Correction 4 : Programmation modulaire - Problème non linéaires

Ex 1 *Ecoulement de Poiseuille*

1)

En 1D l'équation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\nabla P$$

La formulation faible

$$\int \mu \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\, dx \quad = \quad \nabla P \int w\, dx \tag{1}$$

3.1)

Si on utilise une méthode du point fixe, pour calculer u^{n+1} à partir de u^n, on doit résoudre

$$\int_0^1 \mu(u^n)\ \ \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\, dx = \nabla P \int_0^1 w\, dx$$

ce qui donne pour le calcul de la matrice élémentaire le programme suivant

```
function [A_el,F_el] = cal_Melm_1D_a(iel,gradP,U);
//
   global CONNEC COOR NUMER ADRESS UC Nelt Nno Npt NI;
   global XG PG Ng;
//
   x  = COOR(CONNEC(iel,:),1)

   A_el = zeros(Nno,Nno); F_el = zeros(Nno,1);

   U_el= U(ADRESS(iel,:));

   jac = (x(2) - x(1))/2.;

   for ig=1:Ng    //  boucle pour l'integration numerique
      xg = XG(ig);
//
      [FP,DxiFP] = P2(xg);
      DxFP = DxiFP/jac;

      gp =  abs(U_el'*DxFP);
      mu = cal_mu(gp);

      for i=1:Nno
         F_el(i) = F_el(i) + PG(ig)*gradP*FP(i)*jac;
         for j=1:Nno
            A_el(i,j) = A_el(i,j) + mu * PG(ig) * DxFP(j) * DxFP(i) * jac;
         end;
      end;
   end;
endfunction
```

3.2)
La méthode du point fixe correspond aux instructions suivantes

```
//  on calcule la solution par une methode de pt fixe
//
function U = cal_sol_ptfixe(cal_Melm,gradP,U)
//
//
    eps = .0001; h = .01; imax = 50;

    U0 = cal_sol_lin(cal_Melm,gradP,U);

   i = 0;
   while norm(U-U0) >= eps & i <= imax
         i = i + 1;
         U0 = U;
         U = cal_sol_lin(cal_Melm,gradP,U0);

         trace_u_1D(U,1);
         fprintf(%io(2),'i = %3i ; ||U-U0|| = %f',i,norm(U-U0));

   end;


endfunction
```

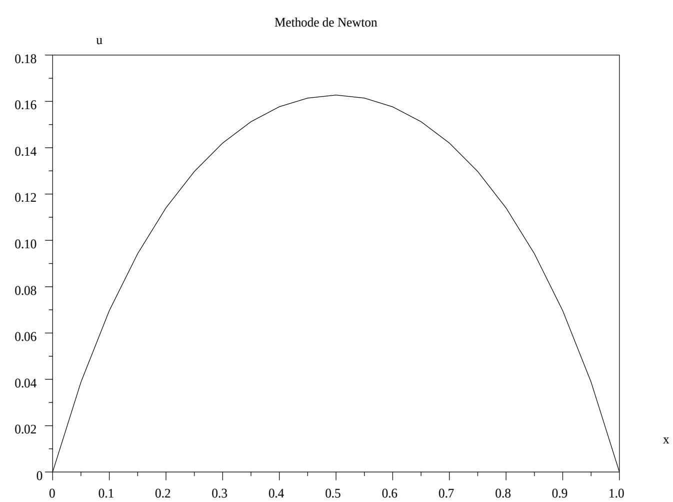

FIG. 1 – Ecoulement de Poiseuille pour $\mu_0 = 1.$, $\lambda = 2.$, $m = .2$ et $a = 2.$

3.3)
Si on utilise une méthode de Newton, $u^{n+1} = u^n + \delta u$, où u^n a été calculé à l'étape n et δu est solution de l'équation (1) "linéarisée",

$$\int_0^1 \left(\mu(u^n)\ \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}\ \frac{\partial w}{\partial x} + \mu'(u^n)\ sgn(\partial_x u^n)\ \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}\ \frac{\partial u^n}{\partial x}\ \frac{\partial w}{\partial x} \right)\ dx \tag{2}$$

$$= \nabla P \int w \; dx - \int_0^1 \mu(u^n) \; \frac{\partial u^n}{\partial x} \; \frac{\partial w}{\partial x} \; dx$$

avec

$$\mu' = \mu \frac{(m-1) \; (\lambda\dot{\bar{\epsilon}})^a}{\dot{\bar{\epsilon}} \; (1 + (\lambda\dot{\bar{\epsilon}})^a)} \tag{3}$$

ce qui donne pour le calcul du système élémentaire le programme suivant

```
function [A_el,F_el] = cal_Melm_1D_b(iel,gradP,U);
//
   global CONNEC COOR NUMER ADRESS UC Nelt Nno Npt NI;
   global XG PG Ng;
//
   zero = 0.001;
   x  = COOR(CONNEC(iel,:),1)

   A_el = zeros(Nno,Nno); F_el = zeros(Nno,1);

   U_el= U(ADRESS(iel,:));

   jac = (x(2) - x(1))/2.;

   for ig=1:Ng    //  boucle pour l'integration numerique
      xg = XG(ig);
//
      [FP,DxiFP] = P2(xg);
      DxFP = DxiFP/jac;

      gradU = U_el'*DxFP;
      gp = abs(gradU);

      mu = cal_mu(gp);
      mup = sign(gradU)*cal_Dmu(gp);

      for i=1:Nno
         F_el(i) = F_el(i) + PG(ig)*( gradP*FP(i) ...
                                       - mu * gradU  * DxFP(i) ) *jac;
;
         for j=1:Nno
            A_el(i,j) = A_el(i,j) +  ...
                        PG(ig)* (mu  * DxFP(j) * DxFP(i) + ...
                                 mup*DxFP(i)* gradU *DxFP(j) ) * jac;
         end;
      end;
   end;
endfunction
```

Pour la méthode de Newton, on modifie legèrement le programme du points fixe :

```
//  on calcule la solution par une methode de Newton
//
function U = cal_sol_newton(cal_Melm,gradP,U)
//
    eps = .0001; h = .01; imax = 50;
```

```
    du = cal_sol_lin(cal_Melm,gradP,U);

    i = 0;
    while norm(du) >= eps & i <= imax
          i = i + 1;
          du =   cal_sol_lin(cal_Melm,gradP,U);
          U = U + du;

         trace_u_1D(U,2);
         fprintf(%io(2),'i = %3i ; ||du|| = %f',i,norm(du));
    end;

endfunction
```

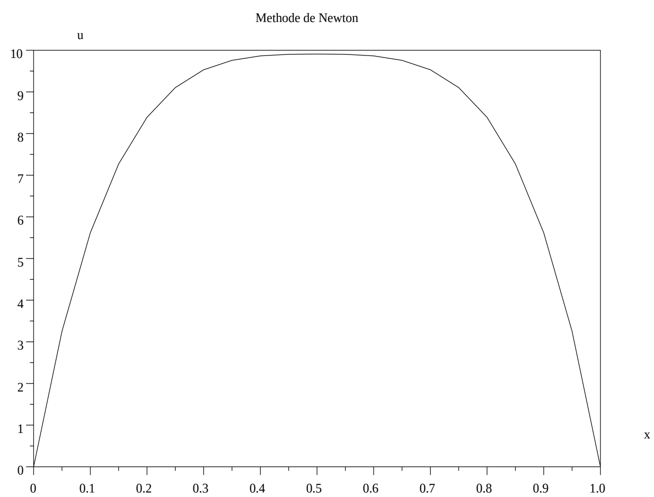

FIG. 2 – Ecoulement de Poiseuille pour $\mu_0 = 1.$, $\lambda = 13.47$, $m = 0.294$ et $a = .381$.

3.2)

On peut remarquer que la méthode de Newton converge plus vite que la méthode du point fixe. En particulier la méthode du point fixe n'arrive pas à calculer l'écoulement de Poiseuille pour le polyéthylène. Les resultats peuvent se resumer dans le tableau suivant :

paramètres	*débit*	*Iter. Mth. pt. Fixe*	*iter. Mth. Newton*
$\mu_0 = 1.$, $\lambda = 2.$, $m = .2$ et $a = 2$	0.114	13	5
$\mu_0 = 1.$, $\lambda = 13.47$, $m = 0.294$ et $a = .381$	7.795	33	8

TAB. 1 – Comparaison du nombre d'itération pour atteindre la solution.

4)

On écrit l'équation sous forme développée :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\nabla P$$

On a la formulation faible

$$
\begin{aligned}
\int \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right] d\Omega \quad &= \quad \nabla P \int w d\Omega + \\
&+ \int_0^1 \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,1)w(x,1) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)w(x,0)\right] \; dx \\
&+ \int_0^1 \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,1)w(1,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0)w(0,y)\right] \; dy
\end{aligned}
$$

avec les conditions aux limites, on a $w(0,y) = w(1,y) = w(x,0) = w(x,1) = 0$ pour la base des fonctions tests.
si μ n'est pas constant on peut trouver une solution avec des méthodes itératives.

La méthode de point fixe :
Si à létape n on connait u^n, la solution u^{n+1} à l'étape suivante est donnée par

$$
\int \mu(u^n) \left[\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right] d\Omega = \nabla P \int w d\Omega
$$

La méthode de Newton :
Si à l'étape n on connait u^n, on note $u^{n+1} = u^n + \delta u$ la solution à l'étape suivante où δu est solution de l'équation linéarisée

$$
\begin{aligned}
\int \left(\mu(u^n) \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \frac{\mu'(u^n)}{\dot{\epsilon}(u^n)} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x}\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y}\frac{\partial u^n}{\partial y}\right] \left[\frac{\partial u^n}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u^n}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right]\right) d\Omega \\
= \nabla P \int w \; d\Omega - \int \mu(u^n) \left[\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right] \; d\Omega
\end{aligned}
$$

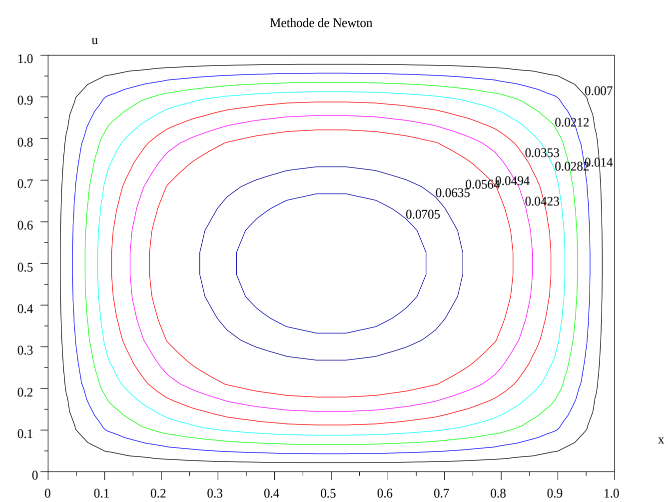

FIG. 3 – Ecoulement de Poiseuille pour $\mu_0 = 1.$, $\lambda = 2.$, $m = .2$ et $a = 2$.

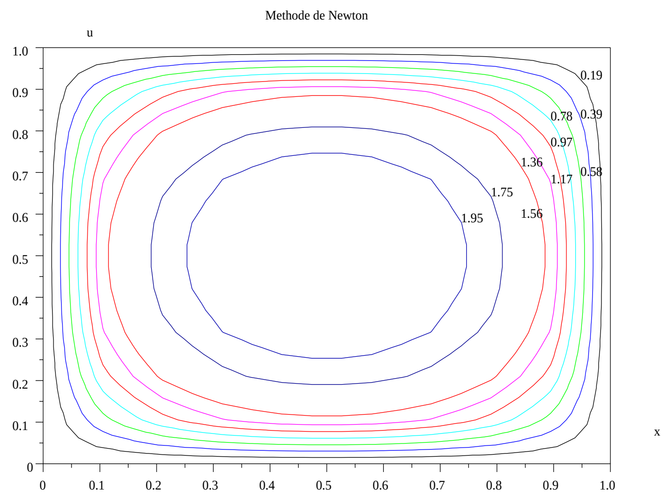

FIG. 4 – Ecoulement de Poiseuille pour $\mu_0 = 1.$, $\lambda = 13.47$, $m = 0.294$ et $a = .381$.

paramètres	*débit*	*Iter. Mth. pt. Fixe*	*iter. Mth. Newton*
$\mu_0 = 1.$, $\lambda = 2.$, $m = .2$ et $a = 2$	0.0385	6	4
$\mu_0 = 1.$, $\lambda = 13.47$, $m = 0.294$ et $a = .381$	1.2826	28	7

TAB. 2 – Comparaison du nombre d'itération pour atteindre la solution avec `Nelt` $= 100$.

4)

On écrit l'équation sous forme développée :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\nabla P$$

On a la formulation faible

$$\begin{aligned}\int \mu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right]d\Omega \quad = \quad & \nabla P\int w d\Omega + \\ & +\int_0^1 \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,1)w(x,1)-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)w(x,0)\right]\ dx \\ & +\int_0^1 \mu\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,1)w(1,y)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)w(0,y)\right]\ dy\end{aligned}$$

avec les conditions aux limites, on a $w(0,y)=w(1,y)=w(x,0)=w(x,1)=0$ pour la base des fonctions tests.
si μ n'est pas constant on peut trouver une solution avec des méthodes itératives.

La méthode de point fixe :
Si à létape n on connait u^n, la solution u^{n+1} à l'étape suivante est donnée par

$$\int \mu(u^n)\left[\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u^{n+1}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right]d\Omega=\nabla P\ \int w d\Omega$$

La méthode de Newton :
Si à l'étape n on connait u^n, on note $u^{n+1}=u^n+\delta u$ la solution à l'étape suivante où δu est solution de l'équation linéarisée

$$\begin{aligned}\int\left(\mu(u^n)\left[\frac{\partial\delta u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial\delta u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right]+\frac{\mu'(u^n)}{\dot{\epsilon}(u^n)}\left[\frac{\partial\delta u}{\partial x}\frac{\partial u^n}{\partial x}+\frac{\partial\delta u}{\partial y}\frac{\partial u^n}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial u^n}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u^n}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right]\right)d\Omega \\ =\nabla P\int w\ d\Omega-\int\mu(u^n)\left[\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u^{n+1}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right]\ d\Omega\end{aligned}$$

paramètres	*débit*	*Iter. Mth. pt. Fixe*	*iter. Mth. Newton*
$\mu_0=1.$, $\lambda=2.$, $m=.2$ et $a=2$	0.0385	6	4
$\mu_0=1.$, $\lambda=13.47$, $m=0.294$ et $a=.381$	1.2826	28	7

TAB. 3 – Comparaison du nombre d'itération pour atteindre la solution avec `Nelt` = 100.

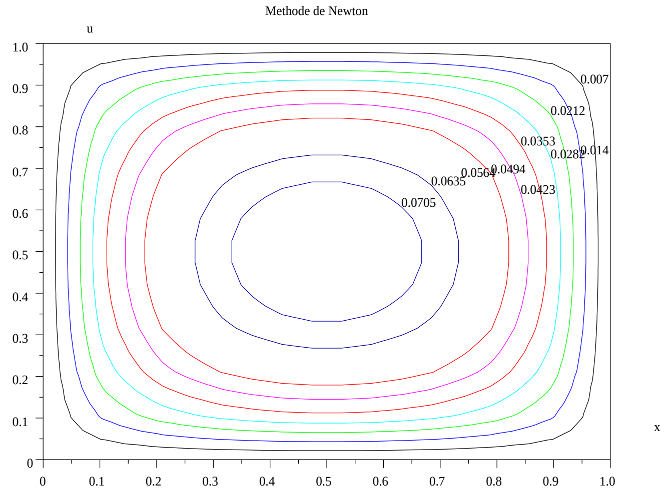

FIG. 5 – Ecoulement de Poiseuille pour $\mu_0 = 1.$, $\lambda = 2.$, $m = .2$ et $a = 2.$

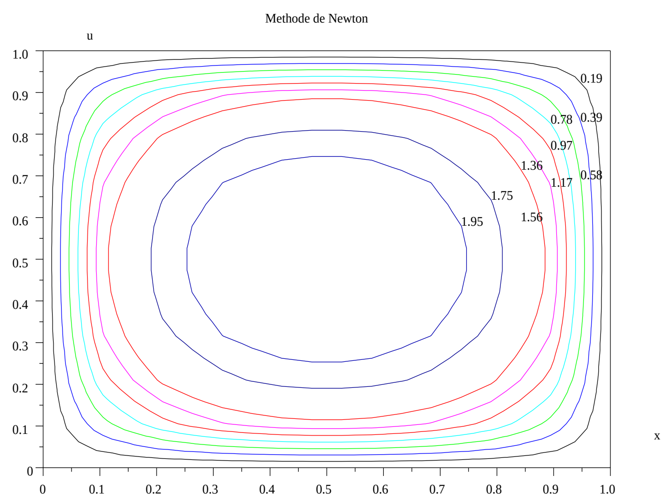

FIG. 6 – Ecoulement de Poiseuille pour $\mu_0 = 1.$, $\lambda = 13.47$, $m = 0.294$ et $a = .381.$