\mathcal{K}}$ (respectivement $x_{\mathcal{K}^*}$).

Définition 5 (Projection de la valeur moyenne).

On définit la projection de la valeur moyenne pour toute fonction g du bord $\partial\Omega$:

$$\mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} g = \left(\left(\frac{1}{m_{B_{\mathcal{K}}}} \int_{B_{\mathcal{K}}} g(x)\,dx \right)_{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}}, \left(\frac{1}{m_{B_{\mathcal{K}^*}}} \int_{B_{\mathcal{K}^*}} g(x)\,dx \right)_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*} \right)$$

où $B_{\mathcal{K}} := B(x_{\mathcal{K}}, \rho_{\mathcal{K}}) \cap \partial\Omega \subset \overline{\mathcal{K}}$ et $B_{\mathcal{K}^*} := B(x_{\mathcal{K}^*}, \rho_{\mathcal{K}^*}) \cap \partial\Omega \subset \overline{\mathcal{K}^*}$, $\rho_{\mathcal{K}}$ est choisie telle que l'inclusion soit vérifiée de même pour $\rho_{\mathcal{K}^*}$.

Définition 6 (Projection de la valeur au centre).

Pour toute fonction g du bord $\partial\Omega$, on note la projection de la valeur au centre des mailles du bord :

$$\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} g = ((g(x_\mathcal{K}))_{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}}, (g(x_{\mathcal{K}^*}))_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*})$$

A l'aide de ces deux projections, on définit deux espaces $\mathbb{E}_{m,g}^D$ et $\mathbb{E}_{c,g}^D$ qui sont définis à partir des bords aux conditions limites de Dirichlet. On impose à un vecteur $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ les valeurs d'une projection d'une fonction g du bord $\partial\Omega$.

Définition 7 (Espaces de Dirichlet).

On définit des sous espaces des maillages du bord :

$$\begin{array}{rcl} \partial\mathfrak{M}_D & = & \{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}, \textit{telle que le noeud } x_\mathcal{K} \textit{ appartienne à un bord avec une condition de Dirichlet}\} \\ \partial\mathfrak{M}_D^* & = & \{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*, \textit{telle que le noeud } x_{\mathcal{K}^*} \textit{ appartienne à un bord avec une condition de Dirichlet}\} \end{array}$$

On note les espaces suivants :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}_{m,g}^D & = & \{u^{\mathcal{T}}\in\mathbb{R}^{\mathcal{T}},\ \textit{telle que pour } \mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}_D,\ u_\mathcal{K} = (\mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} g)_\mathcal{K} \textit{ et pour } \mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}_D^*,\ u_{\mathcal{K}^*} = (\mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} g)_{\mathcal{K}^*}\} \\ \mathbb{E}_{c,g}^D & = & \left\{u^{\mathcal{T}}\in\mathbb{R}^{\mathcal{T}},\ \textit{telle que pour } \mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}_D,\ u_\mathcal{K} = (\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} g)_\mathcal{K} \textit{ et pour } \mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}_D^*,\ u_{\mathcal{K}^*} = (\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} g)_{\mathcal{K}^*}\right\} \end{array}$$

où g est la valeur imposée sur le bord Dirichlet.
Remarque 4 : *Si $g = 0$, alors on a $\mathbb{E}_{m,g}^D = \mathbb{E}_{c,g}^D = \mathbb{E}_0^D$.*

On introduit les projections sur ces deux espaces.

Définition 8 (Projection sur les espaces de Dirichlet).

On définit la projection $\mathfrak{P}_{m,g}^D$ sur l'espace $\mathbb{E}_{m,g}^D$:

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{P}_{m,g}^D : & \mathbb{R}^{\mathcal{T}} & \longrightarrow & \mathbb{E}_{m,g}^D \\ & u^{\mathcal{T}} & \longmapsto & \Big((u_\mathcal{K})_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}, (\mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} g)_{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}_D}, (u_\mathcal{K})_{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}\setminus\partial\mathfrak{M}_D}, (u_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*}, (\mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} g)_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}_D^*}, (u_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*\setminus\partial\mathfrak{M}_D^*}\Big) \end{array}$$

Et la projection $\mathfrak{P}_{c,g}^D$ sur l'espace $\mathbb{E}_{c,g}^D$:

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{P}_{c,g}^D : & \mathbb{R}^{\mathcal{T}} & \longrightarrow & \mathbb{E}_{c,g}^D \\ & u^{\mathcal{T}} & \longmapsto & \Big((u_\mathcal{K})_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}, (\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} g)_{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}_D}, (u_\mathcal{K})_{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}\setminus\partial\mathfrak{M}_D}, (u_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*}, (\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} g)_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}_D^*}, (u_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*\setminus\partial\mathfrak{M}_D^*}\Big) \end{array}$$

3.2 Gradient discret

Le gradient discret est défini de manière à pouvoir se ramener à la méthode VF avec un maillage admissible.

Définition 9 (Gradient discret).

Le gradient discret est défini de la manière suivante :

$$\nabla^{\mathcal{T}} : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \to (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$$

Soit $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on pose $\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \chi_\mathcal{D}$, où l'on veut pour $\mathcal{D}\in\mathfrak{D}$:

$$\begin{array}{rcl} (\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*}) & = & \dfrac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{m_\sigma} \\ (\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}) & = & \dfrac{u_\mathcal{L} - u_\mathcal{K}}{m_{\sigma^*}} \end{array}$$

De plus, on a la formule suivante :

$$x = \frac{(x, \vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}})}{\sin\alpha_\mathcal{D}} \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}} + \frac{(x, \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*})}{\sin\alpha_\mathcal{D}} \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}$$

Démonstration :
En effet, on peut écrire x sous la forme suivante $x = c\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}} + d\vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}$. Or $\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}} = -\cos\alpha_{\mathcal{D}}\vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} + \sin\alpha_{\mathcal{D}}\vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$, donc on a $(x, \vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}) = c(\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}, \vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}) = c \sin\alpha_{\mathcal{D}}$. Ainsi on obtient la formule énoncée. ■

En utilisant cette formule, on peut écrire le gradient discret de la manière suivante :

$$\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin\alpha_{\mathcal{D}}}\left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{m_{\sigma^*}}\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{m_{\sigma}}\vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}\right)$$

L'aire $m_{\mathcal{D}}$ d'un diamant $\mathcal{D}$ est la suivante : $2m_{\mathcal{D}} = m_{\sigma}m_{\sigma^*}\sin\alpha_{\mathcal{D}}$, on peut réécrire le gradient discret :

$$\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{2m_{\mathcal{D}}}\left[(u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}})m_{\sigma}\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}} + (u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*})m_{\sigma^*}\vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}\right]$$

On peut également définir le gradient discret en utilisant une fonction u affine par diamant ($u \in P^1(\mathcal{D})$, $\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}$) telle que ses valeurs aux milieux des côtés de $\mathcal{D}$ soient imposées par la demi somme des valeurs de $u^{\mathcal{T}}$ aux sommets correspondant. On obtient alors que le gradient discret sur le diamant est égal au gradient de u restreint au diamant $\mathcal{D}$:

$$\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = (\nabla u)_{|\mathcal{D}}$$

On a donc introduit trois manières d'écrire le gradient discret d'un vecteur de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$.

3.3 Divergence discrète

On peut également définir une divergence discrète de manière à obtenir une formule de Green discrète.

Définition 10 (Divergence discrète).

Une divergence discrète est définie de la manière suivante :

$$div^{\mathcal{T}} : (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}} \to \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$$

Soit $\xi \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$, on pose

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \quad & div^{\mathcal{K}}\xi &= \frac{1}{m_{\mathcal{K}}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} m_{\sigma}(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) \\
\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*, \quad & div^{\mathcal{K}^*}\xi &= \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}) \\
\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*, \quad & div^{\mathcal{K}^*}\xi &= \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}}\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}) + \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} m_{\sigma}(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\right)
\end{aligned}$$

On définit tout d'abord les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \quad u^{\mathfrak{M}} &= \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} u_{\mathcal{K}}\chi_{\mathcal{K}} \quad u^{\mathfrak{M}^*} = \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} u_{\mathcal{K}^*}\chi_{\mathcal{K}^*} \\
\xi \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}, \quad \xi &= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} \xi^{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{D}}
\end{aligned}$$

et les crochets sur les espaces suivants :

$$\begin{aligned}
u^{\mathcal{T}},\ v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \quad \mathrm{J}u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}}\mathrm{K} &= \frac{1}{2}(u^{\mathfrak{M}}, v^{\mathfrak{M}})_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}(u^{\mathfrak{M}^*}, v^{\mathfrak{M}^*})_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}u_{\mathcal{K}}v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*}u_{\mathcal{K}^*}v_{\mathcal{K}^*}\right) \\
\xi, \eta \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}, \quad (\xi, \eta)_{\mathfrak{D}} &= (\xi, \eta)_{L^2(\Omega)} = \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}\xi^{\mathcal{D}}\cdot\eta^{\mathcal{D}} \\
\xi \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}, u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \quad (\gamma^{\mathfrak{D}}(\xi\cdot n), \gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}}))_{\partial\Omega} &= \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_{\sigma}(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}})
\end{aligned}$$

où il faut définir sur $(\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$ l'opérateur trace $\gamma^{\mathfrak{D}}(\xi\cdot n) = \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} (\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\chi_\sigma$ et sur $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ l'opérateur trace

$$\gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}}) = \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{ext}} \gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}})\chi_\sigma = \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{ext}} \frac{u_{\mathcal{L}^*}+u_{\mathcal{K}^*}+2u_{\mathcal{L}}}{4}\chi_\sigma$$

Remarque 5 : On a choisit de prendre $x_{\mathcal{L}}$ au milieu des mailles du bord !!!!!

Théorème 3 (Formule de Green).

Soient $\xi \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$, $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$

$$\mathrm{J}div^{\mathcal{T}}\xi, u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} = -(\xi, \nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} + (\gamma^{\mathfrak{D}}(\xi\cdot n), \gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}}))_{\partial\Omega}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\int_\Omega div^{\mathfrak{M}}(\xi)u^{\mathfrak{M}} + \frac{1}{2}\int_\Omega div^{\mathfrak{M}^*}(\xi)u^{\mathfrak{M}^*} = -\int_\Omega \xi^{\mathfrak{D}}\cdot\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}} + \int_{\partial\Omega}\gamma^{\mathfrak{D}}(\xi\cdot n)\gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}})$$

Démonstration :

On regarde la valeur de $(\xi, \nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}}$ et on utilise la deuxième définition du gradient discret :

$$\begin{aligned}
(\xi, \nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} &= \int_\Omega \xi^{\mathfrak{D}}\cdot\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}} \\
&= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}\xi^{\mathcal{D}}\cdot\nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}} \\
&= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}\frac{1}{2m_{\mathcal{D}}}(u_{\mathcal{L}}-u_{\mathcal{K}})m_\sigma(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) + \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}\frac{1}{2m_{\mathcal{D}}}(u_{\mathcal{L}^*}-u_{\mathcal{K}^*})m_{\sigma^*}(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} u_{\mathcal{K}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} m_\sigma(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) - \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*} u_{\mathcal{K}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}) \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*} u_{\mathcal{K}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}) + \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})u_{\mathcal{L}}
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on réorganise les termes afin de sommer sur les mailles.
Si on regarde tout le terme de droit $-(\xi, \nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} + (\gamma^{\mathfrak{D}}(\xi\cdot n), \gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}}))_{\partial\Omega}$, on obtient par définition :

$$\begin{aligned}
-(\xi, \nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} + (\gamma^{\mathfrak{D}}(\xi\cdot n), \gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}}))_{\partial\Omega} &= -\int_\Omega \xi^{\mathfrak{D}}\cdot\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}} + \int_{\partial\Omega}\gamma^{\mathfrak{D}}(\xi\cdot n)\gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}}) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} u_{\mathcal{K}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} m_\sigma(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) + \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} u_{\mathcal{K}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}) \\
-\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})u_{\mathcal{L}} + \frac{1}{4}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})(u_{\mathcal{L}^*}+u_{\mathcal{K}^*}+2u_{\mathcal{L}})}_{=A} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}u_{\mathcal{K}} \underbrace{\frac{1}{m_{\mathcal{K}}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} m_\sigma(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})}_{=\mathrm{div}^{\mathcal{K}}\xi} \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*} m_{\mathcal{K}^*}u_{\mathcal{K}^*} \underbrace{\frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*})}_{=\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\xi} \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*} m_{\mathcal{K}^*}u_{\mathcal{K}^*} \underbrace{\frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}}\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}) + \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} m_\sigma(\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\right)}_{=\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\xi} \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}^{\mathfrak{M}}\xi u^{\mathfrak{M}} + \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}^{\mathfrak{M}^*}\xi u^{\mathfrak{M}^*} \\
&= \mathrm{J}\mathrm{div}^{\mathcal{T}}\xi, u^{\mathcal{T}}\mathrm{K}
\end{aligned}$$

La définition de la divergence discrète donne la dernière égalité.
Remarque 6 : On a bien en réordonnant les termes sur les mailles duales du bord :

$$A = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*} u_{\mathcal{K}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \partial\Omega)} \frac{m_\sigma}{2} (\xi^{\mathcal{D}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})$$

■

3.4 Schéma avec différentes conditions aux bords

On étudie le problème (1.1) en définissant pour chaque cas la fonction $s \longmapsto g(u(s), s)$ suivant les conditions limites. Pour chaque schéma présenté, on montre l'existence et l'unicité de leur solution.

3.4.1 Condition de Dirichlet non homogène

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) & = & f(x), & x \in \Omega, \\ u(s) & = & g(s), & s \in \partial\Omega. \end{array} \tag{3.1}$$

Pour ce problème (3.1), on va intégrer l'équation sur les mailles intérieures du maillage primal et dual, et imposer la condition limite sur les bords primal et dual (figure 3.5).

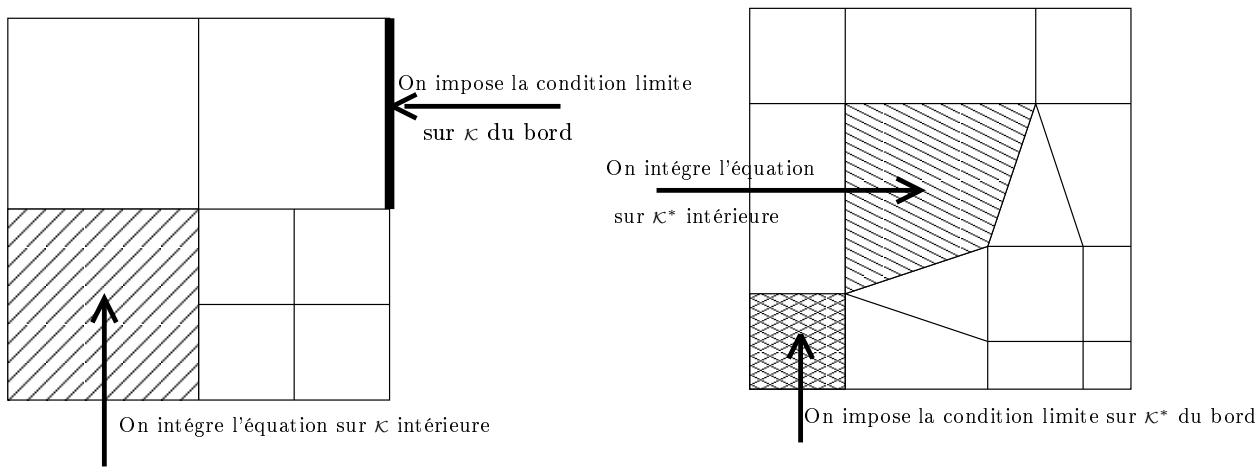

FIG. 3.5 – Condition de Dirichlet non homogène

Démarches :
On intégre l'équation sur les mailles primales **intérieures** :

$$\begin{array}{rcl} \forall\, \kappa \in \mathfrak{M} \quad \displaystyle\int_{\kappa} f(x)\mathrm{d}x & = & -\displaystyle\int_{\kappa} \Delta u(x)\mathrm{d}x \\ & = & -\displaystyle\int_{\partial\kappa} (\nabla u(s), \vec{n}_{\kappa})\mathrm{d}s \\ & = & -\displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} \int_{\sigma} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s \end{array}$$

On intégre l'équation sur les mailles **intérieures** duales :

$$\begin{array}{rcl} \forall\, \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \quad \displaystyle\int_{\kappa^*} f(x)\mathrm{d}x & = & -\displaystyle\int_{\kappa^*} \Delta u(x)\mathrm{d}x \\ & = & -\displaystyle\int_{\partial\kappa^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\kappa^*})\mathrm{d}s \\ & = & -\displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} \int_{\sigma^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*})\mathrm{d}s \end{array}$$

Et on impose les conditions limites sur les bords primal et dual :

$$\begin{array}{rrcl} \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M} & u(x_\kappa) & = & g(x_\kappa) \\ \forall\ \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^* & u(x_{\kappa^*}) & = & g(x_{\kappa^*}). \end{array}$$

Schéma :
On pose le schéma du problème (3.1) suivant :

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} & \text{On cherche } u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}^D_{m,g} \text{ tel que} & & \\ \forall\ \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\kappa}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_\kappa \\ \forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, & -\mathrm{div}^{\kappa^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\kappa^*} \end{array}} \tag{3.2}$$

où $\forall\ \kappa \in \mathfrak{M},\ f_\kappa = \dfrac{1}{m_\kappa}\displaystyle\int_\kappa f(x)\mathrm{d}x$ et $\forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}^*,\ f_{\kappa^*} = \dfrac{1}{m_{\kappa^*}}\displaystyle\int_{\kappa^*} f(x)\mathrm{d}x$.

Théorème 4 (Existence et Unicité).

Il y a une unique solution $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}^D_{m,g}$ du schéma (3.2).

Démonstration :
Le schéma s'écrit sous la forme d'un système linéaire carré, ainsi il suffit de montrer l'unicité pour avoir le résultat énoncé.

Soient $u_1^{\mathcal{T}}$ et $u_2^{\mathcal{T}}$ deux solutions dans $\mathbb{E}^D_{m,g}$ du schéma (3.2), on pose $u^{\mathcal{T}} = u_1^{\mathcal{T}} - u_2^{\mathcal{T}}$ qui appartient à $\mathbb{E}^D_0$. Le vecteur $u^{\mathcal{T}}$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \forall\ \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\kappa}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & 0 \\ \forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, & -\mathrm{div}^{\kappa^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & 0 \end{array} \right.$$

La définition de la divergence discrète donne $-\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} = 0$. On applique la formule de Green discrète :

$$\begin{aligned} -\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} \quad & \underbrace{=}_{u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}^D_0} \quad 0 \\ & = \quad (\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} - (\gamma^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot n), \underbrace{\gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}}))_{\partial\Omega}}_{=0\ u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}^D_0} \\ & = \quad \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}|^2 \end{aligned}$$

On a donc $\forall\ \mathcal{D} \in \mathfrak{D},\ \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = 0$, il existe deux constantes c_0 et c_1 telles que :

$$\begin{array}{rrcl} \forall\ \kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), & u_\kappa & = & c_0 \\ \forall\ \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), & u_{\kappa^*} & = & c_1 \end{array}$$

Or $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}^D_0$ donc $c_0 = c_1 = 0$. D'où $u^{\mathcal{T}} = 0$.

■

3.4.2 Condition de Neumann non homogène

Avec comme hypothèse $\displaystyle\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega} \Phi(s)\mathrm{d}s$.

$$\boxed{\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) & = & f(x), & x \in \Omega, \\ (\nabla u(s), \vec{n}) & = & \Phi(s), & s \in \partial\Omega \\ \displaystyle\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x & = & 0. & \end{array}} \tag{3.3}$$

Pour ce problème (3.3), on va intégrer l'équation sur les mailles intérieures du maillage primal et dual, sur les mailles du bord dual, et imposer la condition limite sur le bord primal (figure 3.6).

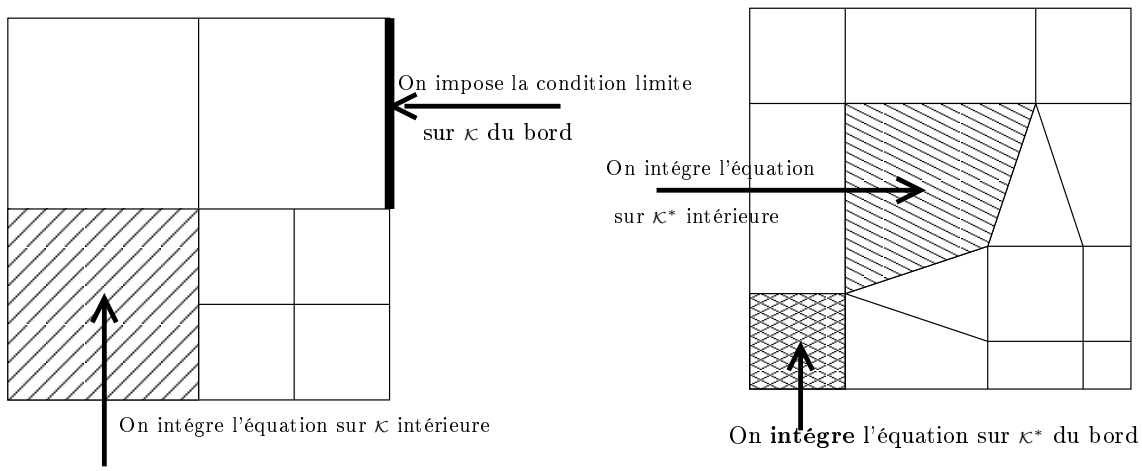

FIG. 3.6 – Condition de Neumann non homogène

Démarches :
On intégre l'équation sur les mailles primales **intérieures** :

$$\begin{aligned} \forall\ \kappa \in \mathfrak{M} \quad \int_{\kappa} f(x)\mathrm{d}x &= -\int_{\kappa} \Delta u(x)\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa}} \int_{\sigma} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\kappa})\mathrm{d}s \end{aligned}$$

On intégre l'équation sur les toutes les mailles duales **intérieures et du bord** :

$$\begin{aligned} \forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \quad \int_{\kappa^*} f(x)\mathrm{d}x &= -\int_{\kappa^*} \Delta u(x)\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \int_{\sigma^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*})\mathrm{d}s \\ \forall\ \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^* \quad \int_{\kappa^*} f(x)\mathrm{d}x &= -\int_{\kappa^*} \Delta u(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\partial\kappa^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\kappa^*})\mathrm{d}s \\ &= -\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \int_{\sigma^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*})\mathrm{d}s - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in (\mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \partial\Omega)} \int_{\sigma} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\kappa})\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Et on impose la condition limite sur le bord primal :

$$\forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}\ :\ (\nabla u, \vec{n}_{\sigma\kappa}) = \Phi_{\kappa}.$$

Schéma :
Soit $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on considère le schéma :

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \forall\ \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\kappa}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\kappa} \\ \forall\ \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), & -\mathrm{div}^{\kappa^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\kappa^*} \\ \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}, & (\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\kappa}) & = & \Phi_{\kappa} \end{array} \right.$$

Remarque 7 : Ces équations ne sont pas linéairement indépendantes. On va se ramener à un schéma qu'on sera résoudre.
On regarde la première série d'équations, on les multiplie par m_{κ} et on somme sur $\kappa \in \mathfrak{M}$:

$$-\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \mathrm{div}^{\kappa}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) = \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} f_{\kappa}$$

On choisit $\psi^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ telle que $\forall\ \kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), \psi_{\kappa} = 1$ et $\forall\ \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), \psi_{\kappa^*} = 0$, ceci impose $\nabla^{\mathcal{D}} \psi^{\mathcal{T}} = 0$.
On a alors : d'une part :

$$\begin{aligned}
-2\mathrm{J}\mathrm{div}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}),\psi^{\mathcal{T}}\mathrm{K} &\underbrace{=}_{\text{définition de J,K}} -\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}) \\
&\underbrace{=}_{\text{le terme de droite}} \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}f_{\mathcal{K}} \\
&\underbrace{=}_{\text{Définition de } f_{\mathcal{K}}} \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
-2\mathrm{J}\mathrm{div}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}),\psi^{\mathcal{T}}\mathrm{K} &\underbrace{=}_{\text{Green}} 2(\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}},\underbrace{\nabla^{\mathcal{T}}\psi^{\mathcal{T}}}_{=0})_{\mathfrak{D}} - 2(\gamma^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}\cdot n),\gamma^{\mathcal{T}}(\psi^{\mathcal{T}}))_{\partial\Omega} \\
&\underbrace{=}_{\text{définition de }(,)_{\partial\Omega}} -\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma(\nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}},\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})
\end{aligned}$$

On arrive à :

$$-\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma(\nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}},\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) = \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x$$

En refaisant la même chose pour la deuxième série d'équations, (en multipliant par $m_{\mathcal{K}^*}$, sommant sur $\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)$, utilisant $\psi^{\mathcal{T}}\in\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ telle que $\forall\ \mathcal{K}\in(\mathfrak{M}\cup\partial\mathfrak{M}),\psi_{\mathcal{K}}=0$ et $\forall\ \mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*),\psi_{\mathcal{K}^*}=1$, ceci impose $\nabla^{\mathcal{D}}\psi^{\mathcal{T}}=0$), on a :

$$\begin{aligned}
-2\mathrm{J}\mathrm{div}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}),\psi^{\mathcal{T}}\mathrm{K} &= -\sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*}\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}) \\
&= -\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma(\nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}},\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) \\
&\underbrace{=}_{\text{le terme de droite}} \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*}f_{\mathcal{K}^*} \\
&\underbrace{=}_{\text{Définition de } f_{\mathcal{K}^*}} \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On arrive à l'équation :

$$-\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma(\nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}},\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) = \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x$$

Ainsi les deux premières séries d'équations ne sont pas linéairement indépendantes, il faut donc rajouter une équation : par exemple $\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x = 0$, *ie* $\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}u_{\mathcal{K}} = 0$.
On peut aussi montrer que la troisième série d'équations n'est pas linéairement indépendante des précédentes. En effet, si on multiplie par m_σ, sommant sur $\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma(\nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}},\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) &= \sum_{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}\Phi_{\mathcal{K}} \\
&\underbrace{=}_{\text{Définition de } g_{\mathcal{K}}} \int_{\partial\Omega}\Phi(s)\mathrm{d}s \\
&\underbrace{=}_{\text{Condition imposée}} \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On arrive à la même équation :

$$-\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma(\nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}},\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) = \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x$$

Il va manquer encore une équation, il faut en rajouter une : par exemple $\sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*}u_{\mathcal{K}^*} = 0$.

Bilan : Le schéma pour le problème (3.3) s'écrit :
On suppose que

$$\left\{\begin{aligned}
\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}f_{\mathcal{K}} &= -\sum_{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}\Phi_{\mathcal{K}} \\
\sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*}f_{\mathcal{K}^*} &= -\sum_{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}\Phi_{\mathcal{K}}
\end{aligned}\right.$$

On cherche $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que

$$\begin{array}{lrcl} \forall\ \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\ \kappa}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\kappa} \\ \forall\ \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), & -\mathrm{div}^{\ \kappa^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\kappa^*} \\ \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}, & (\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) & = & \Phi_{\kappa} \\ & \displaystyle\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}} & = & 0 \\ & \displaystyle\sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{K}^*} & = & 0 \end{array} \tag{3.4}$$

Théorème 5 (Existence et Unicité).

Il y a une unique solution $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ du schéma (3.4).

Démonstration :

On note $N = card(\mathbb{R}^{\mathcal{T}})$. On a un système linéaire qui s'écrit $Au^{\mathcal{T}} = b$ avec

$$A : \mathbb{R}^N \longrightarrow V = \left\{ (f_{\mathcal{K}}, f_{\mathcal{K}^*}, \Phi_{\mathcal{K}}, \alpha, \beta)' \in \mathbb{R}^{N+2}, \quad \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} f_{\mathcal{K}} = -\sum_{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}\Phi_{\mathcal{K}} \text{ et } \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} f_{\mathcal{K}^*} = -\sum_{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}\Phi_{\mathcal{K}} \right\}$$

On a dim $V = N$. Si on montre que A est injective, alors $\forall\ b \in V$, il existe une unique solution u telle que $Au = b$, en particulier pour b tel que $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.
Soient $u_1^{\mathcal{T}}$ et $u_2^{\mathcal{T}}$ deux solutions du schéma (3.4), on pose $u^{\mathcal{T}} = u_1^{\mathcal{T}} - u_2^{\mathcal{T}}$. Le vecteur $u^{\mathcal{T}}$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \forall\ \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & 0 \\ \forall\ \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & 0 \\ \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}, & (\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) & = & 0 \\ & \displaystyle\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}} & = & 0 \\ & \displaystyle\sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{K}^*} & = & 0 \end{array} \right.$$

La définition de la divergence discrète donne $-\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} = 0$. On applique la formule de Green discrète :

$$\begin{array}{rcl} -\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} & = & 0 \\ & = & (\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} - (\underbrace{\gamma^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot n)}_{=0 \text{ car } (\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})=0}, \gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}}))_{\partial\Omega} \\ & = & \displaystyle\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}|^2 \end{array}$$

On a donc $\forall\ \mathcal{D} \in \mathfrak{D},\ \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = 0$, il existe deux constantes c_0 et c_1 telles que :

$$\begin{array}{lrcl} \forall\ \kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), & u_{\mathcal{K}} & = & c_0 \\ \forall\ \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), & u_{\mathcal{K}^*} & = & c_1 \end{array}$$

Or les deux dernières équations : $\displaystyle\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}} = 0$ et $\displaystyle\sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{K}^*} = 0$, imposent les deux constantes.
En effet, on a : $\displaystyle\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} c_0 = 0$ et $\displaystyle\sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} c_1 = 0$, donc $c_0 = c_1 = 0$. D'où $u^{\mathcal{T}} = 0$.
Il existe une unique solution $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$.

■

3.4.3 Condition de Fourier non homogène

Premier cas

On s'intéresse au problème :

$$\boxed{\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) & = & f(x), & x \in \Omega, \\ -(\nabla u(s), \vec{n}) & = & \lambda(u(s) - g(s)), & s \in \partial\Omega. \end{array}} \quad (3.5)$$

Avec comme hypothèse $\lambda > 0$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Pour ce problème (3.5) on va intégrer l'équation sur les mailles intérieures du maillage primal et dual, et sur les mailles du bord dual, et imposer la condition limite sur le bords primal (figure 3.7).

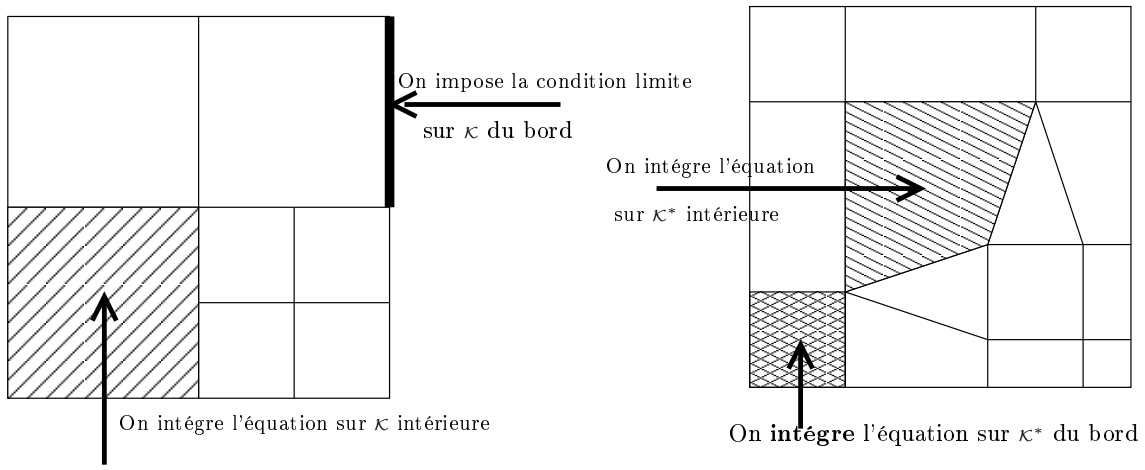

FIG. 3.7 – Condition de Fourier non homogène

Démarches :
On intégre l'équation sur les mailles primales **intérieures** :

$$\forall\, \kappa \in \mathfrak{M} \quad \int_{\kappa} f(x)\mathrm{d}x \quad = \quad - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa}} \int_{\sigma} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\kappa})\mathrm{d}s$$

On intégre l'équation sur toutes les mailles duales **intérieures et du bord** :

$$\begin{array}{rcl} \forall\, \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \quad \displaystyle\int_{\kappa^*} f(x)\mathrm{d}x & = & - \displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \int_{\sigma^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*})\mathrm{d}s \\ \forall\, \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^* \quad \displaystyle\int_{\kappa^*} f(x)\mathrm{d}x & = & - \displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \int_{\sigma^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*})\mathrm{d}s - \displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in (\mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \partial\Omega)} \int_{\sigma \cap \kappa^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\kappa})\mathrm{d}s \end{array}$$

Et on impose la condition limite sur le bord primal :

$$\forall\, \kappa \in \partial\mathfrak{M} \ : \ -(\nabla u, \vec{n}_{\sigma\kappa}) = \lambda(u - g).$$

Schéma :
Soit $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on considère le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \forall\, \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\kappa}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\kappa} \\ \forall\, \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), & -\mathrm{div}^{\kappa^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\kappa^*} \\ \forall\, \kappa \in \partial\mathfrak{M}, & -(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\kappa}) & = & \lambda\,(\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) - g_{\kappa}) \end{array} \right.$$

Remarque 8 : Ces équations ne sont pas linéairement indépendantes. On va se ramener à un schéma qu'on sera résoudre.

On regarde la première série d'équations, on les multiplie par $m_\mathcal{K}$ et on somme sur $\kappa \in \mathfrak{M}$:

$$-\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_\mathcal{K}\mathrm{div}^\mathcal{K}(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) = \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_\mathcal{K} f_\mathcal{K}$$

On choisit $\psi^\mathcal{T} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}$ telle que $\forall\ \kappa \in (\mathfrak{M}\cup\partial\mathfrak{M}), \psi_\mathcal{K} = 1$ et $\forall\ \kappa^* \in (\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*), \psi_{\mathcal{K}^*} = 0$, ceci impose $\nabla^\mathcal{D}\psi^\mathcal{T} = 0$. On a alors : d'une part

$$\begin{aligned}
-2\mathrm{Jdiv}^\mathcal{T}(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}), \psi^\mathcal{T}\mathrm{K} &\underbrace{=}_{\text{définition de J,K}} -\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_\mathcal{K}\mathrm{div}^\mathcal{K}(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) \\
&\underbrace{=}_{\text{le terme de droite}} \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_\mathcal{K} f_\mathcal{K} \\
&\underbrace{=}_{\text{Définition de } f_\mathcal{K}} \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
-2\mathrm{Jdiv}^\mathcal{T}(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}), \psi^\mathcal{T}\mathrm{K} &\underbrace{=}_{\text{Green}} 2(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}, \underbrace{\nabla^\mathcal{T}\psi^\mathcal{T}}_{=0})_\mathfrak{D} - 2(\gamma^\mathfrak{D}(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}\cdot n), \gamma^\mathcal{T}(\psi^\mathcal{T}))_{\partial\Omega} \\
&\underbrace{=}_{\text{définition de } (,)_{\partial\Omega}} -\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma(\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})
\end{aligned}$$

On arrive à :

$$-\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma(\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) = \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x$$

En refaisant la même chose pour la deuxième série d'équations, (en multipliant par $m_{\mathcal{K}^*}$, sommant sur $\kappa^* \in (\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)$, utilisant $\psi^\mathcal{T} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}$ telle que $\forall\ \kappa \in (\mathfrak{M}\cup\partial\mathfrak{M}), \psi_\mathcal{K} = 0$ et $\forall\ \kappa^* \in (\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*), \psi_{\mathcal{K}^*} = 1$, ceci impose $\nabla^\mathcal{D}\psi^\mathcal{T} = 0$), on a :

$$\begin{aligned}
-2\mathrm{Jdiv}^\mathcal{T}(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}), \psi^\mathcal{T}\mathrm{K} &= -\sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*}\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) \\
&= -\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma(\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) \\
&\underbrace{=}_{\text{le terme de droite}} \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} f_{\mathcal{K}^*} \\
&\underbrace{=}_{\text{Définition de } f_{\mathcal{K}^*}} \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On arrive à l'équation :

$$-\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma(\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) = \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x$$

Ainsi les deux premières séries d'équations ne sont pas linéairement indépendantes, il faut donc rajouter une équation : par exemple $\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_\mathcal{K} u_\mathcal{K} = \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{K}^*}$.

Bilan : Le schéma pour le problème (3.5) s'écrit :
On suppose que

$$\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_\mathcal{K} f_\mathcal{K} = \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} f_{\mathcal{K}^*}$$

On cherche $u^\mathcal{T} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}$ tel que

$$\begin{array}{lrcl}
\forall\ \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^\mathcal{K}(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) & = & f_\mathcal{K} \\
\forall\ \kappa^* \in (\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*), & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) & = & f_{\mathcal{K}^*} \\
\forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}, & -(\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) & = & \lambda\left(\gamma^\mathcal{D}(u^\mathcal{T}) - g_\mathcal{K}\right) \\
 & \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_\mathcal{K} u_\mathcal{K} - \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{K}^*} & = & 0
\end{array} \tag{3.6}$$

Théorème 6 (Existence et Unicité).

Il y a une unique solution $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ du schéma (3.6).

Démonstration :
On a un système linéaire qui s'écrit $Au^{\mathcal{T}} = b$ avec

$$A : \mathbb{R}^N \longrightarrow V = \left\{ (f_{\mathcal{K}}, f_{\mathcal{K}^*}, g_{\mathcal{K}}, \alpha)' \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} f_{\mathcal{K}} = \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} f_{\mathcal{K}^*} \right\}$$

On a dim $V = N$. Si on montre que A est injective, alors $\forall\ b \in V$, il existe une unique solution u telle que $Au = b$, en particulier pour b tel que $\alpha = 0$.

Soient $u_1^{\mathcal{T}}$ et $u_2^{\mathcal{T}}$ deux solutions du schéma (3.6), on pose $u^{\mathcal{T}} = u_1^{\mathcal{T}} - u_2^{\mathcal{T}}$. Le vecteur $u^{\mathcal{T}}$ vérifie :

$$\begin{cases} \forall\ \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) = 0 \\ \forall\ \mathcal{K}^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) = 0 \\ \forall\ \mathcal{K} \in \partial\mathfrak{M}, & -(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) = \lambda\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) \\ & \displaystyle\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}} = \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{K}^*} \end{cases}$$

La définition de la divergence discrète donne $-\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} = 0$. On applique la formule de Green discrète :

$$\begin{aligned} -\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} &= 0 \\ &= (\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} - (\gamma^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot n), \gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}}))_{\partial\Omega} \\ &= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}|^2 + \lambda \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma \gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}})^2 \end{aligned}$$

On a donc $\forall\ \mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext},\ u_{\mathcal{L}^*} + u_{\mathcal{K}^*} + 2u_{\mathcal{L}} = 0$ et $\forall\ \mathcal{D} \in \mathfrak{D},\ \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = 0$, ce qui implique qu'il existe deux constantes c_0 et c_1 telles que :

$$\begin{aligned} \forall\ \mathcal{K} \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), \quad u_{\mathcal{K}} &= c_0 \\ \forall\ \mathcal{K}^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), \quad u_{\mathcal{K}^*} &= c_1 \end{aligned}$$

et que $c_0 + c_1 = 0$.

Or la dernière équation : $\displaystyle\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}} = \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{K}^*}$, impose les deux constantes. En effet, on a : $\displaystyle\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} c_0 = \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} c_1$, donc $c_0 = c_1$. On a ainsi $c_0 = c_1 = 0$ et $u^{\mathcal{T}} = 0$.
Il existe une unique solution $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$.

■

Deuxième cas

Pour ce problème (3.5) on va intégrer l'équation sur les mailles intérieures du maillage primal et dual, et sur les mailles du bord dual en imposant la condition de Fourier sur le bord, et imposer la condition limite sur le bords primal (figure 3.8). La différence avec le schéma précédent vient de l'approximation du terme $\displaystyle-\sum_{\mathcal{D}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} \int_\sigma (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s$ pour les mailles duales du bord. En effet, dans le premier cas, on l'approche par $\displaystyle-\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{D}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} m_\sigma(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})$ alors que dans le second cas, on impose la condition limite de Fourier sur le bord, ainsi on l'approche par $\displaystyle+\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{D}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} m_\sigma\left(\gamma_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) - g_{\mathcal{L}}\right)$.

Schéma :
On envisage un second schéma pour le problème (3.5) :
On suppose que

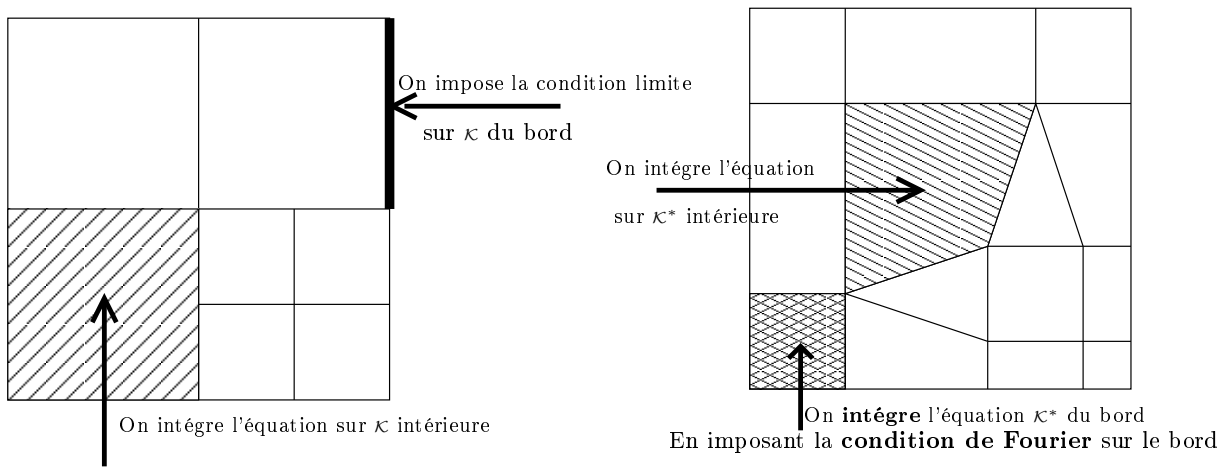

FIG. 3.8 – Condition de Fourier non homogène

$$\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} f_{\mathcal{K}} \quad = \quad \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} f_{\mathcal{K}^*}$$

On cherche $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que

$$\begin{array}{lrcl}
\forall\, \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\,\kappa}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\mathcal{K}} \\
\forall\, \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, & -\mathrm{div}^{\,\kappa^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\mathcal{K}^*} \\
\forall\, \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*, \quad -\displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}) + \dfrac{\lambda}{2} \displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} & m_\sigma\left(\gamma_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) - g_{\mathcal{L}}\right) & = & m_{\mathcal{K}^*} f_{\mathcal{K}^*} \\
\forall\, \kappa \in \partial\mathfrak{M}, & -(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) & = & \lambda\left(\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) - g_{\mathcal{K}}\right) \\
 & \displaystyle\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}} - \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{K}^*} & = & 0
\end{array} \tag{3.7}$$

où $\gamma_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) = \dfrac{u_{\mathcal{K}^*} + u_{\mathcal{L}}}{2}$.

Théorème 7 (Existence et Unicité).

Il y a une unique solution $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ du schéma (3.7).

Démonstration :

On a un système linéaire qui s'écrit $Au^{\mathcal{T}} = b$ avec

$$A : \mathbb{R}^N \longrightarrow V = \left\{ (f_{\mathcal{K}}, f_{\mathcal{K}^*}, g_{\mathcal{K}}, \alpha)' \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} f_{\mathcal{K}} = \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} f_{\mathcal{K}^*} \right\}$$

On a dim $V = N$. Si on montre que A est injective, alors $\forall\, b \in V$, il existe une unique solution u telle que $Au = b$, en particulier pour b tel que $\alpha = 0$.

Soient $u_1^{\mathcal{T}}$ et $u_2^{\mathcal{T}}$ deux solutions du schéma (3.7), on pose $u^{\mathcal{T}} = u_1^{\mathcal{T}} - u_2^{\mathcal{T}}$. Le vecteur $u^{\mathcal{T}}$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{lrcl}
\forall\, \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & 0 \\
\forall\, \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & 0 \\
\forall\, \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*, \quad -\displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}) + \dfrac{\lambda}{2} \displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} & m_\sigma \gamma_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) & = & 0 \\
\forall\, \kappa \in \partial\mathfrak{M}, & -(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) & = & \lambda\left(\dfrac{1}{2}\gamma_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) + \dfrac{1}{2}\gamma_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})\right) \\
 & \displaystyle\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}} & = & \displaystyle\sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{K}^*}
\end{array} \right.$$

On regarde la valeur de $-\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K}$:

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} &= -\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*} m_{\mathcal{K}^*}u_{\mathcal{K}^*}\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*} u_{\mathcal{K}^*}\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} m_\sigma\gamma_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) - \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*} u_{\mathcal{K}^*}\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} m_\sigma(\nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}},\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) \\
&= \frac{\lambda}{4}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*} u_{\mathcal{K}^*}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} m_\sigma\left[\frac{1}{2}\gamma_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) + \frac{1}{2}\gamma_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) - \gamma_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})\right] \\
&= \frac{\lambda}{4}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*} u_{\mathcal{K}^*}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} m_\sigma\frac{u_{\mathcal{L}^*}-u_{\mathcal{K}^*}}{4} \\
&= -\frac{\lambda}{4}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} m_\sigma\frac{(u_{\mathcal{K}^*}-u_{\mathcal{L}^*})^2}{4}
\end{aligned}$$

On applique la formule de Green discrète :

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} &= (\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}},\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} - (\gamma^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}\cdot n),\gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}}))_{\partial\Omega} \\
&= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}}|^2 + \lambda\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma\left(\frac{1}{2}\gamma_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) + \frac{1}{2}\gamma_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})\right)^2
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$0 = \frac{\lambda}{4}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} m_\sigma\frac{(u_{\mathcal{K}^*}-u_{\mathcal{L}^*})^2}{4} + \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}}|^2 + \lambda\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma\left(\frac{u_{\mathcal{L}^*}+u_{\mathcal{K}^*}+2u_{\mathcal{L}}}{4}\right)^2$$

On a donc $\forall\ \mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext},\ u_{\mathcal{L}^*}+u_{\mathcal{K}^*}+2u_{\mathcal{L}}=0$, $\forall\ \mathcal{D}\in\mathfrak{D},\ \nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}}=0$ et $\forall\ \mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*,\ u_{\mathcal{K}^*}-u_{\mathcal{L}^*}=0$, ce qui implique qu'il existe deux constantes c_0 et c_1 telles que :

$$\begin{aligned}
\forall\ \mathcal{K}\in(\mathfrak{M}\cup\partial\mathfrak{M}), \quad u_{\mathcal{K}} &= c_0 \\
\forall\ \mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*), \quad u_{\mathcal{K}^*} &= c_1
\end{aligned}$$

et que $c_0+c_1=0$.

Or la dernière équation : $\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}u_{\mathcal{K}} = \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*}u_{\mathcal{K}^*}$, impose les deux constantes. En effet, on a : $\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}c_0 = \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)} m_{\mathcal{K}^*}c_1$, donc $c_0=c_1$. On a ainsi $c_0=c_1=0$ et $u^{\mathcal{T}}=0$.
Il existe une unique solution $u^{\mathcal{T}}\in\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$.

■

3.4.4 Condition mixte de Dirichlet et Neumann non homogène

$$\begin{aligned}
-\Delta u(x) &= f(x), \quad x\in\Omega, \\
u(s) &= g(s), \quad s\in\Gamma_D, \\
(\nabla u(s),\vec{n}) &= \Phi(s), \quad s\in\Gamma_N.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

On suppose que les frontières entre les bords Dirichlet et Neumann sont aux noeuds du maillage dual (*ie* aux sommets du maillage primal) figure 3.9. Ainsi les noeuds $x_{\mathcal{K}}$ des mailles du bord primal appartiennent exclusivement à Γ_D ou exclusivement à Γ_N ainsi la définition de $\partial\mathfrak{M}_D$ et $\partial\mathfrak{M}_N$ ne pose pas de problème. Par contre, les noeuds $x_{\mathcal{K}^*}$ des mailles du bord dual peuvent appartenir à la fois à Γ_D et à Γ_N dans ce cas le noeud $x_{\mathcal{K}^*}$ impose que la maille $\mathcal{K}^*$ appartient à $\partial\mathfrak{M}^*_D$. Les noeuds $x_{\mathcal{K}^*}$ appartenant uniquement à Γ_D (respectivement Γ_N) imposent que leur maille $\mathcal{K}^*$ dans $\partial\mathfrak{M}^*_D$ (respectivement $\partial\mathfrak{M}^*_N$). On rappelle les notations des bords Dirichlet et Neumann :

$$\begin{aligned}
\partial\mathfrak{M}_D &= \{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}, x_{\mathcal{K}}\in\Gamma_D\} \\
\partial\mathfrak{M}_N &= \{\mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M}, x_{\mathcal{K}}\in\Gamma_N\backslash\Gamma_D\} \\
\partial\mathfrak{M}^*_D &= \{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*, x_{\mathcal{K}^*}\in\Gamma_D\} \\
\partial\mathfrak{M}^*_N &= \{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*, x_{\mathcal{K}^*}\in\Gamma_N\backslash\Gamma_D\}
\end{aligned}$$

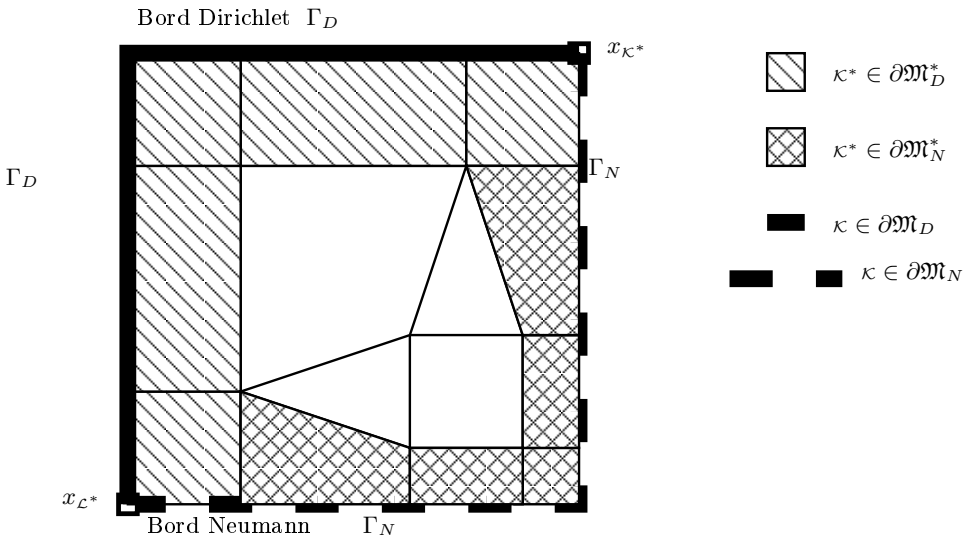

FIG. 3.9 – Condition mixte de Dirichlet et Neumann non homogène

Démarches :
On intégre l'équation sur les mailles primales intéieures :

$$\forall\ \kappa \in \mathfrak{M} \quad \int_{\kappa} f(x)\mathrm{d}x \quad = \quad -\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} \int_{\sigma} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s$$

On intégre l'équation sur les mailles duales intérieures :

$$\forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \quad \int_{\kappa^*} f(x)\mathrm{d}x \quad = \quad -\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} \int_{\sigma^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*})\mathrm{d}s$$

On intégre l'équation sur les mailles duales du bord Neumann $\partial\mathfrak{M}_N^*$:

$$\forall\ \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_N^* \quad \int_{\mathcal{K}^*} f(x)\mathrm{d}x \quad = \quad -\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} \int_{\sigma^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*})\mathrm{d}s - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma_N)} \int_{\sigma\cap\mathcal{K}^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s$$

On impose les conditions limites sur les mailles duales du bord Dirichlet $\partial\mathfrak{M}_D^*$:

$$\forall\ \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_D^*\ u(x_{\mathcal{K}^*}) = g(x_{\mathcal{K}^*}).$$

Et on impose les conditions limites sur le bord primal :

$$\begin{array}{lrcl} \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}_D, & u(x_{\mathcal{K}}) & = & g(x_{\mathcal{K}}) \\ \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}_N, & \displaystyle\int_{\mathcal{K}} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s & = & \displaystyle\int_{\mathcal{K}} \Phi(s)\mathrm{d}s \end{array}$$

Schéma :
Le schéma du problème (3.8) s'écrit :

On cherche $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_{m,g}^D$ tel que

$$\begin{array}{lrcl} \forall\ \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\mathcal{K}} \\ \forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\mathcal{K}^*} \\ \forall\ \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_N^* & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\mathcal{K}^*} \\ \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}_N, & (\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) & = & \Phi_{\mathcal{K}} \end{array} \tag{3.9}$$

Théorème 8 (Existence et Unicité).
Il y a une unique solution $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_{m,g}^D$ du schéma (3.9).

Démonstration :
Soient $u_1^{\mathcal{T}}$ et $u_2^{\mathcal{T}}$ deux solutions dans $\mathbb{E}_{m,g}^D$ du schéma (3.9), on pose $u^{\mathcal{T}} = u_1^{\mathcal{T}} - u_2^{\mathcal{T}}$ qui appartient à $\mathbb{E}_0^D$. Le vecteur $u^{\mathcal{T}}$ vérifie :

$$\begin{cases} \forall\, \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= 0 \\ \forall\, \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= 0 \\ \forall\, \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*_N, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= 0 \\ \forall\, \kappa \in \partial\mathfrak{M}_N, & (\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) &= 0 \end{cases}$$

La définition de la divergence discrète donne $-\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} = 0$. En effet, la définition du crochetJ, K ne fait intervenir que le bord du maillage dual, ainsi sur le bord dual où il y a la condition de Dirichlet $u^{\mathcal{T}}$ est nul et où il y a la condition de Neumann $\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})$ est nulle. On applique la formule de Green discrète :

$$\begin{aligned} -\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} &= 0 \\ &= (\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} - (\gamma^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot n), \gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}}))_{\partial\Omega} \\ &= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}|^2 + \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma \underbrace{(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})}_{=0 \text{ bord Neumann}} \underbrace{\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}})}_{=0 \text{ bord Dirichlet}} \\ &= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}|^2 \end{aligned}$$

On a donc $\forall\, \mathcal{D} \in \mathfrak{D},\ \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = 0$, il existe deux constantes c_0 et c_1 telles que :

$$\begin{array}{lll} \forall\, \kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), & u_{\mathcal{K}} &= c_0 \\ \forall\, \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), & u_{\mathcal{K}^*} &= c_1 \end{array}$$

Or $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}^D_0$, donc $c_0 = c_1 = 0$. D'où $u^{\mathcal{T}} = 0$.

■

3.4.5 Condition mixte de Dirichlet et Fourier non homogène

Premier cas

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) &=& f(x), & x \in \Omega, \\ u(s) &=& g^D(s), & s \in \Gamma_D, \\ -(\nabla u(s), \vec{n}) &=& \lambda(u(s) - g^F(s)), & s \in \Gamma_F. \end{array} \tag{3.10}$$

avec $\lambda > 0$.

On suppose que les frontières entre les bords Dirichlet et Fourier sont aux noeuds du maillage dual (figure 3.10). Ainsi les noeuds $x_{\mathcal{K}}$ des mailles du bord primal appartiennent exclusivement à Γ_D ou exclusivement à Γ_F ainsi la définition de $\partial\mathfrak{M}_D$ et $\partial\mathfrak{M}_F$ ne pose pas de problème. Par contre, les noeuds $x_{\mathcal{K}^*}$ des mailles du bord dual peuvent appartenir à la fois à Γ_D et à Γ_F dans ce cas le noeud $x_{\mathcal{K}^*}$ impose que la maille κ^* appartient à $\partial\mathfrak{M}^*_D$. Les noeuds $x_{\mathcal{K}^*}$ appartenant uniquement à Γ_D (respectivement Γ_F) imposent que leur maille κ^* dans $\partial\mathfrak{M}^*_D$ (respectivement $\partial\mathfrak{M}^*_F$). On rappelle les notations des bords Dirichlet et Fourier :

$$\begin{array}{lll} \partial\mathfrak{M}_D &=& \{\kappa \in \partial\mathfrak{M}, x_{\mathcal{K}} \in \Gamma_D\} \\ \partial\mathfrak{M}_F &=& \{\kappa \in \partial\mathfrak{M}, x_{\mathcal{K}} \in \Gamma_F \backslash \Gamma_D\} \\ \partial\mathfrak{M}^*_D &=& \{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*, x_{\mathcal{K}^*} \in \Gamma_D\} \\ \partial\mathfrak{M}^*_F &=& \{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*, x_{\mathcal{K}^*} \in \Gamma_F \backslash \Gamma_D\} \end{array}$$

Démarches :
On intégre l'équation sur les mailles primales intérieures :

$$\forall\, \kappa \in \mathfrak{M} \quad \int_{\mathcal{K}} f(x)\mathrm{d}x = -\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} \int_\sigma (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s$$

On intégre l'équation sur les mailles duales intérieures :

$$\forall\, \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \quad \int_{\mathcal{K}^*} f(x)\mathrm{d}x = -\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} \int_{\sigma^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*})\mathrm{d}s$$

On intégre l'équation sur les mailles duales du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}^*_F$:

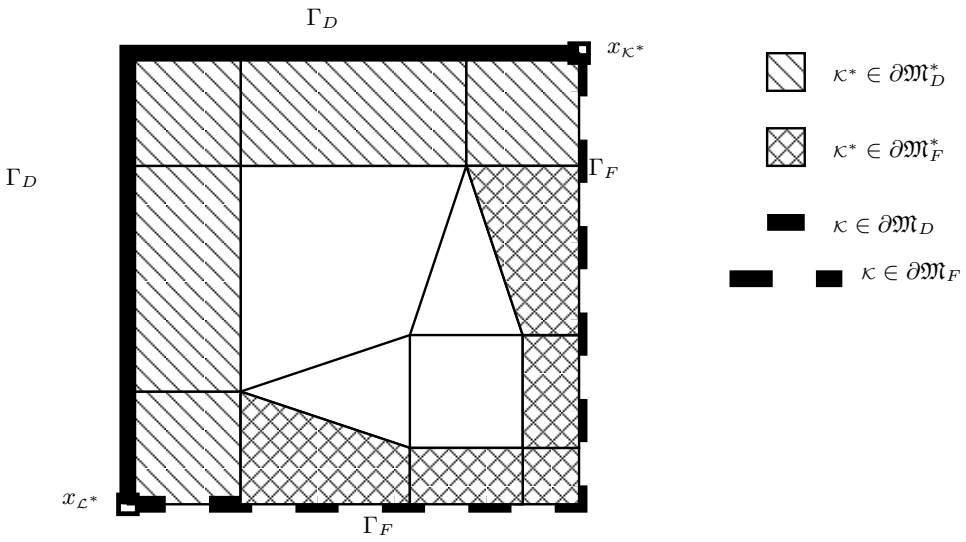

FIG. 3.10 – Condition mixte de Dirichlet et Fourier non homogène

$$\forall\ \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_F^* \quad \int_{\mathcal{K}^*} f(x)\mathrm{d}x \;=\; -\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} \int_{\sigma^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*})\mathrm{d}s - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma_F)} \int_{\sigma} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s$$

On impose les conditions limites sur les mailles duales du Dirichlet $\partial\mathfrak{M}_D^*$:

$$\forall\ \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_D^*\ u(x_{\mathcal{K}^*}) = g^D(x_{\mathcal{K}^*})$$

Et on impose les conditions limites sur le bord primal :

$$\begin{array}{lrcl} \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}_D, & u(x_{\mathcal{K}}) & = & g^D(x_{\mathcal{K}}) \\ \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}_F, & -\displaystyle\int_{\mathcal{K}} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s & = & \lambda \displaystyle\int_{\mathcal{K}} (u(s) - g^F(s))\mathrm{d}s \end{array}$$

Schéma :
Le schéma du problème (3.10) s'écrit :

On cherche $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_{m,g}^D$ tel que

$$\begin{array}{lrcl} \forall\ \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\mathcal{K}} \\ \forall\ \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}_F^*), & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\mathcal{K}^*} \\ \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}_F, & -(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) & = & \lambda\left(\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) - g_{\mathcal{K}}^F\right) \end{array} \tag{3.11}$$

Théorème 9 (Existence et Unicité).
Il y a une unique solution $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_{m,g}^D$ du schéma (3.11).

Démonstration :
Soient $u_1^{\mathcal{T}}$ et $u_2^{\mathcal{T}}$ deux solutions dans $\mathbb{E}_{m,g}^D$ du schéma (3.11), on pose $u^{\mathcal{T}} = u_1^{\mathcal{T}} - u_2^{\mathcal{T}}$ qui appartient à $\mathbb{E}_0^D$. Le vecteur $u^{\mathcal{T}}$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \forall\ \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & 0 \\ \forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & 0 \\ \forall\ \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_F^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & 0 \\ \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}_F, & -(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) & = & \lambda\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) \end{array} \right.$$

La définition de la divergence discrète donne $-\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} = 0$. On applique la formule de Green discrète :

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} &= 0 \\
&= (\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} - (\gamma^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot n), \gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}}))_{\partial\Omega} \\
&= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}|^2 + \lambda \sum_{\mathcal{D}\in(\mathfrak{D}\cap\Gamma_F)} m_\sigma \left(\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}})\right)^2
\end{aligned}$$

On a donc $\forall\ \mathcal{D} \in \mathfrak{D},\ \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = 0$, il existe deux constantes c_0 et c_1 telles que :

$$\begin{aligned}
\forall\ \mathcal{K} \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), \quad u_{\mathcal{K}} &= c_0 \\
\forall\ \mathcal{K}^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), \quad u_{\mathcal{K}^*} &= c_1
\end{aligned}$$

Or $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0^D$ donc $c_0 = c_1 = 0$. D'où $u^{\mathcal{T}} = 0$.

■

Deuxième cas

Schéma :

On envisage un second schéma (en imposant la condition limite de Fourier sur le bord des mailles de $\partial\mathfrak{M}_F^*$) pour le problème (3.10) :

On cherche $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_{m,g}^D$ tel que

$$\begin{aligned}
&\forall\ \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, && -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= f_{\mathcal{K}} \\
&\forall\ \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*, && -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= f_{\mathcal{K}^*} \\
&\forall\ \mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}_F^*, && -\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}) + \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} m_\sigma \left(\gamma_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) - g_{\mathcal{L}}\right) &= m_{\mathcal{K}^*} f_{\mathcal{K}^*} \\
&\forall\ \mathcal{K} \in \partial\mathfrak{M}_F, && -(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) &= \lambda\left(\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) - g_{\mathcal{K}}^F\right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Théorème 10 (Existence et Unicité).

Il y a une unique solution $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_{m,g}^D$ du schéma (3.12).

Démonstration :

Soient $u_1^{\mathcal{T}}$ et $u_2^{\mathcal{T}}$ deux solutions dans $\mathbb{E}_{m,g}^D$ du schéma (3.12), on pose $u^{\mathcal{T}} = u_1^{\mathcal{T}} - u_2^{\mathcal{T}}$ qui appartient à $\mathbb{E}_0^D$. Le vecteur $u^{\mathcal{T}}$ vérifie :

$$\begin{cases}
\forall\ \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) = 0 \\
\forall\ \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) = 0 \\
\forall\ \mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}_F^*, & -\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}) + \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} m_\sigma \left(\gamma_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})\right) = 0 \\
\forall\ \mathcal{K} \in \partial\mathfrak{M}_F, & -(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) = \lambda\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}})
\end{cases}$$

En refaisant les mêmes calculs que dans le deuxième cas de Fourier non homogène, on a :

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} &= -\frac{\lambda}{4} \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\partial\Omega)} m_\sigma \frac{(u_{\mathcal{K}^*} - u_{\mathcal{L}^*})^2}{4} \\
&= (\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} - (\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}.n, u^{\mathcal{T}})_{\partial\Omega} \\
&= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}|^2 + \lambda \sum_{\mathcal{D}\in(\mathfrak{D}\cap\Gamma_F)} m_\sigma \left(\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}})\right)^2
\end{aligned}$$

On a donc $\forall\ \mathcal{D} \in \mathfrak{D},\ \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = 0$, il existe deux constantes c_0 et c_1 telles que :

$$\begin{aligned}
\forall\ \mathcal{K} \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), \quad u_{\mathcal{K}} &= c_0 \\
\forall\ \mathcal{K}^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), \quad u_{\mathcal{K}^*} &= c_1
\end{aligned}$$

Or $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0^D$ donc $c_0 = c_1 = 0$. D'où $u^{\mathcal{T}} = 0$.

■

3.4.6 Condition mixte de Dirichlet, Neumann et Fourier non homogène

Remarque 9 : C'est un cas particulier du cas précédent en posant $\lambda = \lambda(x) \geq 0$.

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) & = & f(x), & x \in \Omega, \\ u(s) & = & g^D(s), & s \in \Gamma_D, \\ (\nabla u(s), \vec{n}) & = & \Phi(s), & s \in \Gamma_N. \\ -(\nabla u(s), \vec{n}) & = & \lambda(u(s) - g^F(s)), & s \in \Gamma_F. \end{array} \tag{3.13}$$

On suppose que les frontières entre les bords sont aux noeuds du maillage dual. On rappelle les notations des bords :

$$\begin{array}{rcl} \partial\mathfrak{M}_D & = & \{\kappa \in \partial\mathfrak{M}, x_\kappa \in \Gamma_D\} \\ \partial\mathfrak{M}_N & = & \{\kappa \in \partial\mathfrak{M}, x_\kappa \in \Gamma_N \backslash (\Gamma_D \cap \Gamma_F)\} \\ \partial\mathfrak{M}_F & = & \{\kappa \in \partial\mathfrak{M}, x_\kappa \in \Gamma_F \backslash (\Gamma_D \cap \Gamma_N)\} \\ \partial\mathfrak{M}^*_D & = & \{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*, x_{\kappa^*} \in \Gamma_D\} \\ \partial\mathfrak{M}^*_N & = & \{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*, x_{\kappa^*} \in \Gamma_N \backslash (\Gamma_D \cap \Gamma_F)\} \\ \partial\mathfrak{M}^*_F & = & \{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*, x_{\kappa^*} \in \Gamma_F \backslash (\Gamma_D \cap \Gamma_N)\} \end{array}$$

Démarches :
On intégre l'équation sur les mailles primales intérieures :

$$\forall\ \kappa \in \mathfrak{M} \quad \int_\kappa f(x)\mathrm{d}x \quad = \quad - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_\kappa} \int_\sigma (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\kappa})\mathrm{d}s$$

On intégre l'équation sur les mailles duales intérieures :

$$\forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \quad \int_{\kappa^*} f(x)\mathrm{d}x \quad = \quad - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \int_{\sigma^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*})\mathrm{d}s$$

On intégre l'équation sur les mailles duales du bord $\partial\mathfrak{M}^*_N$ et $\partial\mathfrak{M}^*_F$:

$$\forall\ \kappa^* \in (\partial\mathfrak{M}^*_N \cup \partial\mathfrak{M}^*_F) \quad \int_{\kappa^*} f(x)\mathrm{d}x \quad = \quad - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \int_{\sigma^*} (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*})\mathrm{d}s - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in (\mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap (\Gamma_F \cup \Gamma_N))} \int_\sigma (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\kappa})\mathrm{d}s$$

On impose les conditions limites sur les mailles duales du bord Dirichlet $\partial\mathfrak{M}^*_D$:

$$\forall\ \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*_D u(x_{\kappa^*}) = g^D(x_{\kappa^*}).$$

Et on impose les conditions limites sur le bord primal :

$$\begin{array}{lrcl} \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}_D, & u(x_\kappa) & = & g^D(x_\kappa) \\ \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}_N, & \displaystyle\int_\kappa (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\kappa})\mathrm{d}s & = & \displaystyle\int_\kappa \Phi(s)\mathrm{d}s \\ \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}_F, & \displaystyle -\int_\kappa (\nabla u(s), \vec{n}_{\sigma\kappa})\mathrm{d}s & = & \displaystyle\lambda \int_\kappa (u(s) - g^F(s))\mathrm{d}s \end{array}$$

Schéma :
Le schéma du problème (3.13) s'écrit :

On cherche $u^\mathcal{T} \in \mathbb{E}^D_{m,g}$ tel que

$$\begin{array}{lrcl} \forall\ \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^\kappa(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) & = & f_\kappa \\ \forall\ \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*_N \cup \partial\mathfrak{M}^*_F), & -\mathrm{div}^{\kappa^*}(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) & = & f_{\kappa^*} \\ \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}_N, & (\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{n}_{\sigma\kappa}) & = & \Phi_\kappa \\ \forall\ \kappa \in \partial\mathfrak{M}_F, & -(\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{n}_{\sigma\kappa}) & = & \lambda\left(\gamma^\mathcal{D}(u^\mathcal{T}) - g^F_\kappa\right) \end{array} \tag{3.14}$$

Théorème 11 (Existence et Unicité).

Il y a une unique solution $u^\mathcal{T} \in \mathbb{E}^D_{m,g}$ du schéma (3.14).

Démonstration :
Soient $u^\mathcal{T}_1$ et $u^\mathcal{T}_2$ deux solutions dans $\mathbb{E}^D_{m,g}$ du schéma (3.14), on pose $u^\mathcal{T} = u^\mathcal{T}_1 - u^\mathcal{T}_2$ qui appartient à $\mathbb{E}^D_0$. Le vecteur $u^\mathcal{T}$ vérifie :

$$\begin{cases} \forall\, \kappa \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\kappa}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= 0 \\ \forall\, \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}_N^* \cup \partial\mathfrak{M}_F^*), & -\mathrm{div}^{\kappa^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= 0 \\ \forall\, \kappa \in \partial\mathfrak{M}_N, & (\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\kappa}) &= 0 \\ \forall\, \kappa \in \partial\mathfrak{M}_F, & -(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\kappa}) &= \lambda\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) \end{cases}$$

La définition de la divergence discrète donne $-\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} = 0$. On applique la formule de Green discrète :

$$\begin{aligned} -\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} &= 0 \\ &= (\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} - (\gamma^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot n), \gamma^{\mathcal{T}}(u^{\mathcal{T}}))_{\partial\Omega} \\ &= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}|^2 + \lambda \sum_{\mathcal{D}\in(\mathfrak{D}\cap\Gamma_F)} m_\sigma \left(\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}})\right)^2 \end{aligned}$$

On a donc $\forall\, \mathcal{D} \in \mathfrak{D},\ \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = 0$, il existe deux constantes c_0 et c_1 telles que :

$$\begin{aligned} \forall\, \kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), \quad u_\kappa &= c_0 \\ \forall\, \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), \quad u_{\kappa^*} &= c_1 \end{aligned}$$

Or $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0^D$ donc $c_0 = c_1 = 0$. D'où $u^{\mathcal{T}} = 0$.

■

3.5 Estimation d'erreur

On étudie l'estimation d'erreur du problème avec une condition limite de Dirichlet non homogène :

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(s) &= g(s), \quad s \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.15}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $g \in \widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ espace défini dans la définition suivante.

3.5.1 Définition

Définition 11.

On définit l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ de la manière suivante :

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \left\{ g \in L^2(\partial\Omega), ||g||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} := ||g||^2_{L^2(\partial\Omega)} + \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \left| \frac{g(x)-g(y)}{|x-y|^{\frac{1}{2}}} \right|^2 \frac{dx\ dy}{|x-y|} < +\infty \right\}$$

On suppose Ω polygonal et on note $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k$ les côtés de Ω, on définit alors sur chaque côté Γ_i l'espace $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_i)$ par :

$$h \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_i) \Leftrightarrow h \in H^1(\Gamma_i) \text{ telle que } \int_{\Gamma_i}\int_{\Gamma_i} \left| \frac{\nabla h(x) - \nabla h(y)}{|x-y|^{\frac{1}{2}}} \right|^2 \frac{dx\ dy}{|x-y|} < +\infty$$

On définit enfin l'espace $\widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ telle que :

$$\widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) = \{g \in H^1(\partial\Omega), g_{|\Gamma_i} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_i)\}$$

On note

$$||g||^2_{\widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i}\int_{\Gamma_i} \left| \frac{\nabla g(x) - \nabla g(y)}{|x-y|^{\frac{1}{2}}} \right|^2 \frac{dx\ dy}{|x-y|}$$

On aura besoin de projeter des fonctions de Ω sur toutes les mailles. On projette en évaluant en x_κ (respectivement x_{κ^*}).

Définition 12.

Pour toute fonction v de $\bar{\Omega}$, on note la projection de la valeur au centre des mailles :

$$\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} v = ((v(x_{\mathcal{K}}))_{\mathcal{K}\in(\mathfrak{M}\cup\partial\mathfrak{M})}, (v(x_{\mathcal{K}^*}))_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)})$$

3.5.2 Résultats intermédiaires

Pour démontrer l'estimation d'erreur, on a besoin de résultats intermédiaires. Tout d'abord une inégalité de Poincaré discrète :

Théorème 12 (Inégalité de Poincaré discrète).

Il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall\ g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}^D_{m,g}$:

$$||u^{\mathcal{T}}||_2 \leq ||u^{\mathfrak{M}}||_2 + ||u^{\mathfrak{M}^*}||_2 \leq C\ diam(\Omega)\left(||\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}||_2 + ||g||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right)$$

Démonstration :
On peut écrire $|u_{\mathcal{K}}|^2 = |u_{\mathcal{K}}|^2 - |u_{\mathcal{L}}|^2 + |u_{\mathcal{L}}|^2 + \cdots + g_{\mathcal{K}}$, on remonte de voisins en voisins pour arriver au bords $g_{\mathcal{K}}$.

On introduit une fonction qui permet de déterminer les voisins successifs d'un élément $u_{\mathcal{K}}$: Pour σ et $x_{\mathcal{K}} = (x, y)$, on pose

$$\psi_\sigma(x_{\mathcal{K}}) = \begin{cases} 1 & \text{si la projection orthogonale de } \sigma \text{ sur l'hyperplan } \{x = 0\} \text{ contient } (0, y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où si $x \in \kappa_0$

$$\begin{aligned} |u_{\kappa_0}|^2 &\leq \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} \psi_\sigma(x)\left||u_{\mathcal{K}}|^2 - |u^2_{\mathcal{L}}|\right| + \sum_{\sigma\in\partial\mathfrak{M}} \psi_\sigma(x)|g_\sigma|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} \psi_\sigma(x) m_{\sigma^*}\frac{|u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}|}{m_{\sigma^*}}(|u_{\mathcal{K}}| + |u_{\mathcal{L}}|) + \sum_{\sigma\in\partial\mathfrak{M}} \psi_\sigma(x)|g_\sigma|^2 \end{aligned}$$

Remarque 10 : le facteur $\frac{1}{2}$ vient du fait que l'on a choisit la droite directive mais pas son orientation.

On remarque l'inégalité suivante :

$$\int_\Omega \psi_\sigma(x)\mathrm{d}x \leq m_\sigma\ \mathrm{diam}(\Omega)$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} ||u^{\mathfrak{M}}||_2^2 &= \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}|u_{\mathcal{K}}|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}}\left(\int_\Omega \psi_\sigma(x)\mathrm{d}x\right) m_{\sigma^*}\frac{|u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}|}{m_{\sigma^*}}(|u_{\mathcal{K}}| + |u_{\mathcal{L}}|) + \sum_{\sigma\in\partial\mathfrak{M}}\left(\int_\Omega \psi_\sigma(x)\mathrm{d}x\right)|g_\sigma|^2 \\ &\underbrace{\leq}_{\text{inégalité précédent}} \frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{2}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_\sigma m_{\sigma^*}\frac{|u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}|}{m_{\sigma^*}}(|u_{\mathcal{K}}| + |u_{\mathcal{L}}|) + \mathrm{diam}(\Omega)||g_{\mathcal{K}}||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\ &\underbrace{\leq}_{\text{CS}} \frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\sin\alpha_{\mathcal{T}}}\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}\left|\frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{m_{\sigma^*}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}(|u_{\mathcal{K}}| + |u_{\mathcal{L}}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{diam}(\Omega)||g_{\mathcal{K}}||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\ &\leq 2\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\sin\alpha_{\mathcal{T}}}\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}\left|\frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{m_{\sigma^*}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}}|u_{\mathcal{K}}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{diam}(\Omega)||g_{\mathcal{K}}||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

Le résultat suivant est dû à :

$$\begin{array}{rcl} A^2 & \leq & DA + B \\ & \leq & \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}A^2 + B \\ \frac{1}{2}A^2 & \leq & \frac{1}{2}D^2 + B \\ A^2 & \leq & C(D^2 + B^2) \\ A & \leq & C(D + B) \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} ||u^{\mathfrak{M}}||_2 & \leq & C\frac{\text{diam}(\Omega)}{\sin\,\alpha_{\mathcal{T}}}\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}\left|\frac{u_{\mathcal{K}}-u_{\mathcal{L}}}{m_{\sigma^*}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + C\ \text{diam}(\Omega)||g_{\mathcal{K}}||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\ & \leq & C\frac{\text{diam}(\Omega)}{\sin\,\alpha_{\mathcal{T}}}\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}\left|(\nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}},\vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + C\ \text{diam}(\Omega)||g_{\mathcal{K}}||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\ & \leq & C\frac{\text{diam}(\Omega)}{\sin\,\alpha_{\mathcal{T}}}\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}\left|\nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + C\ \text{diam}(\Omega)||g_{\mathcal{K}}||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\ & \leq & C\ \text{diam}(\Omega)\left(||\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}||_2 + ||g||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right) \end{array}$$

■

Ensuite on a besoin d'un lemme sur la différence entre le gradient continu et le gradient discret :

Lemme 1.

Soit $u \in H^2(\Omega)$, il existe $C > 0$ telle que

$$||\nabla u - \nabla^{\mathcal{T}}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u||_2 \leq C\ size(\mathcal{T})||\nabla u||_{H^1(\Omega)}$$

Démonstration :

On va démontrer ce résultat par densité des fonctions $C^2(\bar{\Omega})$ dans $H^2(\Omega)$. Soit $u \in C^2(\bar{\Omega})$, d'après la formule de Taylor avec reste intégral on a : $\forall\ z \in \mathcal{D}$

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{m_{\sigma^*}}(u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\mathcal{K}})) & = & \frac{1}{m_{\sigma^*}}(u(x_{\mathcal{L}}) - u(z) + u(z) - u(x_{\mathcal{K}})) \\ & = & \frac{1}{m_{\sigma^*}}\Big(\nabla u(z)(x_{\mathcal{L}} - z) + \int_0^1 (1-t)(D^2u((1-t)z + tx_{\mathcal{L}})(x_{\mathcal{L}} - z),(x_{\mathcal{L}} - z))\mathrm{d}t \\ & & -\nabla u(z)(x_{\mathcal{K}} - z) + \int_0^1 (1-t)(D^2u((1-t)z + tx_{\mathcal{K}})(x_{\mathcal{K}} - z),(x_{\mathcal{K}} - z))\mathrm{d}t\Big) \\ & = & (\nabla u(z),\vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}) + \frac{1}{m_{\sigma^*}}\int_0^1 (1-t)(D^2u((1-t)z + tx_{\mathcal{L}})(x_{\mathcal{L}} - z),(x_{\mathcal{L}} - z))\mathrm{d}t \\ & & -\frac{1}{m_{\sigma^*}}\int_0^1 (1-t)(D^2u((1-t)z + tx_{\mathcal{K}})(x_{\mathcal{K}} - z),(x_{\mathcal{K}} - z))\mathrm{d}t \end{array}$$

De même, on peut écrire : $\forall\ z \in \mathcal{D}$

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{m_{\sigma}}(u(x_{\mathcal{L}^*}) - u(x_{\mathcal{K}^*})) & = & (\nabla u(z),\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*}) + \frac{1}{m_{\sigma}}\int_0^1 (1-t)(D^2u((1-t)z + tx_{\mathcal{L}^*})(x_{\mathcal{L}^*} - z),(x_{\mathcal{L}^*} - z))\mathrm{d}t \\ & & -\frac{1}{m_{\sigma}}\int_0^1 (1-t)(D^2u((1-t)z + tx_{\mathcal{K}^*})(x_{\mathcal{K}^*} - z),(x_{\mathcal{K}^*} - z))\mathrm{d}t \end{array}$$

Ainsi si on regarde la valeur de $\nabla u - \nabla^{\mathcal{D}}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u$, on obtient : $\forall\ z \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}
\sin\alpha_{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{D}}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u-\nabla u) &= \frac{u(x_{\mathcal{L}})-u(x_{\mathcal{K}})}{m_{\sigma^*}}\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}+\frac{u(x_{\mathcal{L}^*})-u(x_{\mathcal{K}^*})}{m_{\sigma}}\vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}-\sin\alpha_{\mathcal{D}}\nabla u\\
&= \frac{\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}}{m_{\sigma^*}}\int_0^1(1-t)(D^2u((1-t)z+tx_{\mathcal{L}})(x_{\mathcal{L}}-z),(x_{\mathcal{L}}-z))\mathrm{d}t\\
&\quad-\frac{\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}}{m_{\sigma^*}}\int_0^1(1-t)(D^2u((1-t)z+tx_{\mathcal{K}})(x_{\mathcal{K}}-z),(x_{\mathcal{K}}-z))\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{\vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}}{m_{\sigma}}\int_0^1(1-t)(D^2u((1-t)z+tx_{\mathcal{L}^*})(x_{\mathcal{L}^*}-z),(x_{\mathcal{L}^*}-z))\mathrm{d}t\\
&\quad-\frac{\vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}}{m_{\sigma}}\int_0^1(1-t)(D^2u((1-t)z+tx_{\mathcal{K}^*})(x_{\mathcal{K}^*}-z),(x_{\mathcal{K}^*}-z))\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On pose pour un diamant $\mathcal{D}\in\mathfrak{D}$:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathcal{K},\sigma^*} &= \int_{\mathcal{D}}\left|\frac{1}{m_{\sigma^*}}\int_0^1(1-t)(D^2u((1-t)z+tx_{\mathcal{K}})(x_{\mathcal{K}}-z),(x_{\mathcal{K}}-z))\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}z\\
&\leq \frac{1}{m_{\sigma^*}^2}\int_{\mathcal{D}}\int_0^1(1-t)^2|D^2u((1-t)z+tx_{\mathcal{K}})(x_{\mathcal{K}}-z),(x_{\mathcal{K}}-z)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}z\\
&\leq \frac{d_{\mathcal{D}}^4}{m_{\sigma^*}^2}\int_{\mathcal{D}}\int_0^1(1-t)^2|D^2u(\underbrace{(1-t)z+tx_{\mathcal{K}}}_{=y})|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}z\\
&\leq \frac{d_{\mathcal{D}}^4}{m_{\sigma^*}^2}\int_0^1(1-t)^{2-2}\mathrm{d}t\int_{\widehat{\mathcal{D}}}|D^2u(y)|^2\mathrm{d}y\\
&\leq \frac{d_{\mathcal{D}}^4}{m_{\sigma^*}^2}\int_{\widehat{\mathcal{D}}}|D^2u(y)|^2\mathrm{d}y\\
&\leq Cd_{\mathcal{D}}^2\int_{\widehat{\mathcal{D}}}|D^2u(y)|^2\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

où $\widehat{\mathcal{D}}$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{D}$. On fait de même pour $\Pi_{\mathcal{L},\sigma^*}$, $\Pi_{\mathcal{K}^*,\sigma}$ et $\Pi_{\mathcal{L}^*,\sigma}$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u(z)-\nabla u(z)|^2\mathrm{d}z &\leq \frac{4}{\sin\alpha_{\mathcal{D}}^2}\left(\Pi_{\mathcal{L},\sigma^*}+\Pi_{\mathcal{K},\sigma^*}+\Pi_{\mathcal{L}^*,\sigma}+\Pi_{\mathcal{K}^*,\sigma}\right)\\
&\leq Cd_{\mathcal{D}}^2\int_{\widehat{\mathcal{D}}}|D^2u(y)|^2\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
||\nabla u-\nabla^{\mathcal{T}}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u||_2^2 &= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}}\int_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u(z)-\nabla u(z)|^2\mathrm{d}z\\
&\leq \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}}Cd_{\mathcal{D}}^2\int_{\widehat{\mathcal{D}}}|D^2u(y)|^2\mathrm{d}y\\
&\underbrace{\leq}_{d_{\mathcal{D}}\leq\text{ size}(\mathcal{T})} C\text{ size}(\mathcal{T})^2\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}}\int_{\widehat{\mathcal{D}}}|D^2u(y)|^2\mathrm{d}y\\
&\leq C\text{ size}(\mathcal{T})^2||\nabla u||_{H^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Donc

$$||\nabla u-\nabla^{\mathcal{T}}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u||_2\leq C\text{ size}(\mathcal{T})||\nabla u||_{H^1(\Omega)}$$

■

On utilise le lemme suivant sur la différence du gradient discret d'un élément de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ projeté sur les deux espaces $\mathbb{E}_{m,g}^D$ et $\mathbb{E}_{c,g}^D$.

Lemme 2.

Soient $g \in \widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}^{D}_{m,g}$ on pose $u^{\mathcal{T}}_c = \mathfrak{P}^{D}_{c,g} u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}^{D}_{c,g}$, il existe $C > 0$ telle que

$$||\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} - \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}_c||_2 \leq C \ size(\mathcal{T}) ||g||_{\widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}$$

Démonstration : Soit $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, on pose $G^{\mathcal{D}} = \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}_c - \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}$.

Première étape :

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
(G^{\mathcal{D}}, \vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}) &= -\frac{1}{m_{\sigma^*}} \left(g(x_{\mathcal{K}}) - \frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{K}}}} \int_{\sigma_{\mathcal{K}}} g(s) \mathrm{d}s \right) && \text{si } \mathcal{D} = \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \text{ tel que } \sigma \in \partial\mathfrak{M} \\
&= 0 && \text{sinon}
\end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture on fait le calcul dans un cas particulier : $\sigma_{\mathcal{K}} =]-h_{\mathcal{K}}, h_{\mathcal{K}}[\times\{0\}$ et $x_{\mathcal{K}} = (0,0)$. Ainsi on peut écrire :

$$\begin{aligned}
m_{\sigma^*}(G^{\mathcal{D}}, \vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}) &= \frac{1}{2h_{\mathcal{K}}} \int_{-h_{\mathcal{K}}}^{h_{\mathcal{K}}} (g(s) - g(x_{\mathcal{K}})) \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2h_{\mathcal{K}}} \int_{-h_{\mathcal{K}}}^{h_{\mathcal{K}}} \int_0^1 \nabla g(\underbrace{x_{\mathcal{K}}}_{=(0,0)} + t(s - x_{\mathcal{K}})) \underbrace{(s - x_{\mathcal{K}})}_{=x} \mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2h_{\mathcal{K}}} \int_0^1 \int_{-h_{\mathcal{K}}}^{h_{\mathcal{K}}} \nabla g(\underbrace{tx}_{=s}) x \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2h_{\mathcal{K}}} \int_0^1 \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} \nabla g(s) \frac{s}{t^2} \mathrm{d}s\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_{-a}^{a} \nabla g(y) s \mathrm{d}s = \nabla g(y) \int_{-a}^{a} s \mathrm{d}s = 0$ pour tout $a > 0$, d'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2h_{\mathcal{K}} t^2} \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} \nabla g(s) s \mathrm{d}s\mathrm{d}t &= \frac{1}{2h_{\mathcal{K}} t^2} \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} \frac{1}{2h_{\mathcal{K}} t} \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} (\nabla g(s) - \nabla g(y)) s \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4h_{\mathcal{K}}^2 t^3} \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} \frac{\nabla g(s) - \nabla g(y)}{|s - y|} s |s - y| \mathrm{d}s\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
|(G^{\mathcal{D}}, \vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}})|^2 &\leq \int_0^1 \frac{1}{(tm_{\sigma^*})^2} \left| \frac{1}{(2h_{\mathcal{K}} t)^2} \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} \frac{\nabla g(s) - \nabla g(y)}{|s - y|} s |s - y| \mathrm{d}s\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}t \\
&\underbrace{\leq}_{\text{Jensen}} \int_0^1 \frac{1}{(tm_{\sigma^*})^2} \frac{1}{(2h_{\mathcal{K}} t)^2} \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} \left| \frac{\nabla g(s) - \nabla g(y)}{|s - y|} \right|^2 |s|^2 |s - y|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{{m_{\sigma^*}}^2} \frac{(2h_{\mathcal{K}})^2}{(2h_{\mathcal{K}})^2} t^{4-2-2} \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} \left| \frac{\nabla g(s) - \nabla g(y)}{|s - y|} \right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y\mathrm{d}t \\
&\leq C \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} \int_{-th_{\mathcal{K}}}^{th_{\mathcal{K}}} \left| \frac{\nabla g(s) - \nabla g(y)}{|s - y|^{\frac{1}{2}}} \right|^2 \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}y}{|s - y|}
\end{aligned}$$

En remarquant que $m_{\mathcal{D}} \leq C \ \mathrm{size}(\mathcal{T})^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |(G^{\mathcal{D}}, \vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}})|^2 &\leq C \ \mathrm{size}(\mathcal{T})^2 \sum_{\mathcal{K} \in \partial\mathfrak{M}} \left(\int_{\sigma^*_{\mathcal{K}}} \int_{\sigma^*_{\mathcal{K}}} \left| \frac{\nabla g(s) - \nabla g(y)}{|s - y|^{\frac{1}{2}}} \right|^2 \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}y}{|s - y|} \right) \\
&\leq C \ \mathrm{size}(\mathcal{T})^2 \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \left| \frac{\nabla g(s) - \nabla g(y)}{|s - y|^{\frac{1}{2}}} \right|^2 \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}y}{|s - y|} \\
&\leq C \ \mathrm{size}(\mathcal{T})^2 ||g||^2_{\widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}
\end{aligned}$$

Deuxième étape :

On a de même pour $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ (décrit par la figure 3.11) :

$$\begin{aligned}
(G^{\mathcal{D}}, \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*}) &= -\frac{1}{m_\sigma}\left(g(x_{\mathcal{L}^*}) - \frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}}}\int_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} g(s)\mathrm{d}s\right) && \text{si } \mathcal{D} \text{ tel que uniquement } x_{\mathcal{L}^*} \in \partial\mathfrak{M} \\
&= \frac{1}{m_\sigma}\left(\left[g(x_{\mathcal{K}^*}) - \frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}}\int_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} g(s)\mathrm{d}s\right] - \left[g(x_{\mathcal{L}^*}) - \frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}}}\int_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} g(s)\mathrm{d}s\right]\right) && \text{si } \mathcal{D} = \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \text{ tel que } \sigma \in \partial\mathfrak{M}
\end{aligned}$$

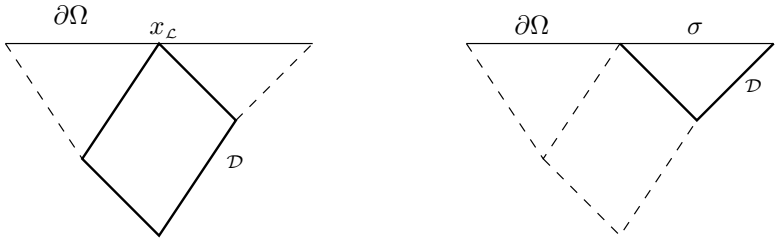

FIG. 3.11 – Les deux cas de diamant $\mathcal{D}$ possible

Si $\mathcal{D}$ tel que uniquement $x_{\mathcal{L}^*} \in \partial\mathfrak{M}$, on a de même

$$m_{\mathcal{D}}|(G^{\mathcal{D}}, \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*})|^2 \leq C \text{ size}(\mathcal{T})^2 \left(\int_{\sigma_{\mathcal{L}^*}}\int_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} \left|\frac{\nabla g(s) - \nabla g(y)}{|s-y|^{\frac{1}{2}}}\right|^2 \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}y}{|s-y|}\right)$$

Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}$ tel que $\sigma \in \partial\mathfrak{M}$ on a alors

$$m_{\mathcal{D}}|(G^{\mathcal{D}}, \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*})|^2 \leq C \text{ size}(\mathcal{T})^2 \left(\int_{\sigma_{\mathcal{L}^*}\cup\sigma_{\mathcal{K}^*}}\int_{\sigma_{\mathcal{L}^*}\cup\sigma_{\mathcal{K}^*}} \left|\frac{\nabla g(s) - \nabla g(y)}{|s-y|^{\frac{1}{2}}}\right|^2 \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}y}{|s-y|}\right)$$

D'où

$$\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|(G^{\mathcal{D}}, \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*})|^2 \leq C \text{ size}(\mathcal{T})^2 ||g||^2_{\widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}$$

Donc

$$||\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} - \nabla^{\mathcal{T}} u_c^{\mathcal{T}}||_2 \leq C \text{ size}(\mathcal{T})||g||_{\widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}$$

■

Remarque 11 : On note $u_e \in H^2(\Omega)$ la solution exacte du problème (3.15) avec la fonction g comme condition limite.

Définition 13.

On définit l'erreur de consistance pour un diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$:

$$R_{\mathcal{D}} = \nabla^{\mathcal{D}}\mathfrak{P}^{\mathcal{D}}_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e - \nabla u_e$$

également l'erreur de consistance dûe aux bords :

$$R^{bord}_{\mathcal{D}} = \nabla^{\mathcal{D}}\mathfrak{P}^{\mathcal{D}}_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e - \nabla^{\mathcal{D}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e$$

et l'erreur de consistance dûe à l'estimation du gradient :

$$R^{grad}_{\mathcal{D}} = \nabla^{\mathcal{D}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e - \nabla u_e$$

Ainsi on a

$$R_{\mathcal{D}} = R^{bord}_{\mathcal{D}} + R^{grad}_{\mathcal{D}}$$

On note aussi pour $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}$:

$$\begin{array}{rclcl} R_{\sigma,\mathcal{K}} & = & -R_{\sigma,\mathcal{L}} & = & \dfrac{1}{m_\sigma}\displaystyle\int_\sigma (R_{\mathcal{D}}(s),\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s \\ R_{\sigma^*,\mathcal{K}^*} & = & -R_{\sigma^*,\mathcal{L}^*} & = & \dfrac{1}{m_{\sigma^*}}\displaystyle\int_{\sigma^*} (R_{\mathcal{D}}(s),\vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*})\mathrm{d}s \\ R_\sigma & = & |R_{\sigma,\mathcal{K}}| & = & |R_{\sigma,\mathcal{L}}| \\ R_{\sigma^*} & = & |R_{\sigma^*,\mathcal{K}^*}| & = & |R_{\sigma^*,\mathcal{L}^*}| \end{array}$$

Estimation de l'erreur de consistance du gradient discret :

Proposition 1.

Soit $u_e \in H^2(\Omega)$ la solution exacte du problème (3.15) avec la fonction g comme condition limite, il existe $C > 0$ telle que

$$\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|R_{\mathcal{D}}^{grad}|^2 \leq C\ size(\mathcal{T})^2||\nabla u_e||^2_{H^1(\Omega)}$$

Démonstration : On a d'après le lemme 1.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|R_{\mathcal{D}}^{grad}|^2 & = & \displaystyle\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e - \nabla u_e|^2 \\ & = & \left\|\nabla^{\mathcal{T}}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e - \nabla u_e\right\|_2^2 \\ & \leq & C\ \mathrm{size}(\mathcal{T})^2||\nabla u_e||^2_{H^1(\Omega)} \end{array}$$

■

Estimation de l'erreur de consistance du bord :

Proposition 2.

Soit $u_e \in H^2(\Omega)$ la solution exacte du problème (3.15) avec la fonction g comme condition limite, il existe $C > 0$ telle que

$$\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|R_{\mathcal{D}}^{bord}|^2 \leq C\ size(\mathcal{T})^2||g||^2_{\widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}$$

Démonstration : On a d'après le lemme 2.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|R_{\mathcal{D}}^{bord}|^2 & = & \displaystyle\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}\mathfrak{P}_{m,g}^{D}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e - \nabla^{\mathcal{D}}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e|^2 \\ & = & \left\|\nabla^{\mathcal{T}}\mathfrak{P}_{m,g}^{D}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e - \nabla^{\mathcal{T}}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e\right\|_2^2 \\ & \leq & C\ \mathrm{size}(\mathcal{T})^2||g||^2_{\widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} \end{array}$$

■

On a besoin d'un lemme sur la différence des gradients discrets entre la fonction exacte et la solution approchée.

Lemme 3.

Soient $u_e \in H^2(\Omega)$ la solution exacte du problème (3.15) avec la fonction g comme condition limite, $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_{m,g}^D$ la solution du schéma (3.2) et on pose $u_c^{\mathcal{T}} = \mathfrak{P}_{c,g}^D u^{\mathcal{T}}$, il existe $C > 0$ telle que

$$||\nabla^{\mathcal{T}}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e - \nabla^{\mathcal{T}}u_c^{\mathcal{T}}||_2 = ||\nabla^{\mathcal{T}}\mathfrak{P}_{m,g}^D\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e - \nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}||_2 \leq C\ size(\mathcal{T})$$

Démonstration : On a par unicité des solutions l'égalité : $\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e - u_c^{\mathcal{T}} = \mathfrak{P}_{m,g}^D\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e - u^{\mathcal{T}}$.

$$\begin{array}{rcl} ||\nabla^{\mathcal{T}}\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e - \nabla^{\mathcal{T}}u_c^{\mathcal{T}}||_2^2 & = & ||\nabla^{\mathcal{T}}\mathfrak{P}_{m,g}^D\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e - \nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}||_2^2 \\ & = & \displaystyle\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}\mathfrak{P}_{m,g}^D\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e - \nabla^{\mathcal{D}}u^{\mathcal{T}}|^2 \\ & \underbrace{=}_{\text{Green}} & \mathrm{J}\mathrm{div}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}}\mathfrak{P}_{m,g}^D\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e) - \mathrm{div}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}), \mathfrak{P}_{m,g}^D\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}u_e - u^{\mathcal{T}}\mathrm{K} \\ & := & I \end{array}$$

Or on a pour $\forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= f_{\mathcal{K}} \\ -\frac{1}{m_{\mathcal{K}}}\int_{\mathcal{K}} \mathrm{div}(\nabla u_e(x))\mathrm{d}x &= f_{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\frac{1}{m_{\mathcal{K}}}\int_{\mathcal{K}} \mathrm{div}(\nabla u_e(x))\mathrm{d}x = \mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})$$

Finalement

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{K}}\left(\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}}\mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e) - \mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})\right) &\underbrace{=}_{\text{dernière égalité}} m_{\mathcal{K}}\left(\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}}\mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e) - \frac{1}{m_{\mathcal{K}}}\int_{\mathcal{K}}\mathrm{div}(\nabla u_e(x))\mathrm{d}x\right) \\ &\underbrace{=}_{\text{déf div}^{\mathcal{K}} \text{ et Green}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} m_\sigma(\nabla^{\mathcal{D}}\mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}}\int_\sigma(\nabla u_e(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s \\ &= \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} m_\sigma \underbrace{\frac{1}{m_\sigma}\int_\sigma(\nabla^{\mathcal{D}}\mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e - \nabla u_e(s), \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\mathrm{d}s}_{=R_{\sigma,\mathcal{K}}} \\ &= \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} m_\sigma R_{\sigma,\mathcal{K}} \end{aligned}$$

De même $\forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}^*$

$$m_{\mathcal{K}^*}\left(\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}}\mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e) - \mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})\right) = \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}R_{\sigma^*,\mathcal{K}^*}$$

Remarque 12 : On a aussi $\forall\ \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*$ telle que κ^* n'a pas un côté sur le bord Dirichlet *ie* $\kappa^* \notin \partial\mathfrak{M}^*_D$.

$$m_{\mathcal{K}^*}\left(\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}}\mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e) - \mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})\right) = \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}R_{\sigma^*,\mathcal{K}^*}$$

et sur le bord Dirichlet si $\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*_D$, on a $u(x_{\mathcal{K}^*}) = u_{\mathcal{K}^*}$.
Ainsi d'après la définition de I et de $\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e$, on a bien :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left(\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} m_\sigma R_{\sigma,\mathcal{K}}(u_e(x_{\mathcal{K}}) - u_{\mathcal{K}}) + \sum_{\mathcal{K}^*\in(\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*)}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_\sigma R_{\sigma^*,\mathcal{K}^*}(u_e(x_{\mathcal{K}^*}) - u_{\mathcal{K}^*})\right) \\ &\underbrace{=}_{R_{\sigma,\mathcal{K}}=-R_{\sigma,\mathcal{L}}} \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_\sigma R_{\sigma,\mathcal{K}}(u_e(x_{\mathcal{K}}) - u_{\mathcal{K}} - u_e(x_{\mathcal{L}}) + u_{\mathcal{L}}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\sigma^*}R_{\sigma^*,\mathcal{K}^*}(u_e(x_{\mathcal{K}^*}) - u_{\mathcal{K}^*} - u_e(x_{\mathcal{L}^*}) + u_{\mathcal{L}^*}) \\ &\underbrace{=}_{\text{Déf du gradient}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} \frac{m_\sigma m_{\sigma^*}}{2}\left[R_{\sigma,\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}} - \mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e), \vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}) + R_{\sigma^*,\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}} - \mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e), \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*})\right] \\ &\underbrace{\leq}_{\text{CS}} \frac{1}{\sin\alpha_{\mathcal{T}}}\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|R_\sigma|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}(\mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e - u^{\mathcal{T}})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{\sin\alpha_{\mathcal{T}}}\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|R_{\sigma^*}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}(\mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e - u^{\mathcal{T}})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\|\nabla^{\mathcal{T}}\mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e - \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}\right\|_2 \frac{1}{\sin\alpha_{\mathcal{T}}}\left(\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|R_\sigma|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|R_{\sigma^*}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

D'après la définition de I, on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|\nabla^{\mathcal{T}}\mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e - \nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}\right\|_2 &\leq \frac{1}{\sin\alpha_{\mathcal{T}}}\left(\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|R_\sigma|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|R_{\sigma^*}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &\underbrace{\leq}_{\text{Prop 1 et 2}} C\ \text{size}(\mathcal{T})\end{aligned}$$

Donc

$$\left\|\nabla^{\mathcal{T}}\mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e - \nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}\right\|_2 \leq C\ \text{size}(\mathcal{T})$$

■

3.5.3 Théorème d'estimation d'erreur

Théorème 13.

Si $f \in L^2(\Omega)$, $g \in \widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, on note $u_e \in H^2(\Omega)$ la solution exacte du problème (3.15), et $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}^D_{m,g}$ la solution du schéma (3.2).
Alors il existe $C > 0$ une constante dépendant du maillage, des normes de f et g telle que :

$$||u_e - u^{\mathfrak{M}}||_2 + ||u_e - u^{\mathfrak{M}^*}||_2 + ||\nabla u_e - \nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}||_2 \leq C\ size(\mathcal{T})$$

Démonstration :
Première étape :
On s'intéresse d'abord au premier terme du membre de gauche : $||u_e - u^{\mathfrak{M}}||_2$.

$$\begin{aligned}||u_e - u^{\mathfrak{M}}||_2 &\leq ||u_e - \mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e||_2 + ||\mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e - u^{\mathfrak{M}}||_2\\ &\underbrace{\leq}_{\text{Poincaré discret}} ||u_e - \mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e||_2 + C||\nabla^{\mathcal{T}}\mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e - \nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}||_2\\ &\underbrace{\leq}_{\text{Lemme 3}} ||u_e - \mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e||_2 + C\ \text{size}(\mathcal{T})\end{aligned}$$

De plus, on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}||u_e - \mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e||_2^2 &= \int_\Omega |u_e(x) - \mathfrak{P}^D_{m,g}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_c u_e(x)|^2 \mathrm{d}x\\ &\leq \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}\int_{\mathcal{K}} |u_e(x) - u_e(x_{\mathcal{K}})|^2 \mathrm{d}x\\ &\leq \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}\int_{\mathcal{K}} \left|\nabla u_e(x)(x_{\mathcal{K}} - x) + \int_0^1 (1-t)\left(D^2u_e((1-t)x + tx_{\mathcal{K}})(x_{\mathcal{K}} - x), (x_{\mathcal{K}} - x)\right)\mathrm{d}t\right|^2 \mathrm{d}x\\ &\leq 2\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}\int_{\mathcal{K}} |\nabla u_e(x)(x_{\mathcal{K}} - x)|^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad +2\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}\int_{\mathcal{K}}\int_0^1 \left|(1-t)\left(D^2u_e(\underbrace{(1-t)x + tx_{\mathcal{K}}}_{=y})(x_{\mathcal{K}} - x), (x_{\mathcal{K}} - x)\right)\right|^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}x\\ &\leq C\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} d_{\mathcal{K}}^2\int_{\mathcal{K}} |\nabla u_e(x)|^2\,\mathrm{d}x + C\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}\int_{\widehat{\mathcal{K}}} d_{\mathcal{K}}^4\int_0^1 (1-t)^{2-2}\left|D^2u_e(y)\right|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}y\\ &\underbrace{\leq}_{d_{\mathcal{K}}\leq\ \text{size}(\mathcal{T})} C\ \text{size}(\mathcal{T})^2\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}\int_{\mathcal{K}} |\nabla u_e(x)|^2\,\mathrm{d}x + C\ \text{size}(\mathcal{T})^4\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}\int_{\widehat{\mathcal{K}}} \left|D^2u_e(y)\right|^2\mathrm{d}y\\ &\leq C\ \text{size}(\mathcal{T})^2||\nabla u_e||^2_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

On a donc pour le premier terme :

$$||u_e - u^{\mathfrak{M}}||_2 \leq C \text{ size}(\mathcal{T})$$

De la même manière on obtient pour le deuxième terme :

$$||u_e - u^{\mathfrak{M}^*}||_2 \leq C \text{ size}(\mathcal{T})$$

Deuxième étape :
On s'intéresse d'abord au troisième terme du membre de gauche : $||\nabla u_e - \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}||_2$.

On pose $u_c^{\mathcal{T}} = \mathfrak{P}_{c,g}^D u^{\mathcal{T}}$. D'après les lemmes 1, 2 et 3.

$$\begin{aligned} ||\nabla u_e - \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}||_2 &\leq \underbrace{||\nabla u_e - \nabla^{\mathcal{T}} \mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} u_e||_2}_{\text{Lemme 1}} + \underbrace{||\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} - \nabla^{\mathcal{T}} u_c^{\mathcal{T}}||_2}_{\text{Lemme 2}} + \underbrace{||\nabla^{\mathcal{T}} \mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} u_e - \nabla^{\mathcal{T}} u_c^{\mathcal{T}}||_2}_{\text{Lemme 3}} \\ &\leq C \text{ size}(\mathcal{T}) ||\nabla u_e||_{H^1(\Omega)} + C \text{ size}(\mathcal{T}) ||g||_{\widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} + C \text{ size}(\mathcal{T}) \end{aligned}$$

On a donc pour le dernier terme :

$$||\nabla u_e - \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}||_2 \leq C \text{ size}(\mathcal{T})$$

On obtient donc le résultat énoncé :

$$||u_e - u^{\mathfrak{M}}||_2 + ||u_e - u^{\mathfrak{M}^*}||_2 + ||\nabla u_e - \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}||_2 \leq C \text{ size}(\mathcal{T})$$

■

Chapitre 4

Etude de la méthode de Schwarz

4.1 La méthode classique de Schwarz

4.1.1 Cadre continu

On décompose notre domaine Ω en deux domaines tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \gamma$ (figure 4.1) où γ est l'interface entre les deux sous domaines $\gamma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$.

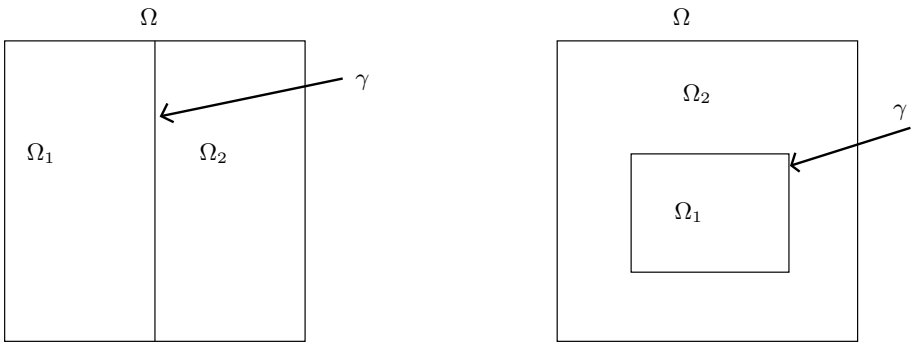

FIG. 4.1 – Le domaine Ω

On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) & = & f(x), & x \in \Omega, \\ u(s) & = & 0, & s \in \partial\Omega. \end{array} \tag{4.1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

Définition 14.

On définit pour $i = 1$ ou 2, l'espace :

$$H^1_{\partial\Omega}(\Omega_i) = \{u \in H^1(\Omega_i),\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega\}.$$

On définit la méthode de Schwarz par une suite $(u_i^n)_{i=1,2;n\geq 0}$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcll} \text{On choisit arbitrairement} & & (u_i^0)_{i=1,2} \in H^2(\Omega_i) \cap H^1_{\partial\Omega}(\Omega_i) & \\ \text{On construit la suite par récurrence :} & & u_i^{n+1} \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_i) & \\ -\Delta u_i^{n+1} & = & f & \text{dans } \Omega_i \\ (\nabla u_i^{n+1}, \vec{n}_{i,j}) + \lambda u_i^{n+1} & = & (\nabla u_j^n, \vec{n}_{i,j}) + \lambda u_j^n & \text{sur } \gamma \text{ pour } i \neq j \end{array} \tag{4.2}$$

où $\vec{n}_{i,j}$ (respectivement $\vec{n}_{j,i}$) est la normale à γ sortant de Ω_i (respectivement de Ω_j), on a alors $\vec{n}_{i,j} = -\vec{n}_{j,i}$ et on suppose $\lambda > 0$.

On aura besoin du résultat intermédiaire suivant :

Lemme 4.

Soient $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $\lambda > 0$, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega \cap \partial\mathcal{O}$ ouvert. Il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall\ u \in H^1(\mathcal{O}) \text{ tel que on ait }, \qquad \begin{array}{rcl} \Delta u & = & 0 \text{ dans } \mathcal{O} \\ ||u||_{L^2(\mathcal{O})} & \leq & C\left[||\nabla u||_{L^2(\mathcal{O})} + ||(\nabla u, \vec{n}) + \lambda u||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\right] \end{array}$$

Démonstration : On raisonne par l'absurde. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $H^1(\mathcal{O})$ qui vérifie :

$$\begin{array}{rcll} \Delta u_n & = & 0 & \\ ||u_n||_{L^2(\mathcal{O})} & = & 1 & \\ \nabla u_n & \to & 0 & \text{dans } L^2(\mathcal{O}) \\ (\nabla u_n, \vec{n}) + \lambda u_n & \to & 0 & \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \\ u_n & \rightharpoonup & u & \text{dans } H^1(\mathcal{O}) \end{array}$$

La dernière convergence implique :

$$\begin{array}{rcll} u_n & \rightharpoonup & u & \text{dans } L^2(\mathcal{O}) \\ \nabla u_n & \rightharpoonup & \nabla u & \text{dans } L^2(\mathcal{O}) \\ u_n & \to & u & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{O}) \\ \Delta u_n & \to & \Delta u & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{O}) \\ (\nabla u_n, \vec{n}) + \lambda u_n & \to & (\nabla u, \vec{n}) + \lambda u & \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \end{array}$$

Par unicité de la limite on a $\nabla u = 0$ dans $\mathcal{O}$, $\Delta u = 0$ dans $\mathcal{O}$ et $(\nabla u, \vec{n}) + \lambda u = 0$ sur Γ_0.

Or la convergence faible dans $H^1(\Omega)$ de u_n implique la convergence forte de u_n dans $L^2(\Omega)$ car Ω est bornée ($H^1(\Omega)$ s'injecte que manière compacte dans $L^2(\Omega)$).

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2(\mathcal{O})$$

D'où la convergence des normes : $||u_n||_{L^2(\mathcal{O})} = 1 \longrightarrow ||u||_{L^2(\mathcal{O})}$ ce qui implique $||u||_{L^2(\mathcal{O})} = 1$ donc $u \not\equiv 0$.

La limite u est constante ce qui implique que $(\nabla u, \vec{n}) = 0$ sur le bord Γ_0. Or $(\nabla u, \vec{n}) + \lambda u = 0$ sur Γ_0, d'où $\lambda u = 0$ sur Γ_0. Donc $u = 0$ car $\lambda > 0$, or $||u||_{L^2(\mathcal{O})} = 1$, on arrive à une contradiction.

■

On a le théorème de convergence suivant :

Théorème 14 (Convergence).

Pour $i = 1, 2$, u_i^n converge faiblement vers $u_{|\Omega_i}$ dans $H^1_\Omega(\Omega_i)$ et en particulier $u^n_{i|_\gamma}$ converge vers $u_{|_\gamma}$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration :

Première étape :

Soient $i = 1$, ou 2 et $n \geq 1$, on déduit de (4.2) :

$$u_i^{n+1} - u_i^{n-1} \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_i) \tag{4.3a}$$

$$-\Delta(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \tag{4.3b}$$

$$(\nabla(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}), \vec{n}_{i,j}) = \lambda(2u_j^n - u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \quad \text{sur } \gamma \text{ pour } i \neq j \tag{4.3c}$$

La dernière égalité vient du résultat suivant :

$$\begin{aligned}(\nabla(u_i^{n+1}-u_i^{n-1}),\vec{n}_{i,j}) &= (\nabla u_j^n,\vec{n}_{i,j})+\lambda u_j^n-\lambda u_i^{n+1}-(\nabla u_j^n,\vec{n}_{i,j})+\lambda u_j^n-\lambda u_i^{n-1}\\ &= \lambda(2u_j^n-u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\end{aligned}$$

On multiplie (4.3b) par $(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})$ et on intégre sur Ω_i :

$$\begin{aligned}0 &= -\int_{\Omega_i}\Delta(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\mathrm{d}x\\ &\underbrace{=}_{\text{Green}} \int_{\Omega_i}\left|\nabla(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\right|^2\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega_i}(\nabla(u_i^{n+1}-u_i^{n-1}),\vec{n}_{i,j})\underbrace{(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})}_{=0 \text{ sur } \partial\Omega_i\setminus\gamma}\mathrm{d}s\\ &= \int_{\Omega_i}\left|\nabla(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\right|^2\mathrm{d}x-\int_{\gamma}(\nabla(u_i^{n+1}-u_i^{n-1}),\vec{n}_{i,j})(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\mathrm{d}s\\ &\underbrace{=}_{(4.3c)} \int_{\Omega_i}\left|\nabla(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\right|^2\mathrm{d}x+\lambda\sum_{j\neq i}\int_{\gamma}(u_i^{n+1}+u_i^{n-1}-2u_j^n)(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\mathrm{d}s\\ &= \int_{\Omega_i}\left|\nabla(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\right|^2\mathrm{d}x+\lambda\sum_{j\neq i}\int_{\gamma}[(u_i^{n+1}-u_j^n)+(u_i^{n-1}-u_j^n)][(u_i^{n+1}-u_j^n)-(u_i^{n-1}-u_j^n)]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{j\neq i}\lambda\int_{\gamma}\left|u_i^{n-1}-u_j^n\right|^2\mathrm{d}s = \int_{\Omega_i}\left|\nabla(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\right|^2\mathrm{d}x+\lambda\sum_{j\neq i}\int_{\gamma}\left|u_i^{n+1}-u_j^n\right|^2\mathrm{d}s$$

On somme pour $i=1,\ 2$ et $n=1$ jusqu'à $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\left|\nabla(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\right|^2\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j\neq i}\lambda\int_{\gamma}(\left|u_i^{n-1}-u_j^n\right|^2-\left|u_i^{n+1}-u_j^n\right|^2)\mathrm{d}s\\ &= \lambda\int_{\gamma}(\left|u_1^0-u_2^1\right|^2+\left|u_2^0-u_1^1\right|^2)\mathrm{d}s\underbrace{-\lambda\int_{\gamma}(\left|u_1^{N+1}-u_2^N\right|^2+\left|u_2^{N+1}-u_1^N\right|^2)\mathrm{d}s}_{\leq 0}\\ &\leq \lambda\int_{\gamma}(\left|u_1^0-u_2^1\right|^2+\left|u_2^0-u_1^1\right|^2)\mathrm{d}s\\ &\leq C\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\left|\nabla(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\right|^2\mathrm{d}x\leq C \tag{4.4}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq i}\lambda\int_{\gamma}\left|u_i^{n-1}-u_j^n\right|^2\mathrm{d}s &= \underbrace{\int_{\Omega_i}\left|\nabla(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\right|^2\mathrm{d}x}_{\geq 0}+\sum_{j\neq i}\lambda\int_{\gamma}\left|u_i^{n+1}-u_j^n\right|^2\mathrm{d}s\\ &\geq \sum_{j\neq i}\lambda\int_{\gamma}\left|u_i^{n+1}-u_j^n\right|^2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

On a par récurrence de pour tout $n\geq 1$:
Si pour tout $i=1,\ 2, j\neq i$: $\int_{\gamma}\left|u_i^{n-1}-u_j^n\right|^2\mathrm{d}s\leq C$ alors on a pour tout $i=1,\ 2, j\neq i$: $\int_{\gamma}\left|u_i^{n+1}-u_j^n\right|^2\mathrm{d}s\leq C$.
Donc pour tout $n\geq 0$, pour tout $i=1,\ 2,\ j\neq i$, on a :

$$\int_{\gamma}\left|u_i^{n+1}-u_j^n\right|^2\mathrm{d}s\leq C \tag{4.5}$$

Remarque 13 : L'inégalité de Poincaré ne marche que si Ω_i est en contact avec le bord $\partial\Omega$. C'est pourquoi on définit l'ensemble $I_1=\{i\in\{1,2\},$ tel que $\partial\Omega_i\cap\partial\Omega$ a un intérieur non vide$\}$ qui représente les sous domaines qui rencontrent le bord $\partial\Omega$.
Par exemple, dans le cas où l'on a un sous domaine Ω_j emboîté dans Ω_i (figure 4.2), on a alors $I_1=i$.

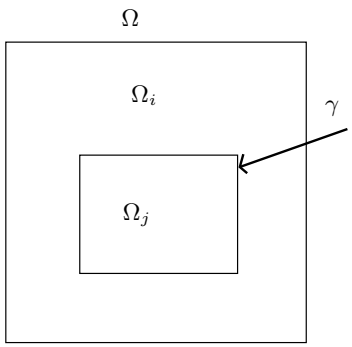

FIG. 4.2 – Le domaine Ω

Donc on obtient pour $i \in I_1$, d'après l'inégalité de Poincaré :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i\in I_1}\int_{\Omega_i}\left|u_i^{n+1}-u_i^{n-1}\right|^2\mathrm{d}x &\leq \tilde{C}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\left|\nabla(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\right|^2\mathrm{d}x\\ &\underbrace{\leq}_{(4.4)} C\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{i\in I_1}\int_{\Omega_i}\left|u_i^{n+1}-u_i^{n-1}\right|^2\mathrm{d}x \leq C \tag{4.6}$$

Remarque 14 : Rappel sur l'opérateur trace :

$$\begin{array}{rccc}\gamma_0: & H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\\ & u & \longmapsto & u_{|\partial\Omega}\end{array}$$

est un opérateur linéaire et continu donc :

$$||u||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C||u||_{H^1(\Omega)}$$

On a également l'opérateur trace suivant :

$$\begin{array}{rccc}\gamma_{\vec{n}}: & \{\xi\in(L^2(\Omega))^d; \mathrm{div}\xi\in L^2(\Omega)\} & \longrightarrow & H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\\ & \xi & \longmapsto & (\xi,\vec{n})_{|\partial\Omega}\end{array}$$

est un opérateur linéaire et continu donc :

$$||(\xi,\vec{n})||_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C(||\xi||_2+||\mathrm{div}\xi||_2)^{\frac{1}{2}}$$

Retour à la démonstration : On veut l'inégalité (4.6) pour tout $l = i,\ j$. On va montrer l'inégalité pour $i \notin I_1$.
En utilisant la remarque sur l'opérateur $\gamma_{\vec{n}}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}\left\|(\nabla(u_j^n-u_j^{n-2}),\vec{n}_{j,i})\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} &\leq C\sum_{n=2}^{N}\left[\left\|\nabla(u_j^n-u_j^{n-2})\right\|_2^2+\underbrace{\left\|\mathrm{div}(\nabla(u_j^n-u_j^{n-2}))\right\|_2^2}_{=\Delta(u_j^n-u_j^{n-2})=0}\right]\\ &\underbrace{\leq}_{(4.4)} C\end{aligned}$$

De plus on a pour $j \in I_1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}\left\|u_j^n-u_j^{n-2}\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} &\leq C\sum_{n=2}^{N}\left\|u_j^n-u_j^{n-2}\right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma)}\\ &\underbrace{\leq}_{\text{grâce à }\gamma_0} C\sum_{n=2}^{N}\left\|u_j^n-u_j^{n-2}\right\|^2_{H^1(\Omega_j)}\\ &\underbrace{\leq}_{(4.6)+(4.4)} C\end{aligned}$$

Donc en regroupant les deux dernières inégalités, on a pour tout $j \in I_1$:

$$\sum_{n=2}^{N} \left\|(\nabla(u_j^n - u_j^{n-2}), \vec{n}_{j,i})\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} + \left\|u_j^n - u_j^{n-2}\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} \leq C$$

Maintenant pour $i \notin I_1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \left\|(\nabla(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}), \vec{n}_{i,j}) + \lambda(u_i^{n+1} - u_i^{n-1})\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} &= \sum_{n=2}^{N} \left\|(\nabla(u_j^n), \vec{n}_{i,j}) + \lambda u_j^n - (\nabla(u_j^{n-2}), \vec{n}_{i,j}) - \lambda u_j^{n-2})\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} \\
&\leq \sum_{n=2}^{N} \left\|(\nabla(u_j^n - u_j^{n-2}), \vec{n}_{j,i})\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} + \lambda \left\|u_j^n - u_j^{n-2}\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} \\
&\leq C \text{ d'après la dernière inégalité obtenue pour } j \in I_1
\end{aligned}$$

On applique le Lemme 4 à $\mathcal{O} = \Omega_i$, $\Gamma_0 = \gamma$ et l'inégalité (4.4) pour $i \notin I_1$:

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{\Omega_i} \left|u_i^{n+1} - u_i^{n-1}\right|^2 \mathrm{d}x \leq C$$

Avec l'inégalité (4.6), on a pour tout $i = 1, 2$:

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{\Omega_i} \left|u_i^{n+1} - u_i^{n-1}\right|^2 \mathrm{d}x \leq C \tag{4.7}$$

Deuxième étape :

On multiplie (4.3b) par u_i^{n+1} et on intégre sur Ω_i :

$$\begin{aligned}
0 &= -\int_{\Omega_i} \Delta(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) u_i^{n+1} \mathrm{d}x \\
&\underbrace{=}_{\text{Green}+(4.3\text{c})} \int_{\Omega_i} \nabla(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla(u_i^{n+1}) \mathrm{d}x + \lambda \sum_{j \neq i} \int_{\gamma} (u_i^{n+1} + u_i^{n-1} - 2u_j^n) u_i^{n+1} \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

On peut écrire encore les termes de droite de la manière suivante :

$$\nabla(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla(u_i^{n+1}) = \frac{1}{2}\left|\nabla(u_i^{n+1})\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla(u_i^{n+1} - u_i^{n-1})\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\nabla(u_i^{n-1})\right|^2$$

et

$$\begin{aligned}
(u_i^{n+1} + u_i^{n-1} - 2u_j^n) u_i^{n+1} &= \left|u_i^{n+1}\right|^2 + u_i^{n-1} u_i^{n+1} - 2u_j^n u_i^{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\left|u_i^{n+1}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|u_i^{n-1}\right|^2 - \left|u_j^n\right|^2 + \left|u_i^{n+1} - u_j^n\right|^2 - \frac{1}{2}\left|u_i^{n+1} - u_i^{n-1}\right|^2
\end{aligned}$$

On remplace ces identités dans l'égalité précédente et on somme pour $i = 1,\ 2$ et $n = 1$ jusqu'à $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
0 = &\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \frac{1}{2}\left|\nabla(u_i^{n+1})\right|^2 \mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \frac{1}{2}\left|\nabla(u_i^{n-1})\right|^2 \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \frac{1}{2}\left|\nabla(u_i^{n+1} - u_i^{n-1})\right|^2 \mathrm{d}x \\
&+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j \neq i} \lambda \int_{\gamma} \frac{1}{2}\left|u_i^{n+1}\right|^2 \mathrm{d}s + \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j \neq i} \lambda \int_{\gamma} \frac{1}{2}\left|u_i^{n-1}\right|^2 \mathrm{d}s - \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j \neq i} \lambda \int_{\gamma} \left|u_j^n\right|^2 \mathrm{d}s \\
&+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j \neq i} \lambda \int_{\gamma} \left|u_i^{n+1} - u_j^n\right|^2 \mathrm{d}s - \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j \neq i} \lambda \int_{\gamma} \frac{1}{2}\left|u_i^{n+1} - u_i^{n-1}\right|^2 \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\left(\left|\nabla(u_i^{N+1})\right|^2+\left|\nabla(u_i^{N})\right|^2-\left|\nabla(u_i^{0})\right|^2-\left|\nabla(u_i^{1})\right|^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\lambda\int_{\gamma}\left(\left|u_i^{N+1}\right|^2+\left|u_i^{0}\right|^2-\left|u_i^{1}\right|^2\right)\mathrm{d}s \\
& +\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j\neq i}\lambda\int_{\gamma}\left|u_i^{n+1}-u_j^{n}\right|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j\neq i}\lambda\int_{\gamma}\left|u_i^{N+1}-u_j^{N}\right|^2\mathrm{d}s \\
= \quad & \underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\left|\nabla(u_i^{n+1}-u_i^{n-1})\right|^2\mathrm{d}x}_{\leq 0}+\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\lambda\int_{\gamma}\frac{1}{2}\left|u_i^{n+1}-u_i^{n-1}\right|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j\neq i}\lambda\int_{\gamma}\left(\underbrace{\left|u_j^{N}\right|^2-\left|u_i^{N+1}-u_j^{N}\right|^2}_{\leq\left|u_i^{N+1}\right|^2}\right)\mathrm{d}s \\
\leq \quad & \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\lambda\int_{\gamma}\frac{1}{2}\left|u_i^{n+1}-u_i^{n-1}\right|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\lambda\int_{\gamma}\left|u_i^{N+1}\right|^2\mathrm{d}s \\
\underbrace{\leq}_{(4.5)} \quad & C+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\lambda\int_{\gamma}\left|u_i^{N+1}\right|^2\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\left|\nabla(u_i^{N+1})\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\lambda\int_{\gamma}\left|u_i^{N+1}\right|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j\neq i}\lambda\int_{\gamma}\left|u_i^{n+1}-u_j^{n}\right|^2\mathrm{d}s \quad\leq\quad C+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\lambda\int_{\gamma}\left|u_i^{N+1}\right|^2\mathrm{d}s
$$

Ainsi on a :

$$
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\left|\nabla(u_i^{N+1})\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j\neq i}\lambda\int_{\gamma}\left|u_i^{n+1}-u_j^{n}\right|^2\mathrm{d}s \quad\leq\quad C
$$

Donc on obtient pour $i=1,\,2,\ \forall\ N>0$:

$$
\int_{\Omega_i}\left|\nabla(u_i^{N+1})\right|^2\mathrm{d}x \quad\leq\quad C \tag{4.8}
$$

et

$$
\sum_{n=1}^{N}\sum_{j\neq i}\int_{\gamma}\left|u_i^{n+1}-u_j^{n}\right|^2\mathrm{d}s \quad\leq\quad C \tag{4.9}
$$

Troisième étape :
L'inégalité (4.8) implique que $(\nabla u_i^n)_{n>0}$ est bornée dans $L^2(\Omega_i)$. Si $i\in I_1$, l'inégalité de Poincaré donne que $(u_i^n)_{n>0}$ est bornée dans $H^1(\Omega_i)$ et on a $(u_i^n)_{n>0}$ est bornée dans $L^2(\gamma)$. Pour $j\notin I_1$, l'inégalité (4.8) implique que $(\nabla u_j^n)_{n>0}$ est bornée dans $L^2(\Omega_j)$ et d'après l'inégalité (4.9) et le fait que $(u_i^n)_{n>0}$ est bornée dans $L^2(\gamma)$, on a également que $(u_j^n)_{n>0}$ est bornée dans $H^1(\Omega_j)$.

Donc pour tout j, on a $(u_j^n)_{n>0}$ est bornée dans $H^1(\Omega_j)$. On peut extraire une sous suite qui converge :

$$
\begin{array}{llcll}
 & u_j^{n_k} & \rightharpoonup & u_j & \text{dans } H^1(\Omega_j) \\
\text{Donc} & u_j^{n_k} & \to & u_j & \text{dans } L^2(\Omega_j) \\
\text{et} & \gamma_0 u_j^{n_k} & \to & \gamma_0 u_j & \text{dans } L^2(\gamma)
\end{array}
$$

Et on a que la limite vérifie : $-\Delta u_j=f$ dans Ω_j.

De plus l'inégalité (4.9) implique que $u_i^{n_k+1}-u_j^{n_k}\to 0$ dans $L^2(\gamma)$ donc :

$$
\gamma_0 u_i^{n_k+1}\to\gamma_0 u_j \text{ dans } L^2(\gamma)
$$

De plus $(u_i^{n_k+1})$ est bornée dans $H^1(\Omega_i)$, on peut en extraire une sous suite qui converge faiblement :

$$
\begin{array}{llcll}
 & u_i^{n_{k_l}+1} & \rightharpoonup & u_i & \text{dans } H^1(\Omega_i) \\
\text{Donc} & \gamma_0 u_i^{n_{k_l}+1} & \to & \gamma_0 u_i & \text{dans } L^2(\gamma)
\end{array}
$$

Par unicité de la limite on a $\gamma_0 u_i = \gamma_0 u_j$ sur γ.

De plus on a :

$$\begin{array}{lrcll} & \Delta u_j^{n_k} & \to & f & \text{dans } L^2(\Omega_j) \\ \text{et} & \nabla u_j^{n_k} & \rightharpoonup & \nabla u_j & \text{dans } L^2(\Omega_j) \\ \text{Donc} & (\nabla u_j^{n_k}, \vec{n}_{j,i}) & \rightharpoonup & (\nabla u_j, \vec{n}_{j,i}) & \text{dans } L^2(\Omega_j) \end{array}$$

Donc on a par unicité des limites :

$$(\nabla u_i, \vec{n}_{i,j}) + \lambda \gamma_0 u_i = (\nabla u_j, \vec{n}_{i,j}) + \lambda \gamma_0 u_j \quad \text{sur } \gamma \text{ pour } i \neq j$$

Donc

$$(\nabla u_i, \vec{n}_{i,j}) = (\nabla u_j, \vec{n}_{i,j}) \text{ sur } \gamma$$

Finalement, on a

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u_i & = & f & \text{dans } \Omega_i \text{ pour tout } i \\ \gamma_0 u_i & = & \gamma_0 u_j & \text{sur } \gamma \text{ pour } i \neq j \\ (\nabla u_i, \vec{n}_{i,j}) & = & (\nabla u_j, \vec{n}_{i,j}) & \text{sur } \gamma \text{ pour } i \neq j \end{array}$$

Donc par unicité de la solution du problème (4.1) on a :

$$\forall\ i = 1, 2,\ u_i \equiv u_{|\Omega_i}$$

L'unicité de la limite u_i implique que toute la suite u_i^n converge faiblement vers $u_{|\Omega_i}$ dans $H^1_\Omega(\Omega_i)$.

■

4.1.2 Cadre discret pour la méthode volume fini VF4

On décompose notre domaine Ω en deux domaines tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$ (figure 4.3) où Γ est l'interface entre les deux sous domaines $\Gamma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$. On note $\mathfrak{M}$ le maillage de $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$, et la distance $d(x_\mathcal{K}, x_\mathcal{L}) = m_{\sigma^*} = d_{\mathcal{K},\sigma} + d_{\mathcal{L},\sigma}$ est la distance orthogonale.

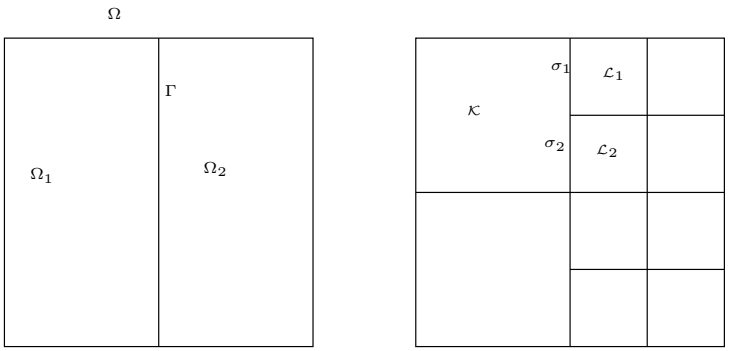

FIG. 4.3 – Le domaine Ω

On s'intéresse au problème suivant :

$$\boxed{\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) & = & f(x), & x \in \Omega, \\ u(s) & = & 0, & s \in \partial\Omega. \end{array}} \tag{4.10}$$

Le schéma VF4 s'écrit de la même manière que dans le deuxième chapitre : pour toutes mailles $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma F_{\mathcal{K},\sigma} = m_\mathcal{K} f_\mathcal{K}$$

Ainsi on peut écrire la relation suivante :

$$-F_{\mathcal{K},\sigma} + \alpha u_\sigma = F_{\mathcal{L},\sigma} + \alpha u_\sigma.$$

On va utiliser la méthode de Schwarz discrète qui consiste à construire la suite $(u_\mathcal{K}^n)_{\mathcal{K},n}$ où les $u_\mathcal{K}^n$ sont les inconnues à l'itération n. Le schéma VF s'écrit alors pour $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma F_{\mathcal{K},\sigma}^n = m_\mathcal{K} f_\mathcal{K}$$

avec

$$F_{\mathcal{K},\sigma}^n = \frac{u_\mathcal{K}^n - u_\sigma^n}{d_{\mathcal{K},\sigma}}$$

où u_σ^n est déterminée de la façon suivante : pour i =1, 2 et $j \neq i$

$$\begin{array}{rcll} u_\sigma^n & = & 0 & \text{si } \sigma \subset \partial\Omega \\ F_{\mathcal{K},\sigma}^n & = & -F_{\mathcal{L},\sigma}^n & \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \subset \Omega_i \cup \Omega_j \\ -F_{\mathcal{K},\sigma}^n + \alpha u_\sigma^n & = & F_{\mathcal{L},\sigma}^{n-1} + \alpha u_\sigma^{n-1} & \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \subset \Gamma \end{array}$$

On peut par exemple initialiser $F_{\mathcal{K},\sigma}^0$ et u_σ^0 par 0.

Théorème 15 (Convergence).

On se choisit un maillage fixe de Ω qui respecte l'interface.
On a une convergence "ponctuelle" de $u_\mathcal{K}^n$ vers $u_\mathcal{K}$ quand n tend vers ∞ sur le maillage fixé.

Démonstration :
On note $G_{\mathcal{K},\sigma}^n = F_{\mathcal{K},\sigma}^n - F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $e_\mathcal{K}^n = u_\mathcal{K}^n - u_\mathcal{K}$. Pour tout $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, on a

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma G_{\mathcal{K},\sigma}^n = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma (F_{\mathcal{K},\sigma}^n - F_{\mathcal{K},\sigma}) = 0$$

On multiplie par $e_\mathcal{K}^n$ et on somme sur $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \displaystyle\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} m_\sigma G_{\mathcal{K},\sigma}^n e_\mathcal{K}^n \\ & = & \displaystyle\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} \left[m_\sigma \frac{u_\mathcal{K}^n - u_\sigma^n}{d_{\mathcal{K},\sigma}} e_\mathcal{K}^n - m_\sigma \frac{u_\mathcal{K} - u_\sigma}{d_{\mathcal{K},\sigma}} e_\mathcal{K}^n \right] \\ & = & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext}} \frac{m_\sigma}{d_{\mathcal{K},\sigma}} |e_\mathcal{K}^n|^2 + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} \frac{m_\sigma}{m_{\sigma^*}} |e_\mathcal{K}^n - e_\mathcal{L}^n|^2 + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma (G_{\mathcal{K},\sigma}^n e_\mathcal{K}^n + G_{\mathcal{L},\sigma}^n e_\mathcal{L}^n) \end{array}$$

On s'intéresse au dernier terme du membre de droite :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma (G_{\mathcal{K},\sigma}^n e_\mathcal{K}^n + G_{\mathcal{L},\sigma}^n e_\mathcal{L}^n) & = & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma (G_{\mathcal{K},\sigma}^n (e_\mathcal{K}^n - e_\sigma^n) + G_{\mathcal{L},\sigma}^n (e_\mathcal{L}^n - e_\sigma^n)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma (G_{\mathcal{K},\sigma}^n + G_{\mathcal{L},\sigma}^n) e_\sigma^n \\ & = & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} \left(m_\sigma \frac{|e_\mathcal{K}^n - e_\sigma^n|^2}{d_{\mathcal{K},\sigma}} + m_\sigma \frac{|e_\mathcal{L}^n - e_\sigma^n|^2}{d_{\mathcal{L},\sigma}} \right) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma (G_{\mathcal{K},\sigma}^n + G_{\mathcal{L},\sigma}^n) e_\sigma^n \end{array}$$

On peut écrire le dernier terme du membre de droite :

$$\begin{array}{rcl} (G_{\mathcal{K},\sigma}^n + G_{\mathcal{L},\sigma}^n) e_\sigma^n & = & \displaystyle\frac{1}{4\alpha} \left((G_{\mathcal{K},\sigma}^n + \alpha e_\sigma^n)^2 - \underbrace{(-G_{\mathcal{K},\sigma}^n + \alpha e_\sigma^n)^2}_{=G_{\mathcal{L},\sigma}^{n-1} + \alpha e_\sigma^{n-1}} \right) + \frac{1}{4\alpha} \left((G_{\mathcal{L},\sigma}^n + \alpha e_\sigma^n)^2 - \underbrace{(-G_{\mathcal{L},\sigma}^n + \alpha e_\sigma^n)^2}_{=G_{\mathcal{K},\sigma}^{n-1} + \alpha e_\sigma^{n-1}} \right) \\ & = & \displaystyle\frac{1}{4\alpha} \left((G_{\mathcal{K},\sigma}^n + \alpha e_\sigma^n)^2 - (G_{\mathcal{K},\sigma}^{n-1} + \alpha e_\sigma^{n-1})^2 \right) + \frac{1}{4\alpha} \left((G_{\mathcal{L},\sigma}^n + \alpha e_\sigma^n)^2 - (G_{\mathcal{L},\sigma}^{n-1} + \alpha e_\sigma^{n-1})^2 \right) \end{array}$$

On récapitule :

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext}} \frac{m_\sigma}{d_{\mathcal{K},\sigma}} |e_\mathcal{K}^n|^2 + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} \frac{m_\sigma}{m_{\sigma^*}} |e_\mathcal{K}^n - e_\mathcal{L}^n|^2 + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma (G_{\mathcal{K},\sigma}^n e_\mathcal{K}^n + G_{\mathcal{L},\sigma}^n e_\mathcal{L}^n) \\ & = & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext}} \frac{m_\sigma}{d_{\mathcal{K},\sigma}} |e_\mathcal{K}^n|^2 + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} \frac{m_\sigma}{m_{\sigma^*}} |e_\mathcal{K}^n - e_\mathcal{L}^n|^2 + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} \left(m_\sigma \frac{|e_\mathcal{K}^n - e_\sigma^n|^2}{d_{\mathcal{K},\sigma}} + m_\sigma \frac{|e_\mathcal{L}^n - e_\sigma^n|^2}{d_{\mathcal{L},\sigma}} \right) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma (G_{\mathcal{K},\sigma}^n + G_{\mathcal{L},\sigma}^n) e_\sigma^n \\ & = & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext}} \frac{m_\sigma}{d_{\mathcal{K},\sigma}} |e_\mathcal{K}^n|^2 + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} \frac{m_\sigma}{m_{\sigma^*}} |e_\mathcal{K}^n - e_\mathcal{L}^n|^2 + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} \left(m_\sigma \frac{|e_\mathcal{K}^n - e_\sigma^n|^2}{d_{\mathcal{K},\sigma}} + m_\sigma \frac{|e_\mathcal{L}^n - e_\sigma^n|^2}{d_{\mathcal{L},\sigma}} \right) \\ & & \displaystyle + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma \frac{1}{4\alpha} \left((G_{\mathcal{K},\sigma}^n + \alpha e_\sigma^n)^2 - (G_{\mathcal{K},\sigma}^{n-1} + \alpha e_\sigma^{n-1})^2 \right) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma \frac{1}{4\alpha} \left((G_{\mathcal{L},\sigma}^n + \alpha e_\sigma^n)^2 - (G_{\mathcal{L},\sigma}^{n-1} + \alpha e_\sigma^{n-1})^2 \right) \end{array}$$

On en déduit que pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext}}\frac{m_\sigma}{d_{\mathcal{K},\sigma}}|e_{\mathcal{K}}^n|^2 &+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}}\frac{m_\sigma}{m_{\sigma^*}}|e_{\mathcal{K}}^n-e_{\mathcal{L}}^n|^2+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma}\left(m_\sigma\frac{|e_{\mathcal{K}}^n-e_\sigma^n|^2}{d_{\mathcal{K},\sigma}}+m_\sigma\frac{|e_{\mathcal{L}}^n-e_\sigma^n|^2}{d_{\mathcal{L},\sigma}}\right)\\
&+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma\frac{1}{4\alpha}\left((G_{\mathcal{K},\sigma}^n+\alpha e_\sigma^n)^2+(G_{\mathcal{L},\sigma}^n+\alpha e_\sigma^n)^2\right)\\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma\frac{1}{4\alpha}\left((G_{\mathcal{L},\sigma}^{n-1}+\alpha e_\sigma^{n-1})^2+(G_{\mathcal{L},\sigma}^{n-1}+\alpha e_\sigma^{n-1})^2\right)
\end{aligned}$$

En simplifiant :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext}}\frac{m_\sigma}{d_{\mathcal{K},\sigma}}|e_{\mathcal{K}}^n|^2 &+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}}\frac{m_\sigma}{m_{\sigma^*}}|e_{\mathcal{K}}^n-e_{\mathcal{L}}^n|^2+\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma}\left(m_\sigma\frac{|e_{\mathcal{K}}^n-e_\sigma^n|^2}{d_{\mathcal{K},\sigma}}+m_\sigma\frac{|e_{\mathcal{L}}^n-e_\sigma^n|^2}{d_{\mathcal{L},\sigma}}\right)}_{\geq 0}\\
&+ \underbrace{\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma\frac{1}{4\alpha}\left((G_{\mathcal{K},\sigma}^N+\alpha e_\sigma^N)^2+(G_{\mathcal{L},\sigma}^N+\alpha e_\sigma^N)^2\right)}_{\geq 0}\\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma\frac{1}{4\alpha}\left((G_{\mathcal{L},\sigma}^0+\alpha e_\sigma^0)^2+(G_{\mathcal{L},\sigma}^0+\alpha e_\sigma^0)^2\right)
\end{aligned}$$

Donc on a

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext}}\frac{m_\sigma}{d_{\mathcal{K},\sigma}}|e_{\mathcal{K}}^n|^2+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}}\frac{m_\sigma}{m_{\sigma^*}}|e_{\mathcal{K}}^n-e_{\mathcal{L}}^n|^2 \leq C$$

On en déduit que les séries $\sum_{n\geq 1}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext}}\frac{m_\sigma}{d_{\mathcal{K},\sigma}}|e_{\mathcal{K}}^n|^2$ et $\sum_{n\geq 1}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}}\frac{m_\sigma}{m_{\sigma^*}}|e_{\mathcal{K}}^n-e_{\mathcal{L}}^n|^2$ convergent et par conséquent on a convergence vers 0 de la norme H^1 discrète hors interface. On a aussi $\sum_{n\geq 1}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\Gamma} m_\sigma\frac{|e_{\mathcal{K}}^n-e_\sigma^n|^2}{d_{\mathcal{K},\sigma}}$ qui converge. Par Poincaré on en déduit la convergence de la norme L^2 sur chacun des sous domaines et donc la convergence "ponctuelle" de $u_{\mathcal{K}}^n$ vers $u_{\mathcal{K}}$ et u_σ^n vers u_σ.

■

Exemples :
On rappelle le test 2 du deuxième chapitre :

$$\begin{aligned}
-\Delta u(x,y) &= 2\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y), && x,y\in\Omega,\\
u(s) &= 0, && s\in\partial\Omega.
\end{aligned}$$

La solution exacte est :

$$u(x,y)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

On effectue l'algorithme de Schwarz dans un premier temps avec $\lambda = 1$ fixé et un test d'arrêt non optimal :

$$\frac{||u^n-u^{\mathcal{T}}||_2}{||u^{\mathcal{T}}||_2}\leq 10^{-5}$$

La figure 4.4 montre la norme H^1 de la différence entre la solution approchée par la méthode de Schwarz u^n et celle approchée par la méthode VF4 $u^{\mathcal{T}}$ c'est-à-dire e^n en fonction du nombre d'itérations n et la norme H^1 de la différence entre la solution exacte et la solution approchée par la méthode de Schwarz c'est-à-dire $u-u^n$ en fonction du nombre d'itérations n.

A partir d'une douzaine d'itérations, la norme H^1 de $u-u^n$ ne décroît plus, on a atteint la convergence de la méthode, il est donc pas nécéssaire de continuer des itérations. Le test d'arrêt plus approprié qui sera utilisé est le suivant :

$$\frac{||u^n-u^{\mathcal{T}}||_2}{||u^{\mathcal{T}}||_2}\leq\frac{||u-u^{\mathcal{T}}||_2}{||u^{\mathcal{T}}||_2}$$

Si on ne connaît pas la solution exacte u, on peut aussi prendre :

$$\frac{||u^n-u^{\mathcal{T}}||_2}{||u^{\mathcal{T}}||_2}\leq \text{size}(\mathcal{T})$$

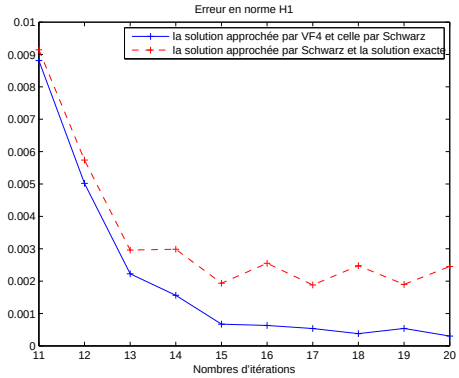

FIG. 4.4 – L'erreur en norme H^1 pour le test 2

Le choix de la valeur de λ détermine également le nombre d'itérations que l'algorithme executera comme le montre la figure 4.5. En effet, ici on fait varier λ entre 0.1 et 10, et on regarde le nombre d'itérations nécessaires pour le test d'arrêt plus approprié. On se rend compte qu'il diminue quand la valeur de λ augmente puis augmente.

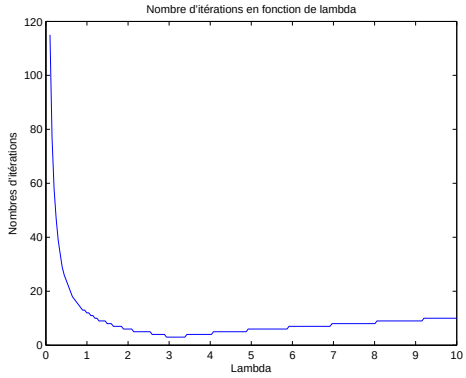

FIG. 4.5 – Nombres d'itérations en fonction de la valeur du paramètre λ pour le test 2

Si on compare le temps de résolution pour la méthode de VF4 directe et la méthode de Schwarz pour $\lambda = 3$ (optimal pour le test 2) sur les maillages (figure 2.6 maillage 4-8 en raffinant 6 fois), on obtient le tableau suivant avant parallélisme (on peut donc imager que le temps pour la méthode de Schwarz après parallélisme sera divisé par deux) :

Nombre de mailles	80	320	1280	5120	20480	81920	327680
Méthode directe	$3.75939E-3$	0.01377	0.05171	0.22245	0.99507	4.53354	22.31667
Méthode de Schwarz	$4.24551E-3$	$9.68421E-3$	0.04393	0.19958	0.99745	4.52080	21.23243

4.2 Méthode Schwarz discrète pour la méthode DDFV

On décompose notre domaine Ω en deux domaines tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$ (figure 4.6) où Γ est l'interface entre les deux sous domaines $\Gamma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$. On appelle arêtes de Γ les interfaces $\kappa|\mathcal{L}$ avec $\kappa \subset \Omega_i$ et $\mathcal{L} \subset \Omega_j$ pour $i \neq j$. On note $\mathfrak{M}$ le maillage de $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$.

On s'intéresse au problème (4.10).
On approche la solution exacte u par $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ construite par la méthode DDFV (étude faite dans quatrième partie). Les notations du maillage sont identiques que dans la quatrième partie, et le maillage tient compte de la géométrie des sous domaines. Pour $i = 1,\ 2$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_i &= \{\kappa \in \mathfrak{M} \text{ telle que } \kappa \subset \Omega_i,\ \kappa \cap \Gamma = \emptyset\} \\
\mathfrak{M}_i^* &= \{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \text{ telle que } \kappa^* \subset \Omega_i,\ \kappa^* \cap \Gamma = \emptyset\} \\
\mathfrak{M}_{i,\Gamma} &= \{\kappa \in \mathfrak{M} \text{ telle que } \kappa \subset \Omega_i,\ \kappa \cap \Gamma \neq \emptyset\} \\
\mathfrak{M}_{i,\Gamma}^* &= \{\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cap (\Omega_i \cup \Gamma)) \text{ telle que } \kappa^* \cap \Gamma \neq \emptyset\}
\end{aligned}$$

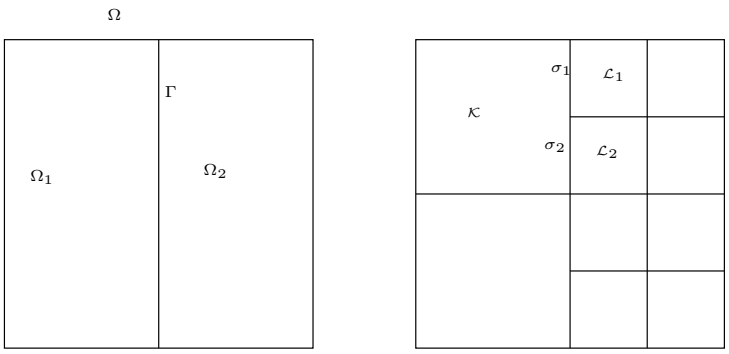

FIG. 4.6 – Le domaine Ω

Le schéma s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} & \text{On cherche } u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0^D \text{ tel que} & & \\ \forall\, \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\mathcal{K}} \\ \forall\, \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) & = & f_{\mathcal{K}^*} \end{array}} \tag{4.11}$$

4.2.1 Premier cas

On va utiliser la méthode de Schwarz discrète qui consiste à construire les suites (u^n) et (v^n) où les u^n (respectivement v^n) sont les inconnues de Ω_i (respectivement Ω_j) à l'itération n (figure 4.7).

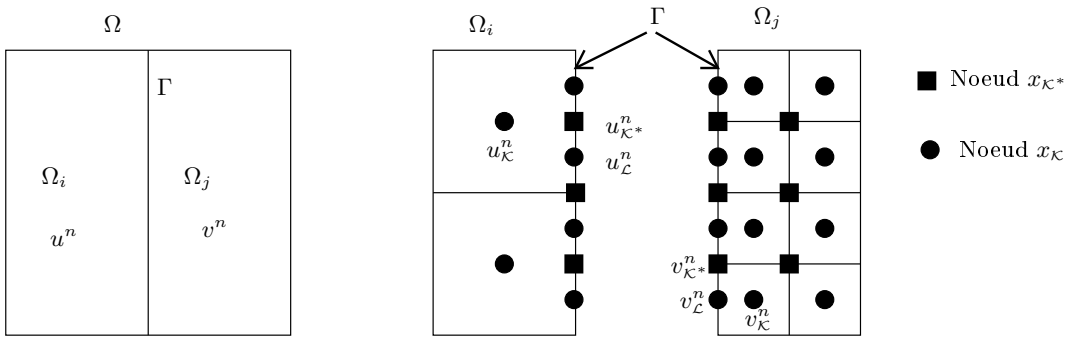

FIG. 4.7 – Le domaine Ω

Le schéma Schwarz-DDFV s'écrit alors :

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} & u^{n+1} \in \mathbb{E}_0^D & & \\ \forall\, \mathcal{K} \in \mathfrak{M}_i, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}\left(\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}\right) & = & f_{\mathcal{K}} \\ \forall\, \mathcal{K} \in \mathfrak{M}_{i,\Gamma}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}\left(\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}\right) & = & f_{\mathcal{K}} \\ \forall\, \sigma \in \Gamma, & \left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda \gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{n+1}\right) & = & g^n_{\sigma,v} \\ \forall\, \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*_i, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}\right) & = & f_{\mathcal{K}^*} \\ \forall\, \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}\right) & = & f_{\mathcal{K}^*} \\ & v^{n+1} \in \mathbb{E}_0^D & & \\ \forall\, \mathcal{K} \in \mathfrak{M}_j, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}\left(\nabla^{\mathcal{T}} v^{n+1}\right) & = & f_{\mathcal{K}} \\ \forall\, \mathcal{K} \in \mathfrak{M}_{j,\Gamma}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}\left(\nabla^{\mathcal{T}} v^{n+1}\right) & = & f_{\mathcal{K}} \\ \forall\, \sigma \in \Gamma, & \left(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda \gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{n+1}\right) & = & g^n_{\sigma,u} \\ \forall\, \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*_j, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}} v^{n+1}\right) & = & f_{\mathcal{K}^*} \\ \forall\, \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*_{j,\Gamma}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}} v^{n+1}\right) & = & f_{\mathcal{K}^*} \end{array}} \tag{4.12}$$

Avec

$$g^n_{\sigma,v} = -\left(\nabla^{\mathcal{D}} v^n, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(v^n\right)$$

Théorème 16.

On se choisit un maillage fixe de Ω qui respecte l'interface. On considère la solution du schéma (4.12) avec $f = 0$.
On a une convergence "ponctuelle" de u^{n+1} vers $u^{\mathcal{T}} = 0$ et v^{n+1} vers $v^{\mathcal{T}} = 0$ quand n tend vers ∞ sur le maillage fixé.

Démonstration :
La formule de Green donne :

$$\begin{aligned}
-\mathrm{J}\mathrm{div}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}), u^{n+1}\mathrm{K} &= 0 \\
&= (\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}, \nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1})_{\mathfrak{D}} - (\gamma^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}\cdot\vec{n}), \gamma^{\mathcal{T}}(u^{n+1}))_{\partial\Omega} \\
&= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}|^2 - \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \gamma^{\mathcal{D}}(u^{n+1})(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})
\end{aligned}$$

On peut faire de même avec v^{n+1}, d'où

$$0 = \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}|^2 + \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}|^2 - \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \gamma^{\mathcal{D}}(u^{n+1})(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) - \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \gamma^{\mathcal{D}}(v^{n+1})(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}})$$

On peut écrire les derniers termes du membre de droite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&-\gamma^{\mathcal{D}}(u^{n+1})(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) - \gamma^{\mathcal{D}}(v^{n+1})(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}) \\
= \ & \frac{1}{4\lambda}\left((-(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}(u^{n+1}))^2 - \underbrace{((\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}(u^{n+1}))^2}_{=-(\nabla^{\mathcal{D}} v^n, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}})+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}(v^n)}\right) \\
& + \frac{1}{4\lambda}\left((-(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}(v^{n+1}))^2 - \underbrace{((\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}(v^{n+1}))^2}_{=-(\nabla^{\mathcal{D}} u^n, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}(u^n)}\right) \\
= \ & \frac{1}{4\lambda}\left(\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{n+1}\right)\right)^2 - \left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{n}\right)\right)^2\right) \\
& + \frac{1}{4\lambda}\left(\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{n+1}\right)\right)^2 - \left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{n}\right)\right)^2\right)
\end{aligned}$$

On récapitule :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}|^2 + \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}|^2 - \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{n+1}\right)\left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) - \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{n+1}\right)\left(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right) \\
&= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}|^2 + \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}|^2 \\
&\quad + \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \frac{1}{4\lambda}\left(\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{n+1}\right)\right)^2 - \left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{n}\right)\right)^2\right) \\
&\quad + \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \frac{1}{4\lambda}\left(\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{n+1}\right)\right)^2 - \left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{n}\right)\right)^2\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}|^2 &+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}|^2 \\
&+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \frac{1}{4\lambda}\left(\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{n+1}\right)\right)^2 + \left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{n+1}\right)\right)^2\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \frac{1}{4\lambda}\left(\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{n}\right)\right)^2 + \left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{n}\right)\right)^2\right)
\end{aligned}$$

En simplifiant :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}u^{n+1}|^2 \quad &+ \quad \sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}v^{n+1}|^2 \\
&+ \quad \underbrace{\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \frac{1}{4\lambda}\left(\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}}u^{N+1},\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right)+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{N+1}\right)\right)^2+\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}}v^{N+1},\vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right)+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{N+1}\right)\right)^2\right)}_{\geq 0} \\
&= \quad \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \frac{1}{4\lambda}\left((-(\nabla^{\mathcal{D}}u^1,\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}(u^1))^2+(-(\nabla^{\mathcal{D}}v^1,\vec{n}_{\sigma\mathcal{L}})+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}(v^1))^2\right)
\end{aligned}$$

Donc on a

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}u^{n+1}|^2+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}v^{n+1}|^2 \quad \leq \quad C$$

On en déduit que les séries $\sum_{n\geq 1}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}u^{n+1}|^2$ et $\sum_{n\geq 1}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}v^{n+1}|^2$ convergent et par conséquent on a convergence vers 0. D'après l'inégalité de Poincaré discrète, on déduit la convergence "ponctuelle" de u^{n+1} vers 0 et v^{n+1} vers 0.

■

4.2.2 Deuxième cas

On va utiliser la méthode de Schwarz discrète qui consiste à construire les suites (u^n) et (v^n) où les u^n (respectivement v^n) sont les inconnues de Ω_i (respectivement Ω_j) à l'itération n (figure 4.8).

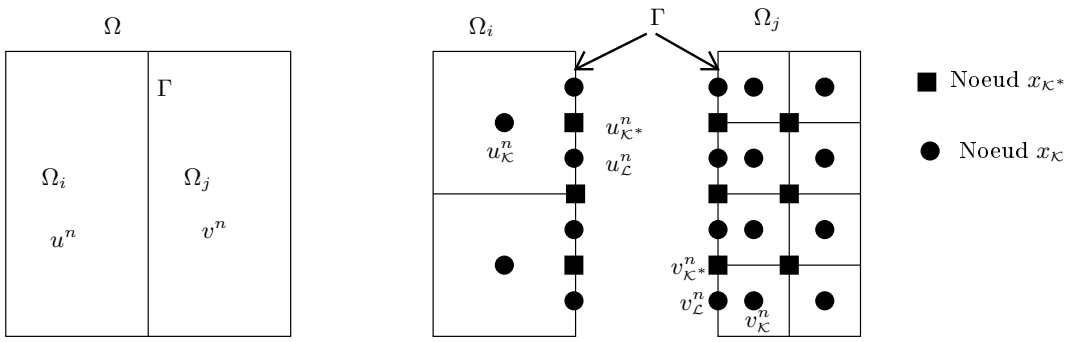

FIG. 4.8 – Le domaine Ω

Le schéma Schwarz-DDFV s'écrit en utilisant le deuxième schéma de Fourier, c'est-à-dire en approchant le flux des mailles duales du bord Fourier par la condition de Fourier sur la demi-arête :

$$
\begin{array}{lrcl}
 & u^{n+1} \in \mathbb{E}_0^D & & \\
\forall\, \kappa \in \mathfrak{M}_i, & -\mathrm{div}^{\kappa}\left(\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}\right) & = & 0 \\
\forall\, \kappa \in \mathfrak{M}_{i,\Gamma}, & -\mathrm{div}^{\kappa}\left(\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}\right) & = & 0 \\
\forall\, \sigma \in \Gamma, & \left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\kappa}\right) + \lambda \gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{n+1}\right) & = & g^n_{\sigma,v} \\
\forall\, \kappa^* \in \mathfrak{M}_i^*, & -\mathrm{div}^{\kappa^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}\right) & = & 0 \\
\forall\, \kappa^* \in \mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*, & -\displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}\left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}\right) + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \Gamma)} m_\sigma \left(\lambda \frac{u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} + u^{n+1}_{\mathcal{L}}}{2} - g^n_{\mathcal{L},\kappa^*,v}\right) & = & 0 \\
 & v^{n+1} \in \mathbb{E}_0^D & & \\
\forall\, \kappa \in \mathfrak{M}_j, & -\mathrm{div}^{\kappa}\left(\nabla^{\mathcal{T}} v^{n+1}\right) & = & 0 \\
\forall\, \kappa \in \mathfrak{M}_{j,\Gamma}, & -\mathrm{div}^{\kappa}\left(\nabla^{\mathcal{T}} v^{n+1}\right) & = & 0 \\
\forall\, \sigma \in \Gamma, & \left(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\kappa}\right) + \lambda \gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{n+1}\right) & = & g^n_{\sigma,u} \\
\forall\, \kappa^* \in \mathfrak{M}_j^*, & -\mathrm{div}^{\kappa^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}} v^{n+1}\right) & = & 0 \\
\forall\, \kappa^* \in \mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*, & -\displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*}\left(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}\right) + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \Gamma)} m_\sigma \left(\lambda \frac{v^{n+1}_{\mathcal{K}^*} + v^{n+1}_{\mathcal{L}}}{2} - g^n_{\mathcal{L},\kappa^*,u}\right) & = & 0
\end{array}
\tag{4.13}
$$

Avec

$$
\begin{aligned}
\gamma^{\mathcal{D}}(u^{n+1}) &= \frac{1}{2}\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}(u^{n+1}) + \frac{1}{2}\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}(u^{n+1}) \\
\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}(u^{n+1}) &= \frac{u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} + u^{n+1}_{\mathcal{L}}}{2} \\
g^n_{\sigma,v} &= \frac{1}{2} g^n_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*,v} + \frac{1}{2} g^n_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*,v} \\
g^n_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*,v} &= -\left(\nabla^{\mathcal{D}} v^n, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right) + \lambda \gamma_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}(v^n)
\end{aligned}
$$

Théorème 17.

On se choisit un maillage fixe de Ω qui respecte l'interface.
On a une convergence "ponctuelle" de u^{n+1} vers $u^{\mathcal{T}} = 0$ et v^{n+1} vers $v^{\mathcal{T}} = 0$ quand n tend vers ∞ sur le maillage fixé.

Démonstration :
La définition des crochets J, K et la cinquième équation du schéma (4.13) donnent :

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{J}\mathrm{div}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}), u^{n+1}\mathrm{K} &= -\frac{1}{4} \sum_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*} u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \Gamma)} m_\sigma \left(\lambda \gamma_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}(u^{n+1}) - g^n_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*,v} + (\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})\right) \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*} u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \Gamma)} m_\sigma \frac{1}{2} \left(\lambda \gamma_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}(u^{n+1}) - \lambda \gamma_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}(u^{n+1}) - (g^n_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*,v} - g^n_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*,v})\right) \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*} u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \Gamma)} m_\sigma \frac{\lambda}{2} \left(\frac{u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - u^{n+1}_{\mathcal{L}^*}}{2} - \frac{v^n_{\mathcal{K}^*} - v^n_{\mathcal{L}^*}}{2}\right) \\
&= -\frac{\lambda}{4} \sum_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \Gamma)} m_\sigma \frac{(u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - u^{n+1}_{\mathcal{L}^*})^2}{4} \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*} u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \Gamma)} m_\sigma \lambda \frac{v^n_{\mathcal{K}^*} - v^n_{\mathcal{L}^*}}{4} \\
&= -\frac{\lambda}{4} \sum_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in (\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \Gamma)} m_\sigma \frac{(u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - u^{n+1}_{\mathcal{L}^*})^2}{4} + \lambda \sum_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*} m_\sigma \frac{v^n_{\mathcal{K}^*} - v^n_{\mathcal{L}^*}}{4} \frac{u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - u^{n+1}_{\mathcal{L}^*}}{4}
\end{aligned}
$$

La formule de Green donne :

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}), u^{n+1}\mathrm{K} &= (\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1}, \nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1})_{\mathfrak{D}} - (\gamma^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{n+1} \cdot \vec{n}), \gamma^{\mathcal{T}}(u^{n+1}))_{\partial\Omega} \\
&= \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}|^2 - \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \gamma^{\mathcal{D}}(u^{n+1})(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})
\end{aligned}$$

On peut faire de même avec v^{n+1}, d'où :

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - u^{n+1}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2 - \lambda \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} m_\sigma \frac{v^n_{\mathcal{K}^*} - v^n_{\mathcal{L}^*}}{4} \frac{u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - u^{n+1}_{\mathcal{L}^*}}{4} \\
&+\lambda \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{v^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - v^{n+1}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2 - \lambda \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} m_\sigma \frac{u^n_{\mathcal{K}^*} - u^n_{\mathcal{L}^*}}{4} \frac{v^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - v^{n+1}_{\mathcal{L}^*}}{4} \\
&+ \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}|^2 - \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \gamma^{\mathcal{D}}(u^{n+1})(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) \\
&+ \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}|^2 - \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \gamma^{\mathcal{D}}(v^{n+1})(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}})
\end{aligned}$$

En utilisant la formule suivante sur les termes croisés :

$$a^2 - ab = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2$$

On a :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - u^{n+1}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{v^n_{\mathcal{K}^*} - v^n_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2 \\
&+\frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{(u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - u^{n+1}_{\mathcal{L}^*}) - (v^n_{\mathcal{K}^*} - v^n_{\mathcal{L}^*})}{4}\right)^2 \\
&+\frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{v^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - v^{n+1}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{u^n_{\mathcal{K}^*} - u^n_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2 \\
&+\frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{(v^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - v^{n+1}_{\mathcal{L}^*}) - (u^n_{\mathcal{K}^*} - u^n_{\mathcal{L}^*})}{4}\right)^2 \\
&+ \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}|^2 - \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \gamma^{\mathcal{D}}(u^{n+1})(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) \\
&+ \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}|^2 - \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \gamma^{\mathcal{D}}(v^{n+1})(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}})
\end{aligned}$$

En utilisant les calculs précédents pour la somme sur les diamants de l'interface, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - u^{n+1}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{v^n_{\mathcal{K}^*} - v^n_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2 \\
&+\frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{(u^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - u^{n+1}_{\mathcal{L}^*}) - (v^n_{\mathcal{K}^*} - v^n_{\mathcal{L}^*})}{4}\right)^2 \\
&+\frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{v^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - v^{n+1}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{u^n_{\mathcal{K}^*} - u^n_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2 \\
&+\frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma \left(\frac{(v^{n+1}_{\mathcal{K}^*} - v^{n+1}_{\mathcal{L}^*}) - (u^n_{\mathcal{K}^*} - u^n_{\mathcal{L}^*})}{4}\right)^2 \\
&+ \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}|^2 + \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}|^2 \\
&+ \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \frac{1}{4\lambda} \left(\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{n+1}\right)\right)^2 - \left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{n}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{n}\right)\right)^2 \right) \\
&+ \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma \frac{1}{4\lambda} \left(\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{n+1}\right)\right)^2 - \left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}} v^{n}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{n}\right)\right)^2 \right)
\end{aligned}$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}u^{n+1}|^2 \quad &+ \quad \sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}v^{n+1}|^2 + \sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma\left(\frac{(u^{n+1}_{\mathcal{K}^*}-u^{n+1}_{\mathcal{L}^*})-(v^n_{\mathcal{K}^*}-v^n_{\mathcal{L}^*})}{4}\right)^2\\
&+ \quad \sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma\left(\frac{(v^{n+1}_{\mathcal{K}^*}-v^{n+1}_{\mathcal{L}^*})-(u^n_{\mathcal{K}^*}-u^n_{\mathcal{L}^*})}{4}\right)^2\\
&+ \quad \sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma\frac{1}{4\lambda}\left(\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}}u^{n+1},\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right)+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{n+1}\right)\right)^2+\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}}v^{n+1},\vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right)+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{n+1}\right)\right)^2\right)\\
&+ \quad \sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma\left(\frac{u^{n+1}_{\mathcal{K}^*}-u^{n+1}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2\\
&+ \quad \sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma\left(\frac{v^{n+1}_{\mathcal{K}^*}-v^{n+1}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2\\
&\leq \quad \sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma\frac{1}{4\lambda}\left(\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}}u^{n},\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right)+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{n}\right)\right)^2+\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}}v^{n},\vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right)+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{n}\right)\right)^2\right)\\
&\quad +\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma\left(\frac{u^{n}_{\mathcal{K}^*}-u^{n}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2\\
&\quad +\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma\left(\frac{v^{n}_{\mathcal{K}^*}-v^{n}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2
\end{aligned}$$

En simplifiant :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}u^{n+1}|^2 \quad &+ \quad \sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}v^{n+1}|^2 + \sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma\left(\frac{(u^{n+1}_{\mathcal{K}^*}-u^{n+1}_{\mathcal{L}^*})-(v^n_{\mathcal{K}^*}-v^n_{\mathcal{L}^*})}{4}\right)^2\\
&+ \quad \sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma\left(\frac{(v^{n+1}_{\mathcal{K}^*}-v^{n+1}_{\mathcal{L}^*})-(u^n_{\mathcal{K}^*}-u^n_{\mathcal{L}^*})}{4}\right)^2\\
&+ \quad \underbrace{\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma\frac{1}{4\lambda}\left(\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}}u^{N+1},\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right)+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(u^{N+1}\right)\right)^2+\left(-\left(\nabla^{\mathcal{D}}v^{N+1},\vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right)+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(v^{N+1}\right)\right)^2\right)}_{\geq 0}\\
&+ \quad \underbrace{\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma\left(\frac{u^{N+1}_{\mathcal{K}^*}-u^{N+1}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2+\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma\left(\frac{v^{N+1}_{\mathcal{K}^*}-v^{N+1}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2}_{\geq 0}\\
&\leq \quad \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma\frac{1}{4\lambda}\left((-(\nabla^{\mathcal{D}}u^1,\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}})+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}(u^1))^2+(-(\nabla^{\mathcal{D}}v^1,\vec{n}_{\sigma\mathcal{L}})+\lambda\gamma^{\mathcal{D}}(v^1))^2\right)\\
&\quad +\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma\left(\frac{u^{1}_{\mathcal{K}^*}-u^{1}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2+\frac{\lambda}{2}\sum_{\mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*_{i,\Gamma}}\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}\in(\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}\cap\Gamma)} m_\sigma\left(\frac{v^{1}_{\mathcal{K}^*}-v^{1}_{\mathcal{L}^*}}{4}\right)^2
\end{aligned}$$

Donc on a

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}u^{n+1}|^2+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}v^{n+1}|^2 \quad \leq \quad C$$

On en déduit que les séries $\sum_{n\geq 1}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}u^{n+1}|^2$ et $\sum_{n\geq 1}\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}v^{n+1}|^2$ convergent et par conséquent on a convergence vers 0. D'après l'inégalité de Poincaré discrète, on déduit la convergence "ponctuelle" de u^{n+1} vers $u^{\mathcal{T}}=0$ et v^{n+1} vers $v^{\mathcal{T}}=0$.

■

4.2.3 Réécriture DDVF

On rajoute des inconnues à l'interface u_σ pour toutes les arêtes σ de Γ telles que $x_\sigma = \overrightarrow{x_\mathcal{K} x_\mathcal{L}} \cap \overrightarrow{x_{\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{L}^*}}$ et $x_\sigma \in \Gamma$. On remarque qu'on peut écrire le gradient discret en utilisant cette inconnue u_σ :

$$(\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{\tau}_{\mathcal{K},\sigma}) = \frac{u_\sigma - u_\mathcal{K}}{d_{\mathcal{K},\sigma}}$$

Grâce à la conservativité des flux numériques l'inconnue u_σ s'élimine :

$$\begin{aligned}(\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{\tau}_{\mathcal{K},\sigma}) &= -(\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{\tau}_{\mathcal{L},\sigma}) \\ &= -\frac{u_\sigma - u_\mathcal{L}}{d_{\mathcal{L},\sigma}}\end{aligned}$$

Donc

$$u_\sigma = \frac{d_{\mathcal{L},\sigma} u_\mathcal{K} + d_{\mathcal{K},\sigma} u_\mathcal{L}}{m_{\sigma^*}}$$

Ainsi on a deux façons d'écrire le gradient discret :

$$\begin{aligned}\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T} &= \frac{1}{\sin \alpha_\mathcal{D}} \left(\frac{u_\mathcal{L} - u_\mathcal{K}}{m_{\sigma^*}} \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{m_\sigma} \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} \right) \\ &= \frac{1}{\sin \alpha_\mathcal{D}} \left(\frac{u_\sigma - u_\mathcal{K}}{d_{\mathcal{K},\sigma}} \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{m_\sigma} \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} \right)\end{aligned}$$

Remarque 15 : Si $\kappa \in \mathfrak{M}_{l,\Gamma}$ pour $l = i,\ j$, on utilise la deuxième façon pour $\sigma \in \Gamma$ (figure 4.9).

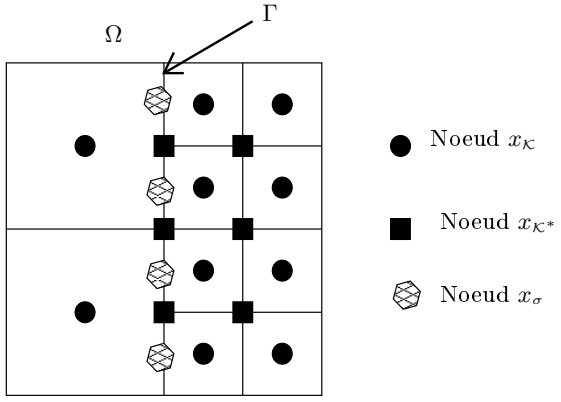

FIG. 4.9 – La solution $u^\mathcal{T}$

On peut écrire que la solution du schéma (4.11) vérifie le schéma suivant : $u^\mathcal{T} \in \mathbb{E}_0^D$

$$\boxed{\begin{array}{lll}
\forall\ \kappa \in (\mathfrak{M}_i \cup \mathfrak{M}_j), & -\mathrm{div}^\mathcal{K}(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) = f_\mathcal{K} \\
\forall\ \kappa \in (\mathfrak{M}_{i,\Gamma} \cup \mathfrak{M}_{j,\Gamma}), & -\mathrm{div}^\mathcal{K}(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) = f_\mathcal{K} \\
\forall\ \sigma \in \Gamma, & (\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}) + \lambda\gamma^\mathcal{D}(u^\mathcal{T}) = -(\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}) + \lambda\gamma^\mathcal{D}(u^\mathcal{T}) \\
\forall\ \kappa^* \in (\mathfrak{M}_i^* \cup \mathfrak{M}_j^*), & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}(\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) = f_{\mathcal{K}^*} \\
\forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*, & -\dfrac{1}{m_{\mathcal{K}^*}^i} \left(\displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*} (\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}) + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} \frac{m_\sigma^i}{2} (\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}^i) \right) = f_{\mathcal{K}^*}^i + m_{\mathcal{K}^*}^i \widetilde{g_{\mathcal{K}^*}^i} \\
\forall\ \mathcal{L}^* \in \mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*, & -\dfrac{1}{m_{\mathcal{L}^*}^j} \left(\displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{L}^*}} m_{\sigma^*} (\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{n}_{\sigma^*\mathcal{L}^*}) + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{L}^*}} \frac{m_\sigma^j}{2} (\nabla^\mathcal{D} u^\mathcal{T}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}^j) \right) = f_{\mathcal{L}^*}^j + m_{\mathcal{L}^*}^j \widetilde{g_{\mathcal{L}^*}^j}
\end{array}} \tag{4.14}$$

Avec si $\kappa^* = \kappa_i^* \cup \mathcal{L}_j^*$:

$$m_{\mathcal{K}^*}^i \widetilde{g_{\mathcal{K}^*}^i} + m_{\mathcal{L}^*}^j \widetilde{g_{\mathcal{L}^*}^j} = 0$$

Remarque 16 : On a aussi, si $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}_i^* \cup \mathcal{L}_j^*$:

$$\begin{array}{rcccl} m_\sigma^i & = & m_\sigma^j & = & m_\sigma \\ \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}^i & = & -\vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}^j & & \end{array}$$

Et les $\widetilde{g_{\mathcal{K}^*}^i}$ sont définis par l'égalité.

On considère la solution $(\delta_1^{\mathcal{T}},\ \delta_2^{\mathcal{T}})$ (figure 4.10) du schéma suivant (4.15) :

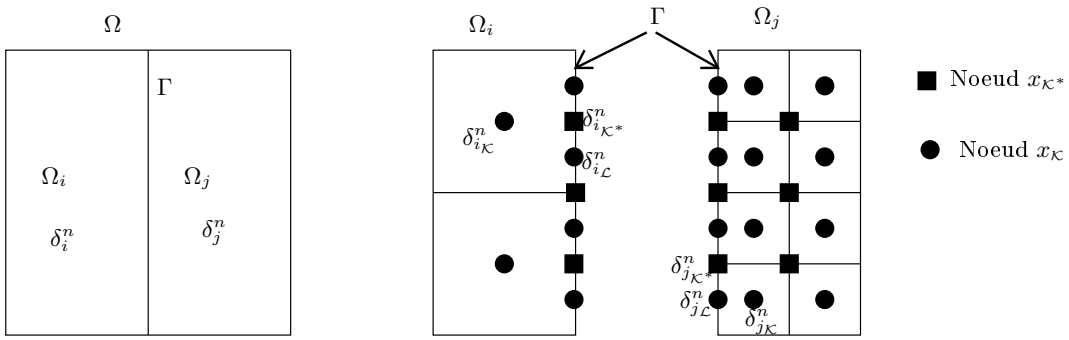

FIG. 4.10 – La solution $(\delta_1^{\mathcal{T}},\ \delta_2^{\mathcal{T}})$

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} & \delta_1^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0^D & & \\ \forall\ \kappa \in \mathfrak{M}_i, & -\mathrm{div}^\mathcal{K}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\delta_1^{\mathcal{T}}\right) & = & 0 \\ \forall\ \kappa \in \mathfrak{M}_{i,\Gamma}, & -\mathrm{div}^\mathcal{K}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\delta_1^{\mathcal{T}}\right) & = & 0 \\ \forall\ \sigma \in \Gamma, & \left(\nabla^{\mathcal{D}}\delta_1^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(\delta_1^{\mathcal{T}}\right) & = & g_{\sigma,\delta_2} \\ \forall\ \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}_i^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\delta_1^{\mathcal{T}}\right) & = & 0 \\ \forall\ \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\delta_1^{\mathcal{T}}\right) & = & g_{\mathcal{K}^*} \\ & \delta_2^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0^D & & \\ \forall\ \mathcal{K} \in \mathfrak{M}_j, & -\mathrm{div}^\mathcal{K}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\delta_2^{\mathcal{T}}\right) & = & 0 \\ \forall\ \mathcal{K} \in \mathfrak{M}_{j,\Gamma}, & -\mathrm{div}^\mathcal{K}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\delta_2^{\mathcal{T}}\right) & = & 0 \\ \forall\ \sigma \in \Gamma, & \left(\nabla^{\mathcal{D}}\delta_2^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(\delta_2^{\mathcal{T}}\right) & = & g_{\sigma,\delta_1} \\ \forall\ \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}_j^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\delta_2^{\mathcal{T}}\right) & = & 0 \\ \forall\ \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\delta_2^{\mathcal{T}}\right) & = & -g_{\mathcal{K}^*} \end{array}} \tag{4.15}$$

Avec

$$\begin{array}{rcl} g_{\sigma,\delta_2} & = & -\left(\nabla^{\mathcal{D}}\delta_2^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(\delta_2^{\mathcal{T}}\right) \\ g_{\mathcal{K}^*} & = & m_{\mathcal{K}^*}^1 \widetilde{g_{\mathcal{K}^*}^1} \end{array}$$

Remarque 17 : IDEE sur une estimation de $\delta^{\mathcal{T}}$:
La formule de Green donne pour $\delta_1^{\mathcal{T}}$:

$$\begin{array}{rcl} -\mathrm{Jdiv}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{T}}\delta_1^{\mathcal{T}}), \delta_1^{\mathcal{T}}\mathrm{K} & = & -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*} g_{\mathcal{K}^*}\delta_{\mathcal{K}^*}^1 \\ & = & \displaystyle\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_\mathcal{D}|\nabla^{\mathcal{D}}\delta_1^{\mathcal{T}}|^2 \end{array}$$

De même pour $\delta_2^{\mathcal{T}}$, d'où :

$$0 = \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}_\Gamma^*} g_{\mathcal{K}^*}\left(\delta_{\mathcal{K}_1^*}^1 - \delta_{\mathcal{L}_2^*}^2\right) + \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_\mathcal{D}|\nabla^{\mathcal{D}}\delta_1^{\mathcal{T}}|^2 + \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_\mathcal{D}|\nabla^{\mathcal{D}}\delta_2^{\mathcal{T}}|^2$$

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Pas Evident à avoir :!!!!!!!!!!!!!
Si on contrôle la norme infinie de $\widetilde{g^i_{\mathcal{K}^*}}$ pour tout $\kappa^* \in \mathfrak{M}^*_\Gamma$:

$$\forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}^*_\Gamma, \quad |\widetilde{g^i_{\mathcal{K}^*}}| \leq C\ \mathrm{size}(\mathcal{T})^\alpha$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}\delta_1^{\mathcal{T}}|^2 + \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}}|\nabla^{\mathcal{D}}\delta_2^{\mathcal{T}}|^2 &\leq \left|\frac{1}{2}\sum_{\kappa^*\in\mathfrak{M}^*_\Gamma} g_{\mathcal{K}^*}\left(\delta^1_{\mathcal{K}^*_1} - \delta^2_{\mathcal{L}^*_2}\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{\kappa^*\in\mathfrak{M}^*_\Gamma}\left|g_{\mathcal{K}^*}\delta^1_{\mathcal{K}^*_1}\right| + \frac{1}{2}\sum_{\kappa^*\in\mathfrak{M}^*_\Gamma}\left|g_{\mathcal{K}^*}\delta^2_{\mathcal{L}^*_2}\right| \\
&\underbrace{\leq}_{\mathrm{CS}} \left(\sum_{\kappa^*\in\mathfrak{M}^*_\Gamma} m_{\mathcal{K}^*}\left|\delta^1_{\mathcal{K}^*_1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\kappa^*\in\mathfrak{M}^*_\Gamma} m_{\mathcal{K}^*}\left|\widetilde{g^i_{\mathcal{K}^*}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\sum_{\kappa^*\in\mathfrak{M}^*_\Gamma} m_{\mathcal{K}^*}\left|\delta^2_{\mathcal{L}^*_2}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\kappa^*\in\mathfrak{M}^*_\Gamma} m_{\mathcal{K}^*}\left|\widetilde{g^i_{\mathcal{K}^*}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\ \mathrm{size}(\mathcal{T})^{\alpha+1}\left(\|\delta_1^{\mathcal{T}}\|_2 + \|\delta_2^{\mathcal{T}}\|_2\right)
\end{aligned}$$

Donc pour $i = 1,\ 2$:

$$\|\delta_i^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C\ \mathrm{size}(\mathcal{T})^{\alpha+1}$$

Et on considère la solution $(\widetilde{u}^{\mathcal{T}},\ \widetilde{v}^{\mathcal{T}})$ (figure 4.11) du schéma suivant (4.16) :

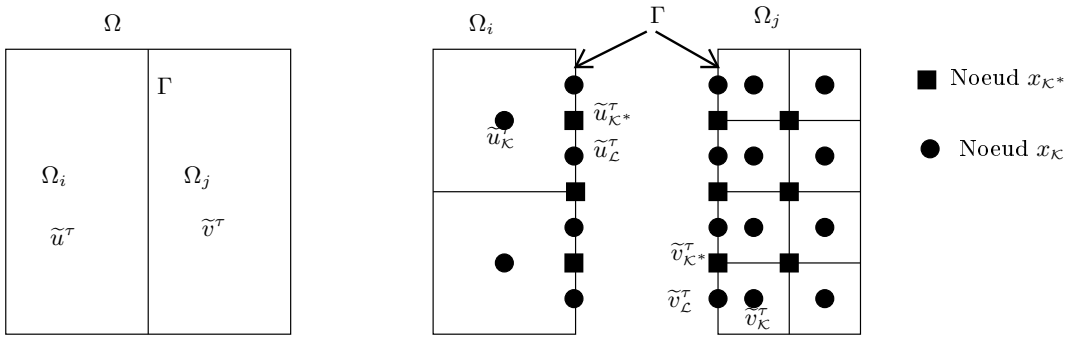

FIG. 4.11 – La solution $(\widetilde{u}^{\mathcal{T}},\ \widetilde{v}^{\mathcal{T}})$

$$\boxed{\begin{array}{lrcl}
 & \widetilde{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0^D & & \\
\forall\ \kappa \in \mathfrak{M}_i, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\widetilde{u}^{\mathcal{T}}\right) & = & f_{\mathcal{K}} \\
\forall\ \kappa \in \mathfrak{M}_{i,\Gamma}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\widetilde{u}^{\mathcal{T}}\right) & = & f_{\mathcal{K}} \\
\forall\ \sigma \in \Gamma, & \left(\nabla^{\mathcal{D}}\widetilde{u}^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(\widetilde{u}^{\mathcal{T}}\right) & = & g_{\sigma,\widetilde{v}} \\
\forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}_i^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\widetilde{u}^{\mathcal{T}}\right) & = & f_{\mathcal{K}^*} \\
\forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\widetilde{u}^{\mathcal{T}}\right) & = & f_{\mathcal{K}^*} \\
 & \widetilde{v}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0^D & & \\
\forall\ \kappa \in \mathfrak{M}_j, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\widetilde{v}^{\mathcal{T}}\right) & = & f_{\mathcal{K}} \\
\forall\ \kappa \in \mathfrak{M}_{j,\Gamma}, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\widetilde{v}^{\mathcal{T}}\right) & = & f_{\mathcal{K}} \\
\forall\ \sigma \in \Gamma, & \left(\nabla^{\mathcal{D}}\widetilde{v}^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(\widetilde{v}^{\mathcal{T}}\right) & = & g_{\sigma,\widetilde{u}} \\
\forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}_j^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\widetilde{v}^{\mathcal{T}}\right) & = & f_{\mathcal{K}^*} \\
\forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}_{j,\Gamma}^*, & -\mathrm{div}^{\mathcal{K}^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}}\widetilde{v}^{\mathcal{T}}\right) & = & f_{\mathcal{K}^*}
\end{array}} \tag{4.16}$$

Avec

$$g_{\sigma,\widetilde{v}} = -\left(\nabla^{\mathcal{D}}\widetilde{v}^{\mathcal{T}}, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(\widetilde{v}^{\mathcal{T}}\right)$$

On a

$$\begin{array}{rcl} u^{\mathcal{T}}_{|\Omega_i} & = & \widetilde{u}^{\mathcal{T}} + \delta_1^{\mathcal{T}} \\ u^{\mathcal{T}}_{|\Omega_j} & = & \widetilde{v}^{\mathcal{T}} + \delta_2^{\mathcal{T}} \end{array}$$

4.2.4 Erreur

On pose $e_1^n = u^n - \widetilde{u}^{\mathcal{T}}$ et $e_2^n = v^n - \widetilde{v}^{\mathcal{T}}$, avec $(\widetilde{u}^{\mathcal{T}},\ \widetilde{v}^{\mathcal{T}})$ la solution du schéma (4.16) et $(u^n,\ v^n)$ la solution du schéma (4.12).

Le schéma vérifié par l'erreur e^{n+1} s'écrit alors :

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} \text{Pour } i = 1,2 & e_i^{n+1} \in \mathbb{E}_0^{\mathcal{D}} & & \\ \forall\ \kappa \in \mathfrak{M}_i, & -\mathrm{div}^{\kappa}\left(\nabla^{\mathcal{T}} e_i^{n+1}\right) & = & 0 \\ \forall\ \kappa \in \mathfrak{M}_{i,\Gamma}, & -\mathrm{div}^{\kappa}\left(\nabla^{\mathcal{T}} e_i^{n+1}\right) & = & 0 \\ \forall\ \sigma \in \Gamma, & \left(\nabla^{\mathcal{D}} e_i^{n+1}, \vec{n}_{\sigma\kappa}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(e_i^{n+1}\right) & = & g^n_{\sigma,e_j} \\ \forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}_i^*, & -\mathrm{div}^{\kappa^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}} e_i^{n+1}\right) & = & 0 \\ \forall\ \kappa^* \in \mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*, & -\mathrm{div}^{\kappa^*}\left(\nabla^{\mathcal{T}} e_i^{n+1}\right) & = & 0 \end{array}} \tag{4.17}$$

Avec

$$g^n_{\sigma,e_j} = -\left(\nabla^{\mathcal{D}} e_j^n, \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}}\right) + \lambda\gamma^{\mathcal{D}}\left(e_j^n\right)$$

D'après le théorème 16, on a

$$\begin{array}{rcrcl} e_i^n & \longrightarrow & 0 & & \\ u^n & \longrightarrow & \widetilde{u}^{\mathcal{T}} & = & u^{\mathcal{T}}_{|\Omega_1} - \delta_1^{\mathcal{T}} \\ v^n & \longrightarrow & \widetilde{v}^{\mathcal{T}} & = & u^{\mathcal{T}}_{|\Omega_2} - \delta_2^{\mathcal{T}} \end{array}$$