Université de Nice — SL2M

2011-12 — Algèbre 2

Interrogation 1

Exercice 1. Dans $\mathbf{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, on considère les quatre vecteurs $\vec{u} = (1, 0, -1, 2)$, $\vec{v} = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{w} = (1, 2, -1, -1)$ et $\vec{x} = (5, -4, 3, 0)$.
On désigne par E le sous-espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
Parmi les assertions ci-dessous indiquer celles qui sont vraies ou fausses. Justifier vos réponses.

1.1. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthogonale.

VRAI. On remarque qu'aucun des trois vecteurs n'est nul et que les 3 produits scalaires $\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle$, $\langle \vec{v} \mid \vec{w} \rangle$, $\langle \vec{w} \mid \vec{u} \rangle$ sont nuls. La famille est donc orthogonale.

1.2. E est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

FAUX. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthogonale. C'est donc une famille libre. C'est aussi, par définition, une famille génératrice de E. C'est donc une base de E. Le sous-espace E est donc de dimension 3.
Commentaires :
- *Il ne suffit pas que E soit engendré par 3 vecteurs pour être de dimension 3. Il pourrait être de dimension inférieure. Pour affirmer que E est de dimension 3, il faut savoir que ces 3 vecteurs sont linéairement indépendants.*
- *Les 3 vecteurs $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$ ne sont pas proportionnels deux à deux mais la famille $((1, 0), (0, 1), (1, 1))$ est une famille liée dans $\mathbf{R}^2$.*

1.3. On désigne par $E^\perp$ le sous-espace orthogonal à E dans $\mathbf{R}^4$. Le vecteur $\vec{n} := (2, -3, -2, -2)$ engendre $E^\perp$.

VRAI. Comme E est de dimension 3, son supplémentaire orthogonal dans $\mathbf{R}^4$ est de dimension $4 - 3 = 1$. C'est une droite. Elle est donc engendrée par un de ses vecteurs non nul. Comme le vecteur proposé est non nul, il suffit de vérifier qu'il est orthogonal à E, c'est-à-dire orthogonal à tout vecteur d'une base de E. On calcule les trois produits scalaires $\langle \vec{u} \mid \vec{n} \rangle$, $\langle \vec{v} \mid \vec{n} \rangle$, $\langle \vec{w} \mid \vec{n} \rangle$ et on vérifie qu'ils sont tous les 3 nuls.
Commentaires : Le raisonnement sur la dimension de $E^\perp$ est crucial. Si on montre seulement que $\vec{n}$ appartient à $E^\perp$, c'est insuffisant pour prouver qu'il engendre ce sous-espace.
Par exemple $\vec{n}$ est orthogonal à $F := \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, mais il n'engendre pas $F^\perp$. Donner la dimension et une base orthogonale de $F^\perp$.

1.4. La projection orthogonale de $\vec{x}$ sur E est $\vec{y} = (3, 2, -1, 1)$.

FAUX. Si $\vec{y}$ est la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur E alors $\vec{y}$ appartient à E et $\vec{x} - \vec{y}$ est orthogonal à E.
On calcule :

$$\vec{x} - \vec{y} = (2, -6, 4, -1).$$

qui n'est pas proportionnel à $\vec{n}$.

Exercice 2. Dans $\mathbf{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, on considère les deux vecteurs $\vec{u} = (3, -4, 5)$ et $\vec{v} = (-3, 14, -7)$. Trouver une base orthogonale du sous-espace $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

L'algorithme qui permet de déterminer une telle base est celui de Gram-Schmidt. On calcule

$$\vec{w} := \vec{v} - \frac{\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle}{\|u\|^2} \vec{u}.$$

On a successivement : $\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = -9 - 56 - 35 = -100$, $\|u\|^2 = 9 + 16 + 25 = 50$.
On en déduit $\vec{w} = \vec{v} + 2\vec{u} = (3, 6, 3)$. La famille $(\vec{u}, \vec{w})$ est une base orthogonale de $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.