A : On considère la fonction $f(x,y) = xy(x+y-1)$.

1- les points critiques sont donnés par le système

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = y(2x+y-1)$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = x(2y+x-1)$$

la première équation donne $y=0$ ou $2x+y-1=0$

- Si $y=0$; alors $x(x-1)=0$ donc $x=0$ ou $x=1$
- Si $y\neq 0$, alors $y=1-2x$; donc en repartant

$$0 = x(2-4x+x-1) = x(1-3x)$$

On obtient $x=0$, $y=1$

ou $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{3}$

Au total nous avons 4 pts critiques $m_1=(0,0)$; $m_2=(1,0)$; $m_3=(0,1)$; $m_4=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

2- la Hessienne de f est

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y-1 \\ 2x+2y-1 & 2x \end{pmatrix}$$

a) en m_1, la hessienne vaut $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ de déterminant <0 donc de signature $(1,1)$

m_1 est un point selle

b) en m_2, la hessienne vaut $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant <0 donc de signature $(1,1)$

m_2 est un pt selle

c) en m_3 la hessienne vaut $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de déterminant <0 donc de signature $(1,1)$

m_3 est un pt selle

d) en m_4 la hessienne vaut $\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ de déterminant >0 et de trace >0 donc de signature $(2,0)$; m_4 est un minimum local.

B. le cercle unité est donné par $S = h^{-1}(1)$ ou $h(x,y) = x^2+y^2$. Comme $D_{x,y}h \neq 0$, $\forall x,y \in S$; on peut appliquer le théorème des extrema liés. les points critiques de f restreinte à S sont donnés par les points m tels que $d_m f = \lambda d_m h$, par un certain λ.

1. On cherche donc à resoudre le système

$$\frac{1}{2} + y^2 = 2\lambda x \quad (1)$$

$$2xy = 2\lambda y \quad (2)$$

$$x^2+y^2 = 1 \quad (3)$$

De (2) on tire les deux cas

- $y = 0$, et alors $x = \pm 1$ de (3)
- $y \neq 0$, et alors $\lambda = x$, ce qui donne par (1)

$\frac{1}{2} + y^2 = 2x^2$; comme $y^2 = 1 - x^2$, on obtient $x^2 = \frac{1}{2}$

On donc $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

On obtient donc 6 pts critiques dont nous présentons les valeurs dans le tableau

$(1,0)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	x
1	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$f(x)$

on a $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$. Donc le maximum global de f sur S est atteint en $(1,0)$ par la valeur 1, le minimum en $(-1,0)$ par la valeur -1

3- On recherche les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ ils sont donnés par les equations

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

système qui n'a pas de solutions. la fonction f n'a donc pas de pts critiques

. le minimum et maximum de f sont donc obtenus sur le bord en $(-1,0)$ et $(1,0)$ respectivement.

C : On considère la fonction

1- $F(\phi,\psi,x) = (\phi+\psi+e^{x\phi}+x-1\,,\,x+1-e^{\phi-\psi})$

la différentielle de $\phi,\psi \to F(\phi,\psi,0)$ a par jacobienne en $(0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ de déterminant 2 donc inversible.

Comme $F(0,0,0)=0$, l'application du TFI nous donne l'existence au $\mathcal{V}(0)$ de fonctions ϕ et ψ tels que $F(\phi(x),\psi(x),x)=0$.

2- En dérivant l'égalité énoncée par rapport à x on obtient

$$(*)\quad \begin{cases} \phi'(x)+\psi'(x)+1+[\phi(x)+x\phi'(x)]e^{x\phi(x)}=0 \\ 1-[\phi'(x)-\psi'(x)]e^{\phi(x)-\psi(x)}=0 \end{cases}$$

ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} \phi'(0)+\psi'(0)+1=0 \\ \phi'(0)-\psi'(0)-1=0 \end{cases}$$

dont les solutions sont $\phi'(0)=0\ ,\ \psi'(0)=-1$

3. En dérivant une deuxième fois $(*)$ on obtient

$$\begin{cases} \phi''+\psi''+[\phi+x\phi']^2e^{x\phi}+[2\phi'+x\phi'']e^{x\phi}=0 \\ -(\phi''-\psi'')e^{\phi-\psi}+(\phi'-\psi')^2e^{\phi-\psi} \end{cases}$$

ce qui donne en (0) $\quad \phi''(0)+\psi''(0)=0$

$$-\phi''(0)+\psi''(0)+1=0$$

donc $\phi''(0)=\frac{1}{2}$; $\psi''(0)=-\frac{1}{2}$.

D. la jacobienne de f est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(x+y) & \frac{1}{2}\cos(x+y) \\ -\frac{1}{2}\sin(x-y) & \frac{1}{2}\sin(x-y) \end{pmatrix}$$

2. On a ensuite

$$\| D_{x,y} f(u,v) \|^2 = \left(\frac{1}{4}\cos^2(x+y)(u+v)^2 \right) + \frac{1}{4}\sin^2(x-y)\,(u-v)^2$$
$$\leqslant \frac{1}{4}(u+v)^2 + \frac{1}{4}(u-v)^2 = \frac{1}{2}(u^2+v^2) = \frac{1}{2}\|(u,v)\|^2$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors

$$\| f(a) - f(b) \| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \| a - b \|$$

3. Si $f(a) = a$ et $f(b) = b$; alors $\|a-b\| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\|a-b\|$ donc $\|a-b\| = 0$. Ainsi $a = b$