Séance 3 : Initiation aux éléments finis 2D

Pour pouvoir faire ce TD facilement, il faut prendre à l'adresse

http://www.inln.cnrs.fr/~laure/EF/TD2/Seance3/index.html

les fichiers suivant :

- `Q1.sci, Q2.sci, P1.sci`; fonctions qui donne les fonctions de Lagrange pour les éléments $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$ et $\mathbf{P_1}$.
- `gauss.sci`; une fonction qui donne les points de Gauss pour l'intégration numérique.
- `maillage_2D_?.sci`; des fonctions qui donnent le maillage d'un carré par des quadrangles et des triangles.
- `cal_indice.sci, interpol.sci, trace_maillage_2D.sci, trace_u_2D.sci`; des fonctions qui permettent de tracer le maillage et la solution u.

On va utiliser le fichier `seance3.sci` qui devrait ressembler au programme écrit à la deuxième séance. Les instructions d'assemblage ont été légèrement modifier pour tenir compte de la structure creuse de la matrice globale. Le travail consistera à ajouter les instructions permettant de calculer le système élémentaire pour un problème bidimensionnel.

Ex 1 *Ecoulements de Poiseuille*

On veut résoudre

$$-\Delta u = 1 \quad \text{sur un carré} \quad [0,1]\times[0,1]$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(0,y) \;=\; u(1,y) \;=\; u(x,0) \;=\; u(x,1) \;=\; 0 \tag{1}$$

en utilisant des éléments $\mathbf{Q_2}$ (programme `Q2.sci`).

1) Ecrire la forme variationnelle de l'équation et le système élémentaire à résoudre sur chaque élément.

2) On utilise des quadrilatères comme éléments (cf. `maillage_2D.sci` et `trace_maillage_2D.sci` pour tracer ce maillage). Détailler le calcul de la matrice jacobienne qui correspond à la transformation linéaire du quadrilatère de référence vers un quadrilatère quelconque. Ecrire les instructions correspondantes.

3) La matrice `CONNEC` et le vecteur `COOR` sont donnés par la fonction `maillage_2D.sci`. La matrice `ADRESS` et le vecteur `NUMER` sont calculés pour les conditions aux limites (1) dans le fichier `seance3.sci`. Ecrire les instructions qui permettent de calculer le système élémentaire (les matrices `A_el` et `F_el`) en complétant le fichier `seance3.sci`.

4) Ecrire une fonction scilab qui calcule le débit de la solution u (c'est à dire $\int_0^1 \int_0^1 u\,dx\,dy$)

5) Modifier le calcul de `NUMER` pour avoir des conditions de Neumann pour $x=0$ et $x=1$. Vérifier que la solution trouvée ne dépend pas de x et est égal à $u(y) = y(1-y)/2$.

Ex 2 *Solution analytique*

Pour tester les différents maillages, on résoud un problème pour lequel on connaît une solution analytique. On considère l'équation sur $\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$$-\Delta u \; + \; 3u \; = \; 0$$

et on peut montrer que $u(x,y) = e^{2x}\sin(y)$ est une solution si on ajuste correctement les conditions aux limites sur les bords.

1) Ecrire la formulation faible de ce problème.

2) En adaptant les programmes écrits à l'exercice précédents et les différentes fonctions `maillage_2D_?.sci` tester les élements $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$ et $\mathbf{P_1}$. On peut comparer l'erreur entre la solution calculée et la solution analytique.