

## Séance 5 : Eléments finis mixtes

Pour faire ce TD, il faut prendre à l'adresse

<http://www.inln.cnrs.fr/~laure/EF/TD2/Seance5/index.html>

les fichiers suivant :

- `Q1.sci`, `Q2.sci` et `P1.sci`; des fonctions qui donnent les fonctions de Lagrange.
- `gauss.sci`; une fonction qui donne les points de Gauss pour l'intégration numérique.
- `maillage_2D_Q?.sci`; les fonctions qui calculent le maillage en 2D par des quadrangles ou des triangles
- `cond_limit_2D.sci`; la fonction qui calcule les matrices UC, NUMER et ADRESS.
- `cal_indice.sci`, `interpol.sci`, `trace_p_2D.sci`, `trace_u_2D.sci`, `trace_vecteur.sci` et `trace_maillage.sci`; pour tracer la solution  $u$ ,  $p$  et le maillage.
- `cal_sol_lin.sci`, `assemblage`; les fonctions qui calcule la solution d'un problème linéaire et fait l'assemblage de la matrice globale.

**Ex 1** *Le problème de Stokes*

On veut résoudre sur un carré  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  :

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad . \quad (1)$$

Pour tester les diverses méthodes, on va travailler sur une solution analytique. si  $\mu = 1$  l'équation (1) se simplifie en  $\Delta u = \nabla p$  et on peut montrer que

$$u_x = e^x (y \sin(y) - \cos(y)) \quad ; \quad u_y = e^x y \cos(y) \quad ; \quad p = 2e^x \cos(y)$$

est une solution du problème si on ajuste correctement les conditions aux limites.

- 1) Ecrire la formulation faible du problème, sachant que  $\sigma = 2\mu \dot{\epsilon}(u) - p\mathbf{I}$ .
- 2) Expliciter le calcul du système élémentaire.
- 3) Le programme `exemple_Q2Q0.sci` calcule la solution de ce problème en utilisant un élément  $\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0$ . Le calcul de la matrice élémentaire s'effectue avec la fonction `cal_Melm_Q2Q0.sci`. Modifier ces programmes pour utiliser l'élément  $\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1$ .
- 4) Vérifier que l'on a une *instabilité en damier* pour l'élément  $\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0$ . Il faut écrire une nouvelle fonction `cal_Melm_Q1Q0.sci` en modifiant l'une des fonctions précédentes.
- 5) Prendre les programmes `exemple_P1P1.sci` et `cal_Melm_P1P1.sci` et vérifier que l'éléments  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_1$  donne une solution admissible pour la vitesse bien qu'il ne vérifie la condition inf-sup.
- 6) Modifier la fonction `cal_Melm_P1P1.sci` pour pour ajouter une bulle (élément  $\mathbf{P}_1^+ - \mathbf{P}_1$ ).

**7)** Le problème de la cavité entraînée :

Calculer la solution de (1) pour les conditions aux limites

$$u_x(x, 0) = u_x(0, y) = u_x(1, y) = 0 \quad ; \quad u_x(x, 1) = 1$$

$$u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = u_y(0, y) = u_y(1, y) = 0$$

Il faut modifier le calcul de UC dans `cond_limit_2D.sci`.