UNIVERSITÉ DE NICE — L2SF
MÉTH. MATH. PHYSIQUE — 2012–2013

TD 2

Intégrales multiples

1. Invertir l'ordre d'intégration dans les intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy\, f(x,y)$. Rép. $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{xy^2}^{\sqrt[3]{y}} dx\, f(x,y)$.

   (b) $\displaystyle\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} dx\, f(x,y)$. Rép. $\displaystyle\int_0^a dx \int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a} dy\, f(x,y)$.

   (c) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} dx\, f(x,y)$. Rép. $\displaystyle\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\, f(x,y) + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy f(x,y)$.

2. Calculer les intégrales suivantes en coordonnées polaires :

   (a) $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Rép. $\dfrac{\pi}{6}a^3$.

   (b) $\displaystyle\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy$. Rép. $\dfrac{\pi a^2}{2}$.

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty dy \int_0^\infty dx e^{-(x^2+y^2)}$. Rép. $\dfrac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty dx\, e^{-x^2}$.

3. Calculer les moments d'inertie d'une ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   en utilisant les coordonnées elliptiques $x = ra\cos\theta$, $y = rb\sin\theta$, selons

   (a) l'axe Oy, i.e., $I_y = \displaystyle\int_D dxdy\,(x^2+z^2)$. Rép. $\pi a^3 b/4$.

   (b) l'axe Oz, i.e., $I_z = \displaystyle\int_D dxdy\,(x^2+y^2)$. Rép. $\pi ab(a^2+b^2)/4$.

4. Calculer l'aire de la figure délimité par la parabole $y^2 = 2x$ et la droite $y = x$. Rép. $2/3$.

5. Calculer l'aire de la figure délimité par les courbes $y = \sin x$, $y = \cos x$ et les droites $x = 0$, $y = \pi/4$ et $y = \pi$. Rép. $\sqrt{2}$.

6. Calculer l'aire de la boucle de la courbe $r = a\sin 2\theta$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, \pi/2]$. Rép. $\pi a^2/8$.

7. Calculer l'aire délimitée par la lemniscate $r^2 = a^2\cos 2\theta$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4]$. Rép. a^2.

8. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire intérieure à la cardioïde $r = a(1 + \cos\theta)$. Rép. $x \ = 5a/6$, $y \ = 0$.
9. Calculer le moment d'inertie de la cardioïde $r = a(1 - \cos\theta)$ par rapport au pôle. Rép. $35\pi a \ /16$.
10. Calculer le volume du corps delimité par $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = z^2$. Rép. $32a^3/ \ .$
11. Calculer le volume du corps delimité par le cylindre circulaire droit de rayon a dont l'axe est confondu avec Oz, les plans de coordonnées et le plan $x/a + z/a = 1$. Rép. $a^3(\pi/4 - 1/3)$.
12. Calculer
$$\int dx\, dy\, dz \frac{1}{(x + y + z + 1)^3}$$
en sachant que le domaine d'intégration est borné par les plans des coordonnées et le plan $x + y + z = 1$. Rép. $\mathrm{n}\, 2/2 - 5/16$.
13. Calculer le volume du corps limité par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et le paraboloïde $x^2 + y^2 = 3z$. Rép. $1\ \pi/6$.
14. Calculer les coordonnées du centre de gravité et les moments d'inertie de la pyramide formée par les plans $x = 0$, $y = 0$, $x/a + y/b + z/ \ \ = 1$. Rép. $x \ = a/4$, $y \ = b/4$, $z \ = \ \ /4$, $I_x = a^3 b \ \ /60$, $I_y = b^3 a \ \ /60$, $I_z = \ \ ^3 ab/60$.
15. Calculer les coordonnées du entre de gravité du corps délimité par une sphère de rayon a et un cône d'angle au sommet $2 \ \ $, le somment coïncidant avec le centre de la sphère. Rép. $x \ = 0$, $y \ = 0$, $z \ = 3a/8$.
16. Se servir de l'égalité $\displaystyle\int_0^\infty dx\, e^{-ax^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$ pour calculer $\displaystyle\int_0^\infty dx\, x^2 \ \ e^{-ax^2}, \quad \in \ \ +$.
17. Calculer le potentiel gravitationnel $\ \ (\mathbf{r})$ généré par une distribution sphèrique de rayon $\ \ $ et de densité $\ \ $. Utiliser la vormule :
$$(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}\, \frac{(\mathbf{r}\,)}{\mathbf{r} - \mathbf{r}}.$$