Extrema et points critiques

1. Definitions

Soit $f : U \subset E \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert, E un e.v.n et f une fonction continue

(i) le point x_0 est un maximum de f si $\forall y \in x_0, f(y) \leqslant f(x_0)$

(ii) x_0 est un maximum strict si de plus $f(y) < f(x_0)$ si $y \neq x_0$

(iii) le point x_0 est un maximum local de f si $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que x_0 est un maximum de f sur V.

On parle bien sûr de maximum local strict. Enfin, par symétrie, on definit les notions de mimum, local et strict.

Un extremum (local, strict) est un point qui est soit un minimum, soit un maximum (local, strict)

Pour les fonctions à une variable on rappele le théorème

Théorème

si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors

(i) x extremum local $\Rightarrow f'(x) = 0$

(ii) x minimum local $\Rightarrow f'(x) \geqslant 0$

(iii) $f''(x) > 0$ et $f'(x) = 0 \Longrightarrow x$ maximum local strict

2. Points critiques et la differentielle.

Le resultat est l'analogue à plusieurs variables de (i)

Théorème A

Soit $f : U \subset E \to \mathbb{R}$, ou U est ouvert, f continue et differentiable en x_0

Alors : x_0 extremum local de $f \Rightarrow D_x f = 0$

◀ Supposons pour simplifier que x_0 est un maximum local de f.

Soit V l'ouvert $\subset U$ tel que x_0 est un maximum de f sur V.

Soit $u \in E$, et $\lambda_u : \mathbb{R} \to E$; $t \mapsto x_0 + tu$.

Comme λ_u est continue, il existe $\alpha > 0$ tq $\lambda_u^{-1}(V) \supset]-\alpha, \alpha[$

Alors soit $g_u :]-\alpha, \alpha[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto g_u(x_0 + tu)$

On a maintenant

(*) $\{$ 0 est un maximum de g_u sur $]-\alpha, \alpha[$

■ En effet : $\forall s \in]-\alpha, \alpha[$; $g_u(s) = f(\underbrace{x_0 + su}_{\in V}) \leqslant f(x_0) = g_u(0)$ ■

Nous en déduisons que $g_u'(0) = 0$. Or $g_u'(0) = D_{x_0} f(u)$.

Donc $\forall u$, $D_{x_0} f(u) = 0$, Ainsi $D_{x_0} f = 0$ ▶

La définition suivante devient intéressante

Soit $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Un point x de U est un point critique de f si $D_x f = 0$. Le nombre $f(x)$ est alors une valeur critique.

Ex. (recherche de points critiques)

On considère $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2x^2 y$

Recherchez les points critique de f revient à resoudre le systeme d'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{c'est à dire} \quad \begin{cases} 4x + 4yx = 0 \\ 2y + 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x^3 = 0 \\ y = -x^2 \end{cases}$$

On obtient donc 3 pts critiques $(0,0)$ $(-1,-1)$ $(1,-1)$.

3. Différentielle seconde

Petit rappel d'algèbre lineaire. Soit q une forme quadratique sur un e.v La forme q est

a) positive si $\forall u,\ q(u) \geq 0$, negative si $\forall u,\ q(u) \leq 0$

b) definie positive si $\forall u \neq 0,\ q(u) > 0$ definie negative si $\forall u \neq 0,\ q(u) < 0$

Si E est de dimension finie et $\| \ \|$ une norme sur E

Alors $\{$ Si q est definie positive, $\exists c > 0$ tel que $\forall u,\ q(u) \geq c\|u\|^2$

◀ en effet $u \mapsto \sqrt{q(u)}$ est une norme sur E et toutes les normes sont equivalents ▶

Nous avons deux theorèmes qui généralisent la situation a 1-variable

On rappelle que la Hessienne $H_{x_0}f$ de f en x_0 est la forme quadratique $u \mapsto D^2_x f(u,u)$

Théorème B

Soit $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ où U est ouvert.

Si x est un minimum local de f ; alors la Hessienne de f en x est positive

◀ On a vu que si x est un mimimum local de f alors 0 est un minimal local de g_u

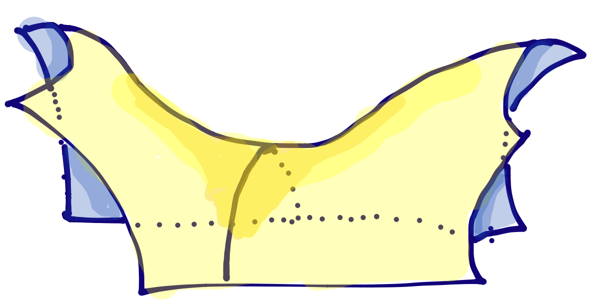
où $g_u(t) = f(x_0 + tu)$. Dès lors $g''_u(0) \geq 0$. Or $g''_u(0) = D^2_x f(u,u)$.

Donc, ceci etant vrai pour tout u, la Hessienne est positive ▶

Ex : Soit $g(x,y) = x^2 - y^2 + x^2 y$. On voit que $(0,0)$ est un point critique de g

et $H_{(0,0)}g(X,Y) = X^2 - Y^2$. En particulier $H_{0,0}\,g(0,1) < 0$ et $H_{0,0}\,g(1,0) > 0$

$(0,0)$ n'est donc ni un maximum, ni un minimum local de g.



Voici une approximation du graphe de g. On dit que le point critique x est une selle, ou un col.

Le deuxième théorème est le suivant

Théorème C

Soit x_0 un point critique de f pour lequel on a l'inégalité

$$\forall u \in E, \quad D^2_x f(u,u) \geqslant C\|u\|^2 \quad \text{où } C>0 ;$$

Alors x_0 est un minimum local strict de f.

◀ On écrit le developpement limité de Taylor — Young à l'ordre 2 en x_0

$$f(x+u) = f(x) + \underbrace{D_x f(u)}_{=0} + \frac{1}{2} D^2_x f(u) + g(u)$$

avec $g(u) \in o(\|u\|^2)$. En particulier, $\exists \alpha > 0$ tel que

$$\|u\| < \alpha \Longrightarrow |g(u)| < \frac{C}{4}\|u\|^2$$

Alors, si $\|u\| < \alpha$

$$f(x_0+u) - f(x_0) = \frac{1}{2} D^2_x f(u,u) + g(u) \geqslant \frac{1}{2} C\|u\|^2 - \frac{C}{4}\|u\|^2 = \frac{C}{4}\|u\|^2 \geqslant 0$$

Donc si $y \in B_{x_0}(\alpha)$ et $x_0 \neq y$, alors $f(y) - f(x) > 0$ [En posant $u = y - x$]

Ainsi x_0 est un minimum local strict de f ▶

Corollaire

Soit E de dimension finie ; Soit $f : U$ ouvert $\subset E \to \mathbb{R}$ et 2x différentiable en $x_0 \in E$. Si x_0 est un point critique de f et la hessienne de f en x est definie positive, alors x_0 est un minimum local strict de f.

On obtient les résultats similaire pour maximalité par symétrie (ou en remplaçant f par $-f$)

Ex : On a vu que $(0,0)$, $(1,-1)$ et $(-1,-1)$ sont points critiques de $f(x,y) = 2x^3 + y^2 + 2x^2 y$
Les hessiennes sont respectivement les formes quadratiques $2X^2 + Y^2$ (definie positive)
$2Y^2 + XY$ (ni positive, ni négative) ; $2Y^2 - 2XY$ (ni positive, ni négative)
On obtient donc un seul minimum local (en $(0,0)$) et aucun maximum local.