Espaces vectriels normés

1. Normes sur un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E est une application $E \to \mathbb{R}$ $u \longmapsto \|u\|$ et vérifiant

(i) $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ si $\lambda \in \mathbb{K}$; $u \in E$

(ii) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

(iii) (Inegalité triangulaire) $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

Ceci entraîne $\|u-v\| \geqslant \big|\, \|u\| - \|v\| \,\big|$

Exemples fondamentaux

1) $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $\|\lambda\| = |\lambda|$.

2) Sur $E = \mathbb{K}^n$, on definit

$$\left.\begin{aligned} \|u\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |u_i| \quad \text{si } u = (u_1, \dots, u_n) \\ \|u\|_\infty &= \sup_{i=[1,\dots,n]} |u_i| \\ \|u\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{(à voir en TD)}$$

3) Soit $E = C_0([0,1], \mathbb{R})$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt}$$

2) La distance sur un e.v.n (espace vectoriel normé)

On definit

$\forall u, v \in E$, $d(u,v) = \|u-v\|$, la fonction d verifie les axiomes d'une distance.

1) $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

2) $d(u,v) = d(v,u)$

3) $d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(w,u)$: Inégalité triangulaire

[conséquence] $d(u,v) \geqslant |d(u,w) - d(w,v)|$

3. Boules, voisinage, ouvert fermés

Soit E un e.v.n avec la distance d, et x un pt de L

La boule ouverte de centre $x \in E$ de rayon $R \in \mathbb{R}$ est

$$B(x,R) = \{y \in E, d(x,y) < R\}$$

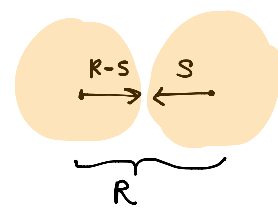
La boule fermée de centre $x \in E$ de rayon $R \in \mathbb{R}$ est

$$\overline{B}(x\,R) = \{y \in E, d(x,y) \leqslant R\}$$

Quelques remarques conséquences de l'inégalité triangulaire.

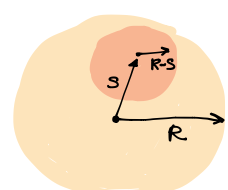
1) Si $d(x,y) = R > 0$ alors

$$B(x, R-S) \cap \overline{B}(y,S) = \emptyset$$



2) Si $d(x,y) = S$ et $R > S$ alors

$$B(y, R-S) \subset B(x,R)$$



exo.

Exemples de boules dans $\mathbb{R}^2$

boule pour $\| \ \|_2$

boule pour $\| \ \|_1$

boule par $\| \ \|_\infty$

Un voisinage de x est un ensemble U contenant une boule ouverte non vide de centre x $\{U \mid \exists R>0,\ B(x,R)\subset U\}$

proposition : U n'est pas un voisinage de x

$\Leftrightarrow \exists x_n,\ x_n \notin U$ et $x_n \to x$.

◀ exercice ▶

Un ouvert U est un ensemble qui est le voisinage de tous ses pts,
Autrement dit $\forall x\in U, \exists R>0,\ B(x,R)\subset U$.

Un fermé est le complementaire d'un ouvert

Proposition
1) $\emptyset$ et E sont ouverts et fermés
2) une boule ouverte est ouverte
3) une boule fermée est fermée

◀ ① $E=\bigcup_{x\in E} B(x,1)$ donc E est ouvert. Par definition $\emptyset$ est ouvert.

② Pour tout $y\in B(x,R)$, on a vu que $B(y,S)\subset B(x,R)$ avec $S=R-d(x,y)>0$

③ Si $y\notin \overline{B}(x,R)$; alors $d(x,y)>R$ et alors $B(y,d(x,y)-R)\cap\overline{B}(x,R)=O$

(voir plus haut) ▶

Proposition
1) toute reunion d'ouvert est ouvert.
2) toute intersection finie d'ouvert est ouvert
3) toute intersection de fermé est fermée
4) toute réunion finie de fermé est fermée.

◀ Il suffit de démontrer 1) et 2). Alors 3) et 4) suivent en utilisant ${}^c(A\cup B) = {}^cA\cap {}^cB$. ① Soit $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ une famille d'ouverts; Soit $U=\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ et $x\in U$. Alors il existe α_0 tel que $x\in U_{\alpha_0}$. Comme U_{α_0} est ouvert, il existe R_0 tel que

$B(x,R_0) \subset U_{\alpha_0} \subset U$. Donc U est ouvert. ② Soit $U_1, \dots, U_n$ des ouverts, et $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Donc $\forall i$, $x \in U_i$ comme U_i est ouvert, on a $R_i > 0$ tq $B(x,R_i) \subset U_i$. Soit $R_0 = \inf(R_i)$; alors $B(x,R_0) \subset U_i$ pour tout i.
Donc $B(x,R_0) \subset U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Ainsi comme $R_0 > 0$, U est ouvert ▶

4. limite de suites

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On dit que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y si

$$\forall R>0, \exists n_0, n>n_0 \Rightarrow x_n \in B(y,R).$$

Proposition

la suite de vecteurs $\{x_n\}$ tend vers y, si et seulement si la suite de nombres reels $\{d(x_n,y) = \|x_n - y\|\}$ tend vers 0

Proposition [unicité de la limite]

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y_0 et y_1 alors $y_0 = y_1$

◀ En effet $\|y_1 - y_0\| \underset{(\text{I.T.})}{\leq} \|y_0 - x_n\| + \|x_n - y_0\| \longrightarrow 0$. Donc $\|y_1 - y_0\| = 0$ ▶

On note alors $\lim_{n\to\infty} x_n = y_0$, ou $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$

Exemple : soit $u, v \in E$, alors la suite $u_n = u + \frac{1}{n} v$ converge vers u

Une suite est convergente si elle converge.

Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (par A) si $\forall n$; $\|x_n\| \leq A$.

Proposition

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y, alors $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|y\|$

◀ On a en effet $\big|\|x_n\| - \|y\|\big| \leq \|x_n - y\| \longrightarrow 0$ ▶

En particulier, toute suite convergente est bornée.

Cas particulier utile : $x_n \to 0 \iff \|x_n\| \to 0$

propriétés de la limite :

(i) si $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sont deux suites de vecteurs de E avec

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ alors $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$

(ii) si $\{x_n\}$ est une suite de vecteurs de E et $\{\lambda_n\}$ une suite de nombres de K

et $\lim_{n\to\infty} x_n = x$; $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$; alors

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda x$$

5. adhérence d'un ensemble et densité

proposition $\quad A$ fermé $\iff$ toute suite convergente de vecteurs de A a une limite dans A.

(a) $\qquad\qquad$ (b)

◀ Supposons A fermé. Soit $x_n \to y$ tel que $x_n \in A$. Supposons que $y \notin A$ alors $\exists R > 0$, $B(y,R) \cap A = \emptyset$ (le complémentaire de A est ouvert)

Par definition, $\exists n_0, \forall n > n_0$, $x_n \in B(y,R)$ et donc $x_n \notin A$. Nous venons de démontrer par contradiction que $y \in A$.

Supposons maintenant que A vérifie (b), Soit $y \notin A$.

Alors $\exists n$, $B(y, \frac{1}{n}) \cap A = \emptyset$. Sinon nous aurions $B(y,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset, \forall n$, soit alors $x_n \in B(y,\frac{1}{n}) \cap A$. Donc $\|x_n - y\| < \frac{1}{n}$ et ainsi $\lim_{n\to\infty} (x_n) = y$.

Et donc $y \in A$ et la contradiction. ▶

Soit $A \subset E$, E e.v.n ; l'adhérence de A est l'ensemble

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé},\, F \supset A} F$$

On a alors

Proposition

1) $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A (et en particulier $\overline{A}$ est fermé)

2) $\overline{A} = \{y \mid$ tel qu'il existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = y\}$

◀ 1) est évident : $\overline{A}$ est fermé car intersection de fermés. Par ailleurs si F fermé et $F \supset A$ alors par définition $F \supset \overline{A}$.

2) Comme $\overline{A}$ est fermé, $\overline{A} \supset B = \{y \mid \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \to y$ et $x_n \in A\}$

Soit $y \in \overline{A}$, alors $\forall n$, $B(y,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. Sinon, on a $B(y,\frac{1}{n}) \subset \mathcal{U} = E \setminus A$. Alors $A \subset E \setminus B(y,\frac{1}{n})$ [qui est fermé]. Donc $\overline{A} \subset E \setminus B(y,\frac{1}{n})$ et $y \notin \overline{A}$ contradiction. Soit donc $x_n \in B(y,\frac{1}{n}) \cap A$, on a alors $\|x_n - y\| \leqslant \frac{1}{n}$

Et donc $\|x_n - y\| \to 0$; Ainsi $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ ▶

Exemple : $\overline{B(x,R)} = \overline{B}(x,R)$ si $R > 0$

l'adhérence d'un s.e.v est un s.e.v

Un ensemble est dense si son adhérence est l'espace tout entier.

Exemples :

i) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

ii) $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ (pour la norme $\| \ \|_\infty$)

6. Intérieur

De manière symétrique, on définit l'intérieur de A comme

$$\mathring{A} := \bigcup_{\substack{\mathcal{U} \text{ ouvert} \\ \mathcal{U} \subset A}} \mathcal{U} .$$

$\mathcal{U}$ est alors ouvert en tant que réunion d'ouvert. On a aussi

$$\mathring{A} = \left(\overline{A^c}\right)^c \ \dots$$

Exercice

1) Montrez A ouvert $\Rightarrow A \subset \mathring{A}$

donnez un exemple où $A \neq \mathring{A}$.

2) Mq $\overset{\circ}{\overline{B(x,R)}} = B(x,R)$ pour $R > 0$

7. Equivalence de normes

On dira que deux normes $\| \ \|^0$ et $\| \ \|^1$ sont équivalentes si il existe A et B positifs tels que $\forall u \in E$ on a

$$\|u\|^0 \leq A\|u\|^1$$
$$\|u\|^1 \leq B \cdot \|u\|^0$$

Exemples

1) les normes $\| \ \|_\infty$, $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_1 \leq n\|u\|_\infty \leq n\| \ \|_2 \leq \sqrt{n} \cdot n \|u\|_\infty$$

2) les normes $\| \ \|_\infty$, $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ ne sont pas équivalentes sur $C([0,1],\mathbb{R})$: montrez qu'il existe une suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|f_n\|_1 = 1$ et $\|f_n\|_\infty \to \infty$, on pourra prendre $f_n(x) = n f(nx)$ pour $f(x) = (1-x)$ si $x \in [0,1]$, 0 pour $x > 1$.

Proposition . Soit $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ deux normes équivalentes alors

1) U voisinage pour $\| \ \|_1 \Leftrightarrow U$ voisinage pour $\| \ \|_2$

2) $\lim_{n\to\infty} u_n = y_0$ (pour $\| \ \|_1$) $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = y_0$ (pour $\| \ \|_2$)

◀ Notons B_i la boule pour $\| \ \|_i$

Si $y \in B_1(x,R)$, alors $\|x-y\|_1 \leq R$. Donc $\|x-y\|_2 \leq \|x-y\|_1 A \leq AR$

Donc $B_1(x,R) \subset B_2(x,AR)$. Ceci démontre 1

Pour 2 ; $\|x_n - y\|_2 \leq A \cdot \|x_n - y\|_1$. Donc si $\|x_n - y\|_1 \to 0$

Alors $\|x_n - y\|_2 \to 0$. On peut aussi utiliser le fait que la limite ne dépend que de la notion de voisinage et 1 ▶