Existence d'applications harmoniques tordues à valeurs dans les variétés à courbure négative.

François LABOURIE

Ce papier fait suite à une suite d'articles ([D],[C]), étudiant les applications harmoniques tordues. Le problème est le suivant:

On se donne une variété N, dont le revêtement universel est $\bar{N}$, une variété M simplement connexe à courbure négative ou nulle, et une représentation ρ de $\pi_1(N)$ dans le groupe des isométries de M. Une application tordue par ρ est alors une application de $\bar{N}$ dans M ρ-équivariante, ce qui peut s'interpréter comme une section du M-fibré plat de base N et associé naturellement à ρ. Il s'agit maintenant d'obtenir une condition sur $Im(\rho)$ permettant d'assurer l'existence d'une application harmonique tordue par ρ. Par exemple, $Im(\rho)$ cocompact suffit selon les résultats célèbres de Eells et Sampson [E.S].

Le résultat principal de Corlette répond à cette question dans le cas où M est un espace riemannien symétrique de type non compact:

Théorème. (Corlette) *Il existe une application harmonique tordue par ρ à valeur dans G/K si et seulement si $Im(\rho)$ est un sous-groupe réductif de G.*

Corlette utilise ce résultat comme un point de départ de sa théorie de la superrigidité. Dans ce même article, il s'interroge sur une possible généralisation de ce résultat et une démonstration plus reliée à la géométrie des variétés à courbure négative. Nous nous proposons ici d'en donner une extension, modulo une condition sur la cible M, à laquelle on demande d'être *sans demies-bandes plates* (1.1.). Cette condition, quoique restrictive, est satisfaite par exemple dans le cas des variétés analytiques reélles ou des variétés à courbure strictement négative. Moyennant une définition géométrique de la condition de réductivité (1.3.), nous obtenons la généralisation suivante du théorème de Corlette:

Théorème. *Si M est sans demies-bandes plates, il existe une application harmonique tordue par ρ, si et seulement si $Im(\rho)$ est un sous-groupe réductif des isométries de M.*

Remarquons, que la condition de réductivité reste suffisante si l'on supprime l'hypothèse "sans demies-bandes plates" (3.6.).

La démonstration de Corlette repose sur l'étude d'une équation d'évolution sur la connexion induite sur un fibré associé. La nô tre réutilise les résultats de

[E.S], et la géométrie des variétés à courbure négative ou nulle (sphère à l'infini, horosphères et flots horosphériques), telle qu'elle est étudiée dans [E.O] et [B.G.S] par exemple.

1 Définitions

Les variétés à courbure négative ou nulle qui nous intéressent sont celles qui satisfont au critère suivant:

1.1 Bandes plates. Une variété simplement connexe à courbure négative ou nulle est dite *sans demies-bandes plates*, si tout champ de Jacobi, défini le long d'une géodésique, dont la norme est constante pour les temps supérieurs à un temps donné, a une norme constante pour tout temps.

1.2 Remarques.

(i) Cette propriété est la version infinitésimale de la propriété suivante: toute demie-bande plate peut être étendue en une bande plate entière.

(ii) Les variétés à courbure strictement négative, les variétés analytiques réelles et en particulier par les espaces symétriques sont sans demies-bandes plates.

Nous allons finir de donner les définitions nécessaires à l'énoncé de notre résultat en définissant un

1.3 Groupe réductif. Un sous-groupe G du groupe des isométries d'une variété simplement connexe M à courbure négative ou nulle est *réductif* s'il existe un convexe fermé C de M, fixé globalement par G, tel que

- le convexe C est isométrique à $C_1 \times E$, où E est euclidien,
- G se décompose en $G = G_1 \times G_2$, G_1 agissant isométriquement sur C_1 et G_2 sur E.
- G_1 ne fixe pas de point à l'infini de C_1.

1.4 Remarques.

(i) Dans le cas où M est analytique réelle, on peut remplacer le mot convexe, par l'expression totalement géodésique et complet (ce qui inclut les points...);

(ii) Dans le cas où M est à courbure strictement négative, un sous-groupe est réductif exactement dans les cas suivants:

- il ne fixe pas de point à l'infini de M,
- il fixe globalement une géodésique.

Autrement dit, dans ce cas, un groupe est non réductif si et seulement si il fixe un unique point à l'infini.

2 Dans un sens.

Dans cette section, nous allons démontrer, en utilisant les notations de l'introduction, que s'il existe une application harmonique f, tordue par ρ, de $\bar{N}$ dans M, alors $G = Im(\rho)$ est un sous-groupe réductif des isométries de M.

Soit donc p le plus grand entier tel qu'il existe un convexe fermé C de M, fixé globalement par G, vérifiant

- C est isométrique à $C_1 \times E$ où E est euclidien de dimension p, (On identifiera C_1 à un convexe de M)
- G se décompose en $G = G_1 \times G_2$, G_1 agissant isométriquement sur C_1 et G_2 sur E.

Nous voulons montrer que G_1 ne fixe pas de point à l'infini de C_1.

Démontrons tout d'abord le

2.1 lemme. *Soit π la projection sur le convexe C_1, et ρ_1 la représentation de $\pi_1(N)$ induite par ρ et la projection de G sur G_1, alors $\pi \circ f$ est une application harmonique de $\bar{N}$ dans C_1, tordue par ρ_1*

Preuve: Nous allons tout d'abord montrer que si π_0 est la projection convexe sur C, alors $g_0 = \pi_0 \circ f$ est harmonique. Remarquons premièrement que, la fonction distance à un convexe étant convexe en courbure négative ([B.G.S]), sa restriction à $f(\bar{N})$ est contante. Autrement dit f est à valeur dans l'hypersurface S_{t_0} bord du convexe

$$C_{t_0} = \{m \in M / d(m, C) \leq t_0\}.$$

Notons $g_t = \pi_t \circ f$, ou π_t est la projection sur C_t et remarquons que ces applications sont toutes tordues par ρ.

Soit u un vecteur tangent à $\bar{N}$ en x et $v_t = Dg_t(u)$, par construction v_t est un champ de Jacobi le long de la géodésique $g_t(x)$.

M étant à courbure négative et la projection sur un convexe étant contractante, nous en déduisons que la norme de v_t est convexe et croissante. Par ailleurs, f étant harmonique, nous en déduisons que cette fonction à une dérivée nulle en $t = t_0$ et donc qu'elle est constante.

Les vecteurs $Dg_t(u)$ sont donc des champ de Jacobi parallèles, ce qui entraîne que le champ, défini le long de la géodésique $g_t(x)$, des vecteurs de tension des g_t est parallèle et donc constamment nul, puisque f est harmonique.

Dès lors g_t est harmonique pour tout t.

Maintenant, il est clair que la projection $g = \pi \circ f$ est harmonique et tordue par ρ_1. ■

Terminons notre preuve en raisonnant par l'absurde. Supposons que G_1 fixe un point à l'infini sur C_1 et soit ϕ_t le flot géodésique associé à ce point à l'infini. Par construction, il est invariant par G_1, et donc les applications $g_t = \phi_t \circ g$ sont tordues par ρ_1.

Notons à nouveau $v_t = Dg_t(u)$, où u est un vecteur tangent à $\bar{N}$. Comme dans le lemme précedent , v_t est un champ de Jacobi dont la norme est une fontion convexe et décroissante. Or à nouveau comme g est harmonique nous en déduisons que la dérivée de cette norme est nulle en $t = 0$.

Ceci entraîne que cette norme est constante pour tout temps positif, et donc que, M étant sans demies-bandes plates, cette norme est contante pour tout temps.

Dès lors si x et y deux points de $\bar{N}$, les géodésiques $g_t(x)$ et $g_t(y)$ sont parallèles. Nous en déduisons que l'ensemble F des géodesiques parallèles à $g_t(x)$ est stable par G_1. Or d'après [B.G.S], cet ensemble est isométrique à $C_2 \times \mathbf{R}$, où C_2 est un convexe de M. Par ailleurs G_1 commute avec les translations sur le facteur euclidien (c'est le flot horocyclique) et tout ceci entraine donc que la décomposition initiale associée à la réduction de G peut se poursuivre et donc que p n'est pas le plus grand entier possible.

Ceci nous fournit notre contradiction.

3 Dans l'autre sens.

Nous allons maintenant démontrer que si $Im(\rho)$ est réductif, il existe une application harmonique tordue par ρ de $\bar{N}$ dans M.

Ce résultat découlera bien évidemment des deux lemmes suivants, qui tout deux partent de la même idée que celle de la démonstration de Donaldson dans [D].

3.1 Lemme A. *Soit C un convexe fermé d'une variété à courbure négative, si $Im(\rho)$ preserve C et ne fixe pas de points à l'infini de C, alors il existe une application harmonique tordue par ρ.*

3.2 Lemme B. *Si M est plate, alors il existe une application harmonique tordue par ρ.*

3.3 Remarque. le point de départ de ces deux lemmes, est l'utilisation, comme dans [E.S] et [D], de l'équation d'évolution:

$$(*) \qquad \frac{\partial f_t}{\partial t} = -d^*_\nabla(Df_t),$$

où d^*_∇ désigne l'adjoint de la dérivation extérieure des 1-formes de $\bar{N}$ à valeurs dans $f^*(TM)$, associée aux connexions de Levi-Cività de M et N.

Partant d'une application f_0 de $\bar{N}$ dans M tordue par ρ (qui existe toujours puisque M est contractile), Donaldson remarque que la méthode d'Eells et Sampson s'applique sans plus de travail, et que l'on en déduit l'existence d'une solution de $(*)$ tordue par ρ, pour tout temps t appartenant à $[0, \infty[$. De plus $\mid Df_t \mid$ est bornée uniformément pour tout temps.

Enfin, si f_t converge uniformément vers une application f_∞, celle ci est harmonique.

Cette remarque initiale va nous permettre de démontrer aisément nos lemmes.

3.4 Preuve du lemme A. Comme le convexe C est contractile, nous pouvons supposer que f_0 est à valeurs dans C. Remarquons que la solution f_t de $(*)$ est alors à valeurs dans C pour tout temps.

En effet, la fonction distance d_C à C est convexe. Ceci entraîne que, si g_t est la fonction $f^*(d_C)$, elle satisfait à

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} \leq -\Delta g_t.$$

Dès lors,

$$\frac{d}{dt}\int_N g_t ds \leq 0.$$

Enfin puisque g_t est positive et g_0 est nulle, nous en déduisons que g_t est toujours nulle.

Raisonnons maintenant par l'absurde, s'il n'existe pas d'application harmonique, notre remarque initiale entraîne que si x_0 est un point de $\bar{N}$, il existe une suite (t_n) tendant vers l'infini telle que $(f_{t_n}(x_0))$ tende vers un point y de la sphère à l'infini de M.

Si maintenant $g = \rho(h)$ est un élément de $Im(\rho)$, puisque f_t est uniformément lipschitzienne, nous avons

$$d(g(f_{t_n}(x_0)), f_{t_n}(x_0)) = d(f_{t_n}(h(x_0)), f_{t_n}(x_0))$$

uniformément bornée.

Ceci entraîne que $g(y) = y$ et la contradiction.

3.5 Preuve du lemme B. Dans le cas où M est euclidienne, les points à l'infini s'identifient aux directions. Identifions M à $\mathbf{R}^n$, et décomposons

$$M = E \oplus E^\perp,$$

où E est l'espace des translations qui commutent à $Im(\rho)$.

A nouveau, nous partons d'une application f_0 à valeurs dans M et tordue par ρ. Soit x_0 un point de $\bar{N}$, f_t la solution de $(*)$. Soit enfin, (t_n) une suite de réels tendant vers l'infini et (u_n) une suite de vecteurs de E, telles que la suite de points

$$z_n = f_{t_n}(x_0) + u_n$$

appartienne à $E^\perp$ et converge, éventuellement vers un point à l'infini.

Raisonnons à nouveau par l'absurde. S'il n'existe pas d'application harmonique, notre remarque initiale entraîne, comme précédemment, que (z_n) tend vers un point de la sphère à l'infini de $E^{\perp}$.

Ce point à l'infini determine une direction dont un vecteur directeur est, disons, v. Comme précédemment, on montre que le flot horocyclique, c'est à dire ici la translation, associé à v commute avec le groupe.

Et nous avons la contradiction car alors v appartient à E. ∎

3.6 Remarques. Nous n'avons utilisé nulle part dans cette partie de la démonstration notre hypothèse supplémentaire sur M ce qui nous permet de remarquer que la condition de réductivité est suffisante dans tous les cas (à courbure négative ou nulle) pour assurer l'existence d'une application harmonique.

[B.G.S] W.Ballman,M.Gromov,V.Schroeder, *Manifolds of non-positive-curvature,* Birkhauser studies (1985)

[C] K.Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics,* ä paraître in J. Diff. Geo.

[D] S.K.Donaldson, *Twisted harmonic maps and the self-duality equations,* Proc. London Math. Soc. (3)55(1987), 127-131

[E.O] P.Eberlein and B.O'Neill, *Visibility manifolds,* Pac. J. Math. 46 (1976) 43-110

[E.S] J.Eells and J.H.Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds,* Amer. J. Math. 86 (1964) 109-160

François Labourie
Equipe de Topologie et Dynamique
Université Paris-Sud
F-91405 Orsay
URA 1169 du C.N.R.S.