UNIVERSITÉ DE NICE — L2SF
MÉTH. MATH. PHYSIQUE — 2012–2013

TD 1

Fonctions de plusieurs variables réelles

1. Étudier la continuité de la fonction $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
2. Étudier la différentiabilité de la fonction $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.
3. Calculer les derivées partielles des fonctions suivantes :
   (a) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Rép. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
   (b) $z = \arctan(xy)$. Rép : $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2y^2}$.
   (c) $z = \log \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$. Rép. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = +\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.
4. Calculer les différentielles totales des fonctions suivantes :
   (a) $z = x^2 + xy^2 + \sin y$. Rép. $dz = (2x+y^2)dx + (2xy + \cos y)dy$.
   (b) $z = \exp(x^2+y^2)$. Rép. $dz = 2\exp(x^2+y^2)(xdx + ydy)$.
   (c) $u = \tan(3x-y) + 6^{y+z}$. Rép. $du = \frac{3}{\cos^2(3x-y)}dx + \left(-\frac{1}{\cos^2(3x-y)} + 6^{y+z}\log 6\right)dy + 6^{y+z}\log 6 dz$.
5. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $z = u + v^2$, $u = x^2 + \sin y$ et $v = \log(x+y)$.
6. Calculer $\frac{dz}{dx}$ si $z = \sqrt{\frac{1+u}{1+v}}$, $u = -\cos x$ et $v = \cos x$.
7. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $z = \exp(u - 2v)$, $u = \sin x$ et $v = x^3 + y^2$.
8. Calculer $\frac{dz}{dx}$ si $z = \arcsin(u+v)$, $u = \sin x \cos\alpha$ et $v = \cos x \sin\alpha$.
9. Calculer $\frac{du}{dx}$ si $u = \frac{\exp(ax)(y-z)}{a^2+1}$, $y = a\sin x$ et $z = \cos x$.
10. Calculer $\frac{dz}{d\theta}$ si $z = \log(1-x^4)$ et $x = \sqrt{\sin\theta}$.
11. Étudier l'égalité des dérivées secondes croisées de la fonction $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
12. Parmi les formes différentielles suivantes, étudier celle qui sont des différentielles totales :
    (a) $3x^2y^2zdx + 2x^3yzdy + x^3y^2dz$
    (b) $xydx + 2xy^2dy$
    (c) $y^2dx + x^2dy$
    (d) $2xydx + (x^2+3y^2)dy$.

13. Sachant que les variables , et sont liées par la relation = (et sont des constantes), montrer que

    (a) l'expression = $_v$( )d + d n'est pas une différentielle totale.

    (b) = — est une différentielle totale.

14. Soit une fonction scalaire de la forme $f(x, y, z) = 0$. Trouver les relations fondamentales entre les derivées $\frac{z}{y}_x$ et $\frac{y}{z}_x$ puis entre $\frac{z}{y}_x$, $\frac{y}{x}_z$ et $\frac{x}{z}_y$.

15. Vérifier les deux résultats de la question précedente pour les deux cas suivants :

    (a) l'équation d'état du gaz parfait : = .

    (b) l'équation d'état massique de Van der Waals : $\left(+ \frac{a}{v^2} \right)(v -) =$.

16. Calculer les derivées des fonctions implicites de x données par les équations :

    (a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$

    (b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2} - 1 = 0$

    (c) $y^x = x^y$.

    (d) $\sin(xy) - \exp(xy) - x^2 y = 0$.

17. L'équation d'état massique de Van der Waals d'un gaz réel a pour expression $+\frac{a}{v^2}$ $(v -) =$, où a, et sont des constantes. Calculer $\frac{\partial}{\partial v}$ et $\frac{\partial}{\partial}_v$.

18. Vérifier le théorème de Schwarz dans le cas précedent.

19. Soit la fonction $u - v \tan a = 0$ (a est une constante). Calculer $\frac{}{u}$ et $\frac{}{v}$.

20. Soit $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, montrer que $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$.

21. Soit $\frac{z}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, montrer que $x\frac{z}{x} + y\frac{z}{y} = z$, quelle que soit la fonction dérivable f.

22. Montrer que si $z = (y + ax) + (y - ax)$, alors $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

23. Développer en série de Taylor autour du point $(0, 0)$ jusqu'à l'ordre quatre la fonction $f(x, y) = \exp(-x) \sin y$.

24. Étudier les maxima et minima de la fonction $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

25. Déterminer parmi les triangles ayant un même périmètre 2 celui dont la surface est la plus grande.

26. Trouver parmi les parallélépipède rectangles d'aire donnée celui dont le volume est le plus grand.