Déterminants.

Une parenthèse dans le monde des permutations d'un ensemble fini. On fixe un entier naturel n et on considère l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ des n premiers entiers. On peut les considérer en eux-mêmes ou comme les numéros d'un ensemble fini à n éléments.

7. Permutations

7.1. Une **permutation** est une bijection de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ sur lui-même. Une telle permutation est donc une application $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ qui a une application réciproque notée σ^{-1}. L'ensemble de ces bijections forme un groupe pour la composition des applications, appelé **groupe symétrique** et noté $\mathcal{S}_n$. Le groupe $\mathcal{S}_n$ a $n!$ éléments (le démontrer par récurrence).
La notation traditionnelle est la suivante : une permutation σ de $\mathcal{S}_n$ est notée

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Par exemple la notation

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{7.1.1}$$

désigne la permutation de $\mathcal{S}_5$ telle que $\tau(1) = 5$, $\tau(2) = 1$, $\tau(3) = 4$, $\tau(4) = 3$ et $\tau(5) = 2$. Pour cette permutation particulière, les transformés successifs de 1 sont $5 = \tau(1)$, $2 = \tau(5)$, $1 = \tau(5)$, $5 = \tau(1)$...

7.2. **Cycles.** On appelle cycle de longueur p une permutation de $\mathcal{S}_p$ telle que l'ensemble des transformés successifs de 1 (et donc de tout élément) est l'ensemble $\{1, 2, \ldots, p\}$ tout entier. Un tel cycle est caractérisé par la liste des transformés successifs de 1. Par exemple la permutation

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est un cycle de longueur 5. La liste des transformés successifs de 1 est $(1, 5, 2, 3, 4)$. La liste des transformés successifs de 2 est $(2, 3, 4, 1, 5)$. Elle caractérise la même permutation (on voit que c'est la *liste circulaire* qui caractérise la permutation).
Plus généralement, on appelle cycle de longueur p de $\mathcal{S}_n$ ($p \leq n$) une permutation qui induit un cycle sur un sous-ensemble à p éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et qui laisse les autres éléments fixes. Par exemple, la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

est un cycle de longueur 3 que nous noterons à l'aide de la liste des transformés successifs de 1, à savoir $(1, 5, 2)$. De même la la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

est un cycle de longueur 2 que nous noterons $(3,4)$. On remarque encore que $(4,3)$ désigne le même cycle. On constate que les deux cycles $(1,5,2)$ et $(3,4)$ commutent et que leur produit est égal à la permutation τ décrite en (7.1.1).
On considère une permutation σ dans $\mathcal{S}_n$. Partant d'un élément de $\{1,2,\ldots,n\}$, par exemple 1, on considère ses transformés successifs par σ : 1, $\sigma(1)$, $\sigma(\sigma(1))$... Cette suite d'entiers entre 1 et n est forcément périodique. Supposons que $\sigma^i(1)=\sigma^j(1)$ avec $i<j$. Puisque σ est bijective c'est donc que $\sigma^{j-i}(1)=1$. On voit donc que la période de la suite des images successives de 1 est le plus petit des entiers ℓ pour lesquels $\sigma^\ell(1)=1$. Notons le c. La donnée de la *liste* $(1,\sigma(1),\ldots,\sigma^{c-1}(1))$ permet de connaître les images par σ de tous les termes de la liste :

$$1 \longmapsto \sigma(1) \longmapsto \ldots \longmapsto \sigma^{c-1}(1) \longmapsto 1.$$

Si on prend un élément de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ qui n'est pas dans la liste, on est sûr que ses images successives ne sont pas non plus dans la liste. On peut donc recommencer le même processus jusqu'à épuisement de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$. On a alors obtenu un nombre fini de listes à supports disjoints (c'est-à-dire qu'un élément de $\{1,2,\ldots,n\}$ figure dans une liste et une seule). La réunion des supports est $\{1,2,\ldots,n\}$. On a démontré :

7.3. **Théorème.** *Toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$ se décompose en un produit de cycles à supports disjoints.*

Noter que deux cycles à supports disjoints commutent toujours. La décomposition de la permutation τ de la formule (7.1.1) en cycles à supports disjoints est $(1,5,2)(3,4)$. La décomposition est *unique* (même si la façon de l'écrire ne l'est pas).

7.4. **Signature.** On considère une permutation σ de $\mathcal{S}_n$. Une inversion est une paire $\{i,j\}$ telle que $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$ ne sont pas dans le même ordre que i et j. Le nombre d'inversions de σ est le nombre de telles paires. Un cycle de longueur p a $p-1$ inversions.

7.5. **Définition.** On appelle *signature* de la permutation σ le nombre $(-1)^{I(\sigma)}$ où $I(\sigma)$ est le nombre d'inversions de σ. On la note $\epsilon(\sigma)$.

La signature vaut donc 1 ou -1 suivant que $I(\sigma)$ est pair ou impair. Un cycle de longueur p est de signature $(-1)^{p-1}$. L'intérêt de la notion de signature est dans le résultat suivant :

7.6. **Théorème.** *La signature d'un produit de permutations est le produit des signatures.*

Démonstration. Considérons deux permutations σ et σ' de $\mathcal{S}_n$. Une paire $\{i,j\}$ est une inversion pour la composée $\sigma'\circ\sigma$ si et seulement si **une et une seule** des assertions suivantes est vraie
– $\{i,j\}$ est une inversion pour σ **et** $\{\sigma(i),\sigma(j)\}$ n'est pas une inversion pour σ'.
– $\{i,j\}$ n'est pas une inversion pour σ **et** $\{\sigma(i),\sigma(j)\}$ est une inversion pour σ'.
On considère les deux ensembles suivants :
– L'ensemble $\mathcal{J}$ des inversions de σ.
– L'ensemble $\mathcal{J}'$ des paires $\{i,j\}$ pour lesquelles $\{\sigma(i),\sigma(j)\}$ est une inversion pour σ'.
Le nombre d'éléments du premier est $I(\sigma)$ et le nombre d'éléments du second est $I(\sigma')$. Une inversion de $\sigma'\circ\sigma$ est un élément de $\mathcal{J}\cup\mathcal{J}'$ qui n'est pas dans l'intersection $\mathcal{J}\cap\mathcal{J}'$, c'est-à-dire un élément de la différence symétrique $\mathcal{J}\mathbin{\triangle}\mathcal{J}'$. La parité du nombre d'éléments de $\mathcal{J}\mathbin{\triangle}\mathcal{J}'$ est la somme des parités du nombre d'éléments de $\mathcal{J}$ et du nombre d'éléments de $\mathcal{J}'$ (cf. fonction booléenne « ou exclusif »). $\square$

La signature de la permutation τ décrite en (7.1.1) est -1 puisque elle est le produit des cycles $(1,5,2)$ et $(3,4)$ de longueur 3 et 2.

8. Déterminant d'une matrice carrée

On considère un corps $\mathbf{K}$, un entier n et une **matrice carrée** A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Le coefficient de A situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est noté $A_{i,j}$ pour i et j de 1 à n.
On donne une définition récursive du déterminant : c'est le scalaire donné par la formule suivante

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} A_{1,j}\ \Delta_{1,j}$$

où $\Delta_{1,j}$ est le déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en oubliant la première ligne et la j-ème colonne de A. Reste à préciser ce qu'est le déterminant d'une matrice 1×1 : c'est la valeur de son unique coefficient. Pour l'anecdote : on convient que le déterminant d'une matrice 0×0 vaut 1.
Conséquence : *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux de la matrice.*
On appelle cette manière de calculer le déterminant : *développement par rapport à la première ligne*. On constate (par récurrence!) que $\det A$ est une somme de termes qui sont les produits d'une liste de n coefficients de A affectés d'un signe $+$ ou $-$. Les listes sont obtenues en choisissant un terme dans chaque ligne et un dans chaque colonne. Reste à calculer le signe :

8.1. **Théorème.** *Le déterminant de A est donné par la formule (non récursive) suivante :*

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) A_{1,\sigma(1)} A_{2,\sigma(2)} \dots A_{n,\sigma(n)}.$$

En conséquence, le déterminant de A peut se calculer en développant par rapport à la i-ème ligne :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j}\ \Delta_{i,j},$$

ou par rapport à la j-ème colonne :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j}\ \Delta_{i,j}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en oubliant la première ligne et la j-ème colonne de A.

Prendre garde à la fausse similitude entre les formules. Dans l'une l'indice de ligne est fixé, alors que dans l'autre c'est l'indice de colonne.

8.2. **Corollaire.** *Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et sa transposée ont même déterminant.*

Les exemples de petite taille : pour une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$, on trouve

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Pour les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$, en developpant par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$

On retrouve bien qu'il y a $3! = 6$ termes dans le développement, 3 avec le signe $+$ et 3 avec le signe $-$.
Attention aux analogies trop faciles ! Dans le développement du déterminant d'une matrice 4×4 A dans $\mathcal{M}_4(\mathbf{K})$ il y a $4! = 24$ termes. Par exemple, il y a un terme en $A_{1,1}A_{2,3}A_{3,4}A_{4,2}$ affecté du signe $+$, car la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

est le cycle $(2, 3, 4)$ et a pour signature $+1$.

8.3. **Multilinéarité.** On se donne deux matrices A' et A'' dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que les lignes de A' et de A'' sont les mêmes, sauf la i-ème. On appelle A la matrice qui a les mêmes lignes que A' sauf la i-ème qui est la somme de la i-ème ligne de A' et de la i-ème ligne de A''. Alors :

$$\det(A) = \det(A') + \det(A'').$$

On se donne maintenant une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et un scalaire λ. On appelle A' la matrice qui a les mêmes lignes que A sauf la i-ème qui est le produit de la i-ème ligne de A par le scalaire λ. Alors :

$$\det(A') = \lambda \det(A).$$

Démonstration. On développe tous les déterminants par rapport à la ligne de numéro i. □

8.4. **Transformations permises.** On rappelle les opérations permises sur les lignes d'une matrice

(1) Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.
(2) Multiplier une ligne par un scalaire non nul.
(3) Echanger deux lignes.

8.5. **Lemme.** *Le déterminant d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui a deux lignes proportionnelles est nul.*

Démonstration. Par récurrence sur n. Si $n = 2$ c'est facile. Si $n > 2$, et que les lignes de numéro i et j sont proportionnelles, on développe par rapport à une ligne de numéro k ($k \neq i$, $k \neq j$) et les matrices obtenues en oubliant la ligne de numéro k et une colonne ont encore deux lignes proportionnelles. □

8.6. **Lemme.** *On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et une matrice équivalente A' obtenue à partir de A par une transformation de type (1). On a alors* $\det A' = \det A$.

Démonstration. On considère un scalaire λ et la matrice A' obtenue en ajoutant à la i-ème ligne de A le produit de la j-ème par λ. Désignons par A'' la matrice obtenue en remplaçant la i-ème ligne de A par la j-ème. Par multilinéarité on a $\det A' = \det A + \lambda \det A''$ et par le lemme 8.5 on a $\det A'' = 0$. □

On résume les résultats obtenus dans le théorème suivant :

8.7. **Théorème.** *On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

(1) *Une matrice équivalente A' obtenue à partir de A par une transformation permise de type (1) a même déterminant que A.*
(2) *Une matrice équivalente A' obtenue à partir de A en multipliant une ligne par un scalaire λ a pour déterminant $\det A' = \lambda \det A$.*
(3) *Une matrice équivalente A' obtenue à partir de A en permutant deux lignes a pour déterminant $\det A' = -\det A$.*

Remarque : Les formules analogues obtenues en transposant sont vraies : dans les énoncés ci-dessus on peut remplacer ligne par colonne. Le théorème ci-dessus est un outil essentiel pour le calcul pratique des déterminants.

Démonstration. On a déjà démontré les points (1) et (2) du théorème. Pour le point (3), on peut revenir à la formule non récursive du théorème 8.1 ou procéder par récurrence de manière similaire à la preuve du lemme 8.5. □

Attention ! Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et λ un scalaire, alors $\det \lambda A = (\lambda)^n \det A$.

8.8. **Corollaire.** *On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $\det A \neq 0$ si et seulement si A est de rang maximum autrement dit si et seulement si A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

Démonstration. On sait (voir théorème **??**) que l'on peut trouver une matrice A' équivalente à A (donc de même rang) et à lignes echelonnées en effectuant des transformations permises de type (1) et (2). La matrice A' est de rang n si et seulement si elle est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux tous égaux à 1. □

8.9. **Déterminant d'un produit de matrices.**

8.10. **Théorème.** *On considère deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On a*

$$\det AB = \det A \det B.$$

Démonstration. À l'exercice 7 de la feuille 2, on montre que si A' est une matrice équivalente obtenue à partir de A par une transformation de type (1), alors on peut construire une matrice triangulaire T telle que $A' = TA$. On voit que $\det T = 1$ et que $\det A' = \det A$, donc on a bien dans ce cas $\det TA = \det T \det A$.
De manière analogue, lorsque A' est une matrice équivalente obtenue à partir de A par une transformation de type (2), alors on peut construire une matrice diagonale D (avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1 sauf l'un d'entre eux égal à λ) telle que $A' = DA$. On voit que $\det D = \lambda$ et que $\det A' = \lambda \det A$, donc on a bien dans ce cas $\det DA = \det D \det A$.
Le théorème **??** montre que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est un produit de matrices associées à des transformation de type (1) ou (2). Multiplier à gauche par A, c'est donc multiplier successivement par de telles matrices. Si $A = L_1 \dots L_k$, on a

$$\det(AB) = \det(L_1) \dots \det(L_k) \det B$$

Pour $B = I_n$ on trouve $\det A = \det(L_1) \dots \det(L_k) \det I_n$ ce qui donne la formule attendue. □

8.11. **Corollaire.** *Soit A une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors*

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Démonstration. On a $AA^{-1} = I_n$ et $\det I_n = 1$ d'où $\det A \det(A^{-1}) = 1$ ce qui montre le résultat. □

Remarque : Le calcul du déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ne fait intervenir que les opérations d'addition et de multiplication dans $\mathbf{K}$ sans jamais faire intervenir de calcul d'inverse. De même le calcul du produit de deux matrices ne fait intervenir que ces mêmes opérations. On peut donc considérer des matrices à coefficients entiers (resp. polynômes). Le produit de deux telles matrices sera encore du même type et leurs déterminants seront des entiers (resp. des polynômes).
Le corollaire 8.11 s'étend donc, avec la même preuve, de la manière suivante : *Soit A une matrice à coefficients entiers (resp. polynômes) qui a un inverse à coefficients entiers (resp. polynômes). Alors son déterminant est inversible dans les entiers (resp. polynômes). Il vaut donc 1 ou -1 (resp. il est un polynôme constant non nul).*
Par exemple, la matrice a coefficients entiers

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a un déterminant égal à 5. Elle est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, mais on peut affirmer que son inverse n'est pas à coefficients entiers.

8.12. **Calcul de l'inverse.** On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Le coefficient de A situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est noté $A_{i,j}$ pour i et j de 1 à n. On appelle cofacteur $C_{i,j}$ la quantité $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ où où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en oubliant la première ligne et la j-ème colonne de A. Avec ces notations, le développement de $\det A$ par rapport à la ligne de numéro i s'écrit

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\, C_{i,j}.$$

On appelle matrice des cofacteurs de A (ou comatrice de A) la matrice dont le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est $C_{i,j}$. On la note $c(A)$.

8.13. **Théorème.** *On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et la matrice de ses cofacteurs $c(A)$. Alors*

$$(\det A) I_n = A\, {}^t c(A) = {}^t c(A)\, A.$$

En particulier, si $\det A$ *est inversible, A est aussi inversible et on a*

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}\, {}^t c(A).$$

Démonstration. On calcule le coefficient du produit des matrices $A\, {}^t c(A)$ situé à la ligne numéro i et à la colonne numéro j. Il vaut :

$$\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} C_{j,k}.$$

Lorsque $i = j$ on trouve $\det A$. Lorsque $i \neq j$, on trouve le développement du déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la ligne numéro j de A par la ligne numéro i. Mais, puisque $i \neq j$ la matrice obtenue a deux lignes qui sont égales. Son déterminant est donc nul. □

1. Exercice. ▷ On considère un système linéaire homogène de $n-1$ équations à n inconnues. On suppose qu'il est de rang maximum $n-1$.
Montrer que l'espace des solutions est une droite vectorielle.

On désigne par A la matrice du système. Montrer qu'une base de cette droite est donnée par le vecteur de coordonnées $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ où Δ_i est le déterminant de la matrice $n-1 \times n-1$ obtenue en oubliant la i-ème colonne de A.
Application : On donne deux plans de $\mathbf{R}^3$ d'équations respectives

$$3x - 5y + -z = 0 \text{ et } x - 2y + 9z = 0.$$

Déterminer une base de leur intersection. ◁

8.14. **Valeurs propres d'une matrice carrée.** On considère une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, un scalaire λ et le système linéaire homogène de matrice $A - \lambda I_n$.

8.15. **Définition.** On dira que λ est une **valeur propre de la matrice** A si le système linéaire homogène $(A - \lambda I_n)X = 0$ a au moins une solution non triviale (c'est-à-dire une solution non nulle). Une telle solution non triviale est appelée **vecteur propre de** A **associé à la valeur propre** λ. L'espace des solutions du système $(A - \lambda I_n)X = 0$ est appelé **espace propre de** A **associé à la valeur propre** λ.

Le théorème qui suit est simplement une traduction de la définition. On utilise la propriété fondamentale du déterminant.

8.16. **Théorème.** *On considère une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et un scalaire λ dans $\mathbf{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *λ est valeur propre de A*

(2) *La matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas de rang maximum.*

(3) *Le déterminant* $\det(A - \lambda I_n)$ *est nul.*

Étant donnée une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on considère la matrice $A - TI_n$ à **coefficients polynômes en** T. Comme le calcul du déterminant ne fait intervenir que des multiplications et des additions, il est possible de calculer le déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}[T])$. C'est un polynôme de $\mathbf{K}[T]$.

8.17. **Définition.** On considère une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et la matrice $A - TI_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}[T])$. Le déterminant $\det(A - TI_n)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$ qu'on appelle le **polynôme caractéristique** de A. Ses racines dans $\mathbf{K}$ sont les valeurs propres de A dans $\mathbf{K}$.

Considérons une matrice A triangulaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et désignons par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses coefficients diagonaux. Alors, $A - TI_n$ est aussi triangulaire et son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux $\lambda_1 - T, \dots, \lambda_n - T$. On en déduit que les valeurs propres de la matrice triangulaire A, comptées avec multiplicité, sont ses éléments diagonaux.

Changements de variables.

9. Changement de base

9.1. On considère un corps $\mathbf{K}$ et un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{K}$ muni d'une base $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$. Un vecteur x de E a pour coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Cela veut dire qu'il se décompose en

$$x = X_1 e_1 + \ldots X_n e_n.$$

Pour ne pas confondre scalaires et vecteurs on peut mettre des flèches sur ces derniers : l'écriture devient

$$\vec{x} = X_1 \vec{e}_1 + \ldots X_n \vec{e}_n.$$

On se donne une autre base $\mathcal{B}' := (\vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_n)$ de E. On va l'appeler la *nouvelle base* et on va appeler $\mathcal{B}$ *l'ancienne base*. Comment se donner les vecteurs de la famille $\mathcal{B}'$? Par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Pour j de 1 à n, chacun des $\vec{e}_j$ a une décomposition unique sur la base $\mathcal{B}$

$$\vec{e'}_j = P_{1,j} \vec{e}_1 + \ldots P_{n,j} \vec{e}_n. \tag{9.1.1}$$

Ainsi, $P_{i,j}$ est la i-ème coordonnée du vecteur $\vec{e'}_j$ dans la base $\mathcal{B}$. On inscrit ces coordonnées dans une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Ainsi la j-ème colonne de cette matrice est la liste $(P_{1,j}, \ldots, P_{n,j})$ des coordonnées de $\vec{e'}_j$ dans la base $\mathcal{B}$. On appelle la matrice P **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
Si $\vec{x}$ est un vecteur de E, on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et X' la matrice colonne des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}'$. En partant de $\vec{x} = X'_1 \vec{e'}_1 + \ldots X'_n \vec{e'}_n$ et en substituant dans cette formule l'expression (9.1.1) des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, on trouve

$$\vec{x} = X'_1 \vec{e'}_1 + \ldots X'_n \vec{e'}_n = \sum_{i=1}^n X'_i \vec{e'}_i = \sum_{i=1}^n X'_i \left(\sum_{k=1}^n P_{k,i} \vec{e}_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n P_{k,i} X'_i \right) \vec{e}_k.$$

On en déduit la décomposition de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$. Comme cette décomposition est unique, on en déduit que $X_k = \sum_{i=1}^n P_{k,i} X'_i$ pour k de 1 à n. Autrement dit, la matrice colonne X est le produit de la matrice P par la matrice X' :

$$X = PX'.$$

On obtient le **slogan** suivant : *la matrice de passage de l'ancienne base $\mathcal{B}$ à la nouvelle base $\mathcal{B}'$ a pour coefficients les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne et elle permet de calculer les anciennes coordonnées d'un vecteur au moyen des nouvelles.*

9.2. **Théorème.** *On considère un corps $\mathbf{K}$ et un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{K}$ muni d'une base $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.*

(1) *Étant donnée une base $\mathcal{B}'$ de E, la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice inversible : son rang est n et son déterminant est non nul. La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est P^{-1}.*

(2) *Réciproquement, on considère une matrice inversible P dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Il existe une unique base $\mathcal{B}'$ de E telle que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.*

Démonstration. (1) Désignons par P' la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Si $\vec{x}$ est un vecteur de E, on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et X' la matrice colonne des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}'$. On a donc $X = PX'$ et $X' = P'X$ d'où $X = PP'X$. En prenant successivement pour $\vec{x}$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, on en déduit les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} P_{i,j}P'_{j,k} &= 0 \quad \text{si } i \neq k \\ &= 1 \quad \text{si } i = k\end{aligned}$$

qui prouvent que le produit de matrices PP' est égal à I_n.

(2) Pour j de 1 à n, on considère le vecteur $\vec{e'}_j$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients de la j-ème colonne de P. Montrons que la famille $(\vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_n)$ est libre. Considérons une combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{e'}_j$. La matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j$ des colonnes de P. Comme P est de rang n, une telle combinaison linéaire est nulle si et seulement si tous les λ_j sont nuls. □

9.3. **Déterminant d'une famille de vecteurs.** On considère un corps $\mathbf{K}$ et un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{K}$ muni d'une base $\mathcal{B}$. On considère d'autre part une famille de n vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ de E et la matrice M de leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Le coefficient $M_{i,j}$ de M situé à la ligne numéro i et à la colonne numéro j est donc égal à la i-ème coordonnée du vecteur v_j dans la base $\mathcal{B}$.
On appelle déterminant de la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ le déterminant de la matrice M. On le note $\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$.
Ce déterminant dépend de la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ **et** de la base $\mathcal{B}$. On se donne une base $\mathcal{B}'$ de E et la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On désigne par M' la matrice des coordonnées des vecteurs de la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Pour j de 1 à n, on note V_j (resp. V'_j) la matrice colonne des coordonnées de $\vec{v}_j$ dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). On a $V_j = PV'_j$ pour j de 1 à n. La règle de calcul du produit de matrices donne $M = PM'$ et en passant aux déterminants

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \det P \det_{\mathcal{B}'}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n).$$

On voit donc que le déterminant de la famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ dépend de la base $\mathcal{B}$ dans lequel on le calcule. En revanche, il est nul dans une base si et seulement s'il est nul dans toutes les bases.

9.4. **Aires.** On travaille dans $\mathbf{R}^2$, muni du produit scalaire qui fait de la base canonique $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs et $\mathcal{B}$ une base orthonormée, on note U et V les matrices colonnes des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors, le produit scalaire $\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle$ se calcule par la formule suivante

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = U_1V_1 + U_2V_2.$$

Pour une matrice P de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) P est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée.
(2) La transposée ${}^tP$ est l'inverse de P.

Démonstration. Dire que le produit ${}^tP\,P$ vaut I_2, c'est dire que les relations suivantes sont vérifiées :

$$P_{1,1}^2 + P_{2,1}^2 = P_{1,2}^2 + P_{2,2}^2 = 1, \quad P_{1,1}P_{1,2} + P_{2,1}P_{2,2} = 0.$$

□

Lorsqu'une matrice P de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ vérifie l'une des propriétés ci-dessus, on dit qu'elle est **orthogonale**. Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ forment un groupe pour la multiplication des matrices, noté $\mathrm{O}(2,\mathbf{R})$. C'est un sous-groupe du groupe des matrices inversibles $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

9.5. **Théorème.** *On considère $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire qui fait de la base canonique $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathbf{R}^2$. On choisit comme aire unité celle du carré construit sur les vecteurs de $\mathcal{B}_0$.*
L'aire du parallélogramme déterminé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à la valeur absolue du déterminant $\det_{\mathcal{B}_0}(\vec{u},\vec{v})$.
*Si $\mathcal{B}$ est une autre **base orthonormée**, la valeur absolue du déterminant* $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v})$ *est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Démonstration. On remarque d'abord que $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v}) = \det P \det_{\mathcal{B}_0}(\vec{u},\vec{v})$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Comme cette matrice est orthogonale, son déterminant vaut 1 ou -1 et les deux déterminants $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v})$ et $\det_{\mathcal{B}_0}(\vec{u},\vec{v})$ ont même valeur absolue. Pour calculer cette valeur absolue il suffit donc de choisir une base orthonormée.
On note que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\det_{\mathcal{B}_0}(\vec{u},\vec{v}) = 0$. Supposons qu'ils ne sont pas colinéaires. On choisit une base orthormée $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1$ colinéaire à $\vec{u}$ (par exemple $\vec{u}/\|\vec{u}\|$). On décompose v sur la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ en $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$. Comme e_1 est colinéaire à u on a (propriétés du déterminant, voir paragraphes 8.3 et 8.4)

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, v_1\vec{e}_1) + \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, v_2\vec{e}_2) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, v_2\vec{e}_2).$$

Comme $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{e}_1$, la matrice des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs $\vec{u}$ et $v_2\vec{e}_2$ est

$$\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}$$

où u_1 est la coordonnée de $\vec{u}$ sur $\vec{e}_1$. Le déterminant de cette matrice a pour valeur absolue $|u_1|\,|v_2|$. Mais $|u_1|$ est la longueur du vecteur u (la base du parallélogramme) et $|v_2|$ est la longueur de la projection de $\vec{v}$ sur la direction perpendiculaire à $\vec{u}$ (la hauteur). C'est donc bien l'aire d'un rectangle qui a même base et même hauteur que le parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ lorsqu'on prend comme unité l'aire du carré construit sur les deux vecteurs d'une base orthonormée. $\square$

9.6. **Corollaire.** *On considère $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire qui fait de la base canonique $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathbf{R}^2$. On appelle α l'angle $(\vec{u},\vec{v})$. On a alors, pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$,*

$$|\det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v})| = \|u\|\|v\||\sin\alpha|$$

9.7. **Volumes.** De manière similaire à ce qui précède, on démontre :

9.8. **Théorème.** *On considère $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire qui fait de la base canonique $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée et trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans $\mathbf{R}^3$. On choisit comme volume unité celui du cube construit sur les vecteurs de $\mathcal{B}_0$.*
Le volume du parallélépipède déterminé par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est égal, pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$, à la valeur absolue du déterminant $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Démonstration. La preuve est similaire. On remarque d'abord que si $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sont coplanaires alors le volume et le déterminant sont tous les deux nuls. On les suppose alors non coplanaires et on choisit une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ obtenue en complétant une base orthonormée

$\mathcal{C} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En décomposant $\vec{w}$ en $w' + w''$ où w'' est colinéaire à $\vec{e}_3$ on obtient :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w'} + \vec{w''}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w''}).$$

En développant ce dernier déterminant par rapport à la dernière colonne on trouve

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w''}) = w_3 \det_{\mathcal{C}}(\vec{u}, \vec{v}),$$

ce qui est bien le produit de l'aire de la base par la hauteur du parallélépipède. $\square$

9.9. **Applications linéaires et changements de base.** On considère un corps $\mathbf{K}$ et deux espaces vectoriels E et F de dimensions finies p et n sur $\mathbf{K}$. On se donne des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F. Une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ est donnée par sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (voir section **??**). On note cette matrice A. C'est une matrice à n lignes et p colonnes dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On fixe une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de E et une nouvelle base $\mathcal{C}'$ de F et on veut calculer la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.
Pour cela on considère un vecteur $\vec{x}$ de E et on note X (resp. X') la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). On appelle $\vec{y}$ l'image $u(\vec{x})$ et on note Y (resp. Y') la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). On a les égalités matricielles suivantes :

$$Y = AX, \quad X = PX', \quad Y = QY'.$$

On en déduit que pour tout $\vec{x}$ de E, on a $Y' = Q^{-1}AP\,X'$, ce qui montre que la matrice A' de u dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ est

$$A' = Q^{-1}AP.$$

9.10. **Endomorphismes.** On considère un corps $\mathbf{K}$ et un espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbf{K}$ muni d'une base $\mathcal{B}$. On appelle **endomorphisme** de E une application linéaire $u : E \longrightarrow E$. Une telle application est donnée par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. On note cette matrice A. C'est une matrice carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
On fixe une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de E et on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On note A' la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$. On a alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

9.11. **Théorème.** *On considère un corps* $\mathbf{K}$*, un espace vectoriel* E *de dimension finie* n *sur* $\mathbf{K}$ *et un endomorphisme* u *de* E*. On fixe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *et on considère la matrice* A *de* u *dans* $\mathcal{B}$*. Le déterminant* $\det A$ *ne dépend que de* u *et pas de la base utilisée pour le calculer. On l'appelle déterminant de* u*.*
De même, le polynôme caractéristique $\det(A - TI_n)$ *ne dépend que de* u *et ne dépend pas de la base utilisée pour le calculer. On l'appelle polynôme caractéristique de* u*. Ses racines sont les valeurs propres de* u*.*

Pour calculer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u, il suffit de calculer le polynôme caractéristique de la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E (n'importe quelle base convient).

9.12. **Corollaire.** *Sous les hypothèses du théorème, on considère une valeur propre* λ *de* u *et l'espace propre associé, noté* E_λ*. La dimension de* E_λ *est majorée par la multiplicité de* λ *comme racine du polynôme caractéristique.*

Démonstration. On considère une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de E_λ que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d, \ldots, e_n)$ de E. Dans la base $\mathcal{B}$ la matrice A de u est triangulaire par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda I_d & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où I_d est la matrice unité de $\mathcal{M}_k(\mathbf{K})$ et C une matrice de $\mathcal{M}_{n-d}(\mathbf{K})$. La matrice $A - TI_n$ s'écrit donc

$$A - TI_n = \begin{pmatrix} (\lambda - T)I_d & B \\ 0 & C - TI_{n-d} \end{pmatrix}.$$

En développant son déterminant par rapport aux premières colonnes, on trouve

$$\det(A - TI_n) = (\lambda - T)^d \det(C - TI_{n-d}).$$

On en déduit que $(\lambda - T)^d$ divise le polynôme caractéristique, donc que d est plus petit que la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique de u (définition de la multiplicité en 8.3). □

9.13. **Théorème.** *On considère un corps $\mathbf{K}$, un espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbf{K}$ et un endomorphisme u de E. On choisit des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de u distinctes deux à deux. On considère les espaces propres $E_1, \ldots, E_r$ associés respectivement à $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Pour j de 1 à r, on se donne une base de E_i qu'on appelle $\mathcal{B}_i$. La famille $\mathcal{F}$ obtenue en concaténant les $\mathcal{B}_i$ (i de 1 à r) est une famille libre.*

Démonstration. Supposons la conclusion du théorème fausse et considérons le premier indice s, $s < r$ tel que la famille obtenue en concaténant les $\mathcal{B}_i$ (i de 1 à s) est une famille libre et la famille obtenue en concaténant les $\mathcal{B}_i$ (i de 1 à $s+1$) est liée. Il existe alors un vecteur $\vec{x}$ non nul de E_{s+1} qui est une somme $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \ldots + \vec{x}_s$ avec $\vec{x}_i$ dans E_i. Appliquons u à tous ces vecteurs : on a $u(\vec{x}) = \lambda_{s+1}\vec{x}$ et $u(\vec{x}_i) = \lambda_i \vec{x}_i$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{x}_1 + \ldots + \vec{x}_s \\ \lambda_{s+1}\vec{x} &= \lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_s\vec{x}_s. \end{aligned}$$

Par combinaison linéaire de ces deux égalités on obtient

$$0 = (\lambda_{s+1} - \lambda_1)\vec{x}_1 + \ldots (\lambda_{s+1} - \lambda_s)\vec{x}_s$$

ce qui entraîne, puisque les λ_i sont deux à deux distincts, que les $\vec{x}_i$ sont tous nuls et donc $\vec{x}$ aussi ce qui contredit l'hypothèse. □

9.14. **Définition.** Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est **diagonalisable** s'il existe une base de $\mathbf{K}^n$ formée de vecteurs propres de A.
Un endomorphisme u de E est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E est diagonalisable.

Si A est diagonalisable, on a une base $\mathcal{B}' := (\vec{e}_1', \ldots, \vec{e}_n')$ de vecteurs propres de A. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. Désignons par P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}'$. La j-ème colonne de P a pour coefficients les coordonnées de $\vec{e}_j'$. On a donc $AP = PD$ où D est la matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On en déduit que $D = P^{-1}AP$. On dira que D est une matrice diagonale **semblable** à A.
Supposons u diagonalisable. On se donne une base $\mathcal{B}$ de E et la matrice A de u dans cette base. Désignons par $\mathcal{B}'$ une base formée de vecteurs propres et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. La matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$ est diagonale. Pour i de 1 à n, le i-ème coefficient sur la diagonale

de D est la valeur propre associée au vecteur propre $\vec{e}_i'$. La formule de changement de base pour les endomorphismes (9.10) donne
$$D = P^{-1}AP.$$

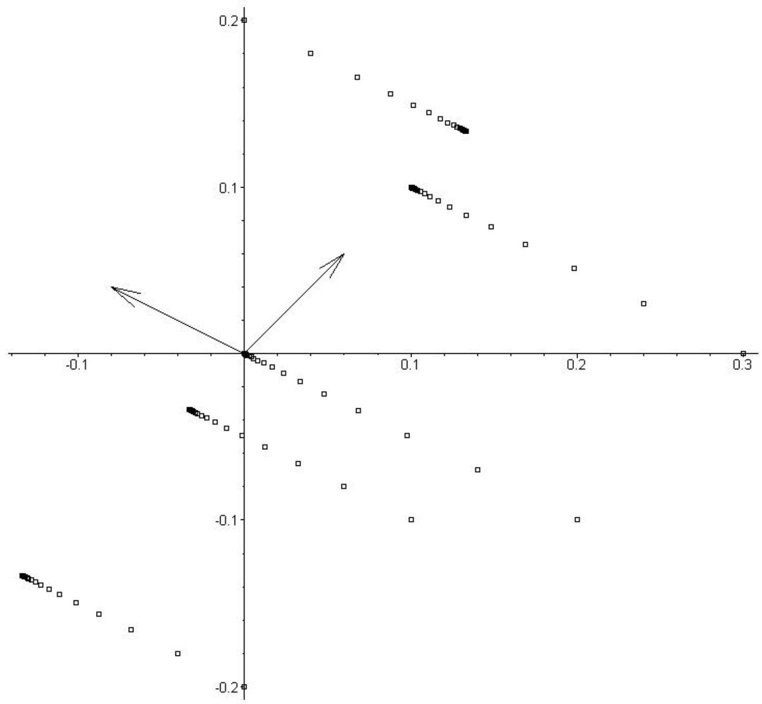
9.15. **Théorème.** *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres distinctes deux à deux est diagonalisable. C'est le cas lorsque le polynôme caractéristique a n racines simples.*

Démonstration. Désignons par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Pour i de 1 à n, on désigne par $\vec{v}_i$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
Le théorème 9.13 montre que la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ est libre. Comme elle a n éléments, c'est une base de $\mathbf{K}^n$. □

10. Applications

10.1. **Systèmes dynamiques linéaires discrets.** Le corps $\mathbf{K}$ sera ici $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et p un entier. On se donne une matrice A dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, un vecteur U_0 dans $\mathbf{K}^p$ et on considère la suite de vecteurs de premier terme U_0 définie, pour $n \geq 0$, par :
$$U_{n+1} = AU_n.$$
Le problème est le suivant : quel est le **comportement asymptotique** de la suite de vecteurs $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ quand n tend vers l'infini ? Comment ce comportement dépend-il du terme initial U_0 ?
Par comportement asymtotique on entend : la limite éventuelle, un équivalent, ou même un développement limité quand n tend vers l'infini.
On dira que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $\mathbf{K}^p$ a une limite L dans $\mathbf{K}^p$ si et seulement si, pour j de 1 à p, la suite de terme général $U_{n,j}$ (la j-ème coordonnée de U_n) a pour limite L_j dans $\mathbf{K}$.
Pour n entier, on a $U_n = A^n U_0$. Etudier la suite de vecteurs $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ revient à étudier la suite des images d'un vecteur U_0 par les **puissances** de la matrice A.

10.1.1. **Exemple.** Considérons la matrice suivante :
$$A := \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$
Son polynôme caractéristique est $T^2 - (1,7)T + 0,7$ dont les racines sont 1 et $0,7$. Le vecteur $W := (1,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, tandis que le vecteur $W := (-2,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $0,7$.
L'action de la matrice A sur ces deux vecteurs est simple. $AV = V$ donc $A^nV = V$. D'autre part $AW = (0,7)W$ donc $A^nW = (0,7)^nW$.
Pour n fixé, l'application $V \longmapsto A^nV$ est linéaire comme composée d'applications linéaires. Tout vecteur U_0 de $\mathbf{R}^2$ se décompose sur la base (V, W). Pour un vecteur U_0 se décomposant en $U_0 = \alpha V + \beta W$, on obtient
$$A^nU_0 = \alpha A^nV + \beta A^nW = \alpha V + \beta(0,7)^nW.$$
Quand n tend vers l'infini, $(0,7)^n$ tend vers 0 et on en déduit que $U_n = A^nU_0$ tend vers αV. Cette limite ne dépend que de la décomposition de U_0 dans la base (V, W).
Par exemple, si $U_0 = (1,0)$, on a
$$U_0 = -\frac{1}{4}V - \frac{1}{4}W.$$
La limite de la suite de premier terme $(1,0)$ est donc $-\frac{1}{4}V = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.



10.1.2. **Exemple.** Considérons maintenant la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $T^2 - (1,6)T + 0,63$ dont les racines sont $0,9$ et $0,7$. Le vecteur $V := (1,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $0,9$, tandis que le vecteur $W := (-1,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $0,7$.
L'action de la matrice A sur ces deux vecteurs est la suivante : $AV = (0,9)V$ donc $A^nV = (0,9)^nV$. D'autre part $AW = (0,7)^nW$ donc $A^nW = (0,7)^nW$.
Pour un vecteur U_0 se décomposant en $U_0 = \alpha V + \beta W$, on obtient

$$A^nU_0 = \alpha A^nV + \beta A^nW = \alpha(0,9)^nV + \beta(0,7)^nW.$$

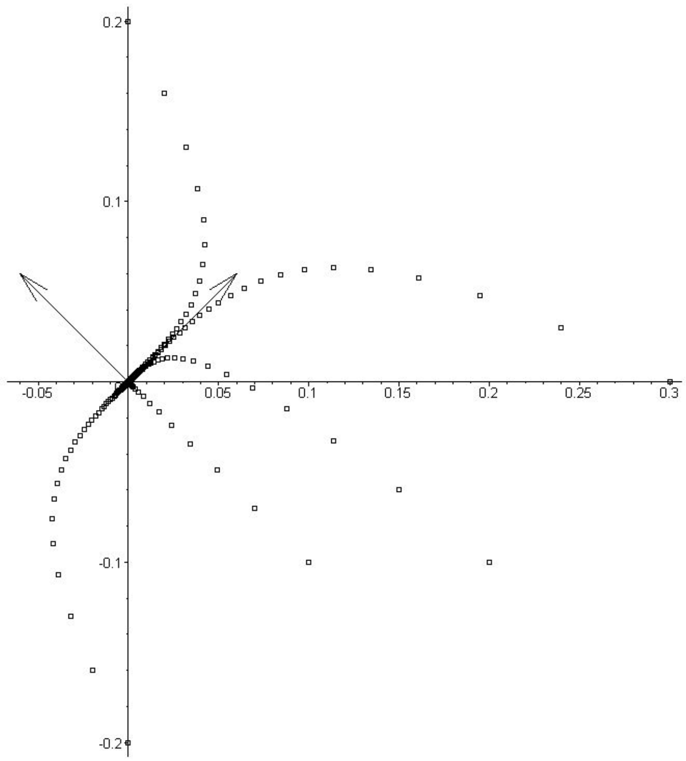
Quand n tend vers l'infini, $(0,7)^n$ et $(0,9)^n$ tendent vers 0 et on en déduit que $U_n = A^nU_0$ tend vers le vecteur nul. On peut être un peu plus précis et calculer par exemple la limite de la **pente** du vecteur U_n dans la base (V,W). Cette pente est infinie si $\beta = 0$ et sinon vaut

$$\frac{\beta(0,7)^n}{\alpha(0,9)^n} = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{0,7}{0,9}\right)^n$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Comment interpréter ce résultat ?

(1) Quand $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand U_0 est colinéaire à W, le vecteur U_n reste colinéaire à W.

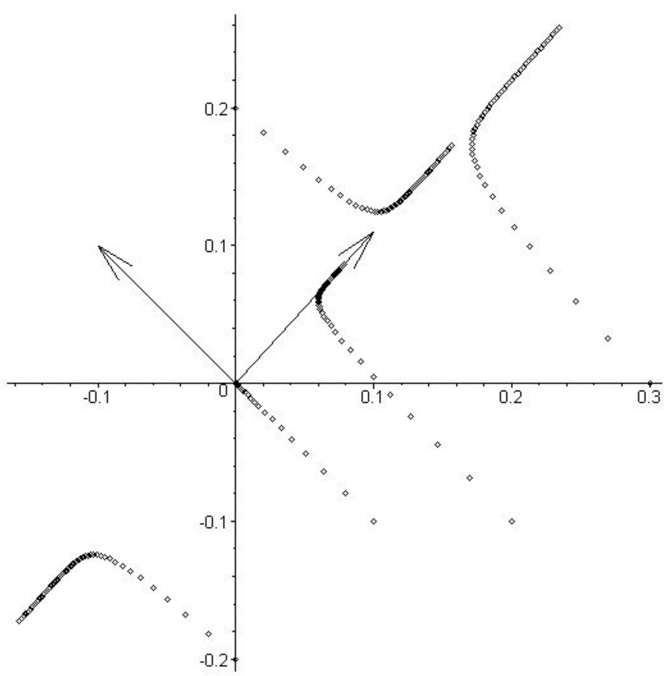
(2) Quand $\alpha \neq 0$ (même s'il est très petit), la pente du vecteur U_n dans la base (V,W) tend vers 0. Le vecteur U_n tend vers le vecteur nul et sa **direction** tend vers la direction de V.



10.1.3. **Exemple.** Considérer maintenant la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,11 & 0,91 \end{pmatrix}.$$

et expliquer le dessin obtenu ci-dessous.



10.2. **Systèmes différentiels.**

À savoir avant de commencer. On considère un réel a, un réel y_0 et l'équation différentielle
$$y' = ay.$$
Il existe une unique fonction $t \longmapsto y(t)$ dérivable sur $\mathbf{R}$, telle que $y'(t) = ay(t)$ pour tout t réel et $y(0) = y_0$. C'est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $t \longmapsto y_0\, e^{at}$.
De manière analogue, si a et y_0 sont des complexes, il existe une unique fonction y de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, dérivable, telle que
$$y'(t) = ay(t) \text{ et } y(0) = y_0.$$
C'est la fonction $t \longmapsto y_0\, e^{at}$. Si σ et ω sont les parties réelles et imaginaires de a, alors on a :
$$e^{at} = e^{(\sigma+i\omega)t} = e^{\sigma t}e^{i\omega t} = e^{\sigma t}(\cos\omega t + i\sin\omega t).$$

10.2.1. Le corps $\mathbf{K}$ sera ici $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et p un entier. On se donne une matrice A dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, un vecteur U_0 dans $\mathbf{K}^p$ et on considère le système différentiel
$$\frac{dU}{dt} = AU. \tag{10.2.1}$$
Une **solution** du système différentiel 10.2.1 est une fonction $U : \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{K}^p$, c'est-à-dire un p-uplet de fonctions $U := (u_1, \ldots, u_p)$ à valeurs dans $\mathbf{K}$, telles que :
$$\left\{\begin{array}{ccccc} u_1'(t) & = & A_{1,1}u_1(t) + \ldots + A_{1,p}u_p(t) & = & \sum_{j=1}^p A_{1,j}u_j(t) \\ \vdots & & & & \vdots \\ u_i'(t) & = & A_{i,1}u_1(t) + \ldots + A_{i,p}u_p(t) & = & \sum_{j=1}^p A_{i,j}u_j(t) \\ \vdots & & & & \vdots \\ u_n'(t) & = & A_{n,1}u_1(t) + \ldots + A_{n,p}u_p(t) & = & \sum_{j=1}^p A_{n,j}u_j(t). \end{array}\right.$$
Une **solution** du système différentiel 10.2.1 de **condition initiale** U_0 est une solution qui vérifie de plus $U(0) = U_0$.

10.3. **Théorème.** *On désigne par* $\mathbf{K}$ *l'un des corps* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *et par* p *un entier. On se donne une matrice* A *dans* $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$*, un vecteur* U_0 *dans* $\mathbf{K}^p$ *et on considère le système différentiel*
$$\frac{dU}{dt} = AU.$$
Il existe une unique solution du système de condition initiale U_0*.*

10.3.1. **Exemple.** Considérons la matrice A de l'exemple 10.1.2. Le vecteur $V := (1,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $0,9$, tandis que le vecteur $W := (-1,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $0,7$.
Considérons la fonction
$$\begin{array}{rcl} U : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & e^{(0,9)t}\,V. \end{array}$$
C'est une solution du système de condition initiale V. En effet, la valeur de U en 0 est V et la dérivée de U est la fonction $t \longmapsto (0,9)e^{(0,9)t}\,V$. Or V est un vecteur propre de valeur propre $(0,9)$. On a donc $(0,9)V = AV$ et $(0,9)e^{(0,9)t}\,V = A\,e^{(0,9)t}\,V$.
De même, la fonction $t \longmapsto e^{(0,7)t}\,W$ est une solution du système de condition initiale W.
Pour un vecteur U_0 se décomposant en $U_0 = \alpha V + \beta W$, on obtient une solution de condition initiale U_0 en prenant $U(t) = \alpha e^{(0,9)t}\,V + \beta e^{(0,7)t}\,W$.

Le théorème 10.3 affirme que c'est la seule. Vérifions-le ici. Soit $\tilde{U}$ une autre solution de condition initiale U_0. La fonction $U - \tilde{U}$ est une solution de condition initiale 0. Montrer l'unicité de la solution de condition initiale U_0 revient donc à montrer que la fonction nulle est l'unique solution de condition initiale 0.
Désignons par P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^2$ à la base (V, W) formée de vecteurs propres de A et par D la matrice diagonale

$$D := \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

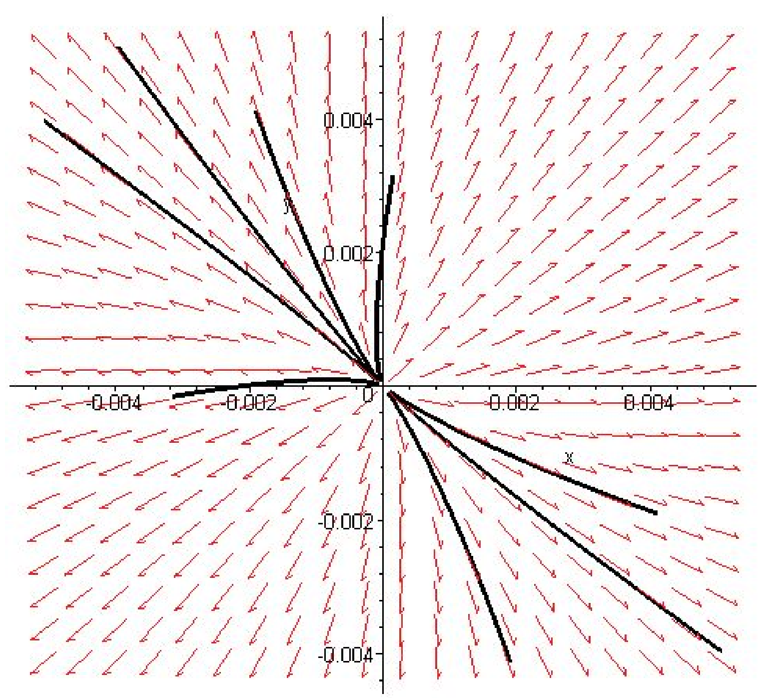
On a alors $A = PDP^{-1}$. Considérons une solution U de condition initiale 0 et posons $S = P^{-1}U$. On a alors :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d(P^{-1}U)}{dt} = P^{-1}\frac{dU}{dt} = P^{-1}AU = DP^{-1}U = DS.$$

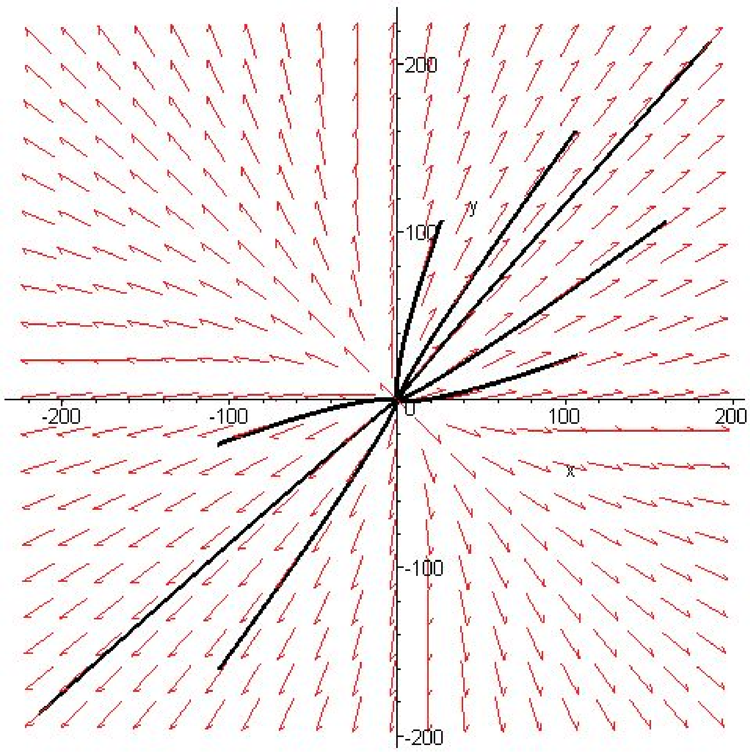
On en déduit que les fonctions coordonnées de S vérifient donc

$$\begin{array}{rcl} S_1'(t) & = & (0,9)S_1(t), \quad S_1(0) = 0 \\ S_2'(t) & = & (0,7)S_2(t), \quad S_2(0) = 0. \end{array}$$

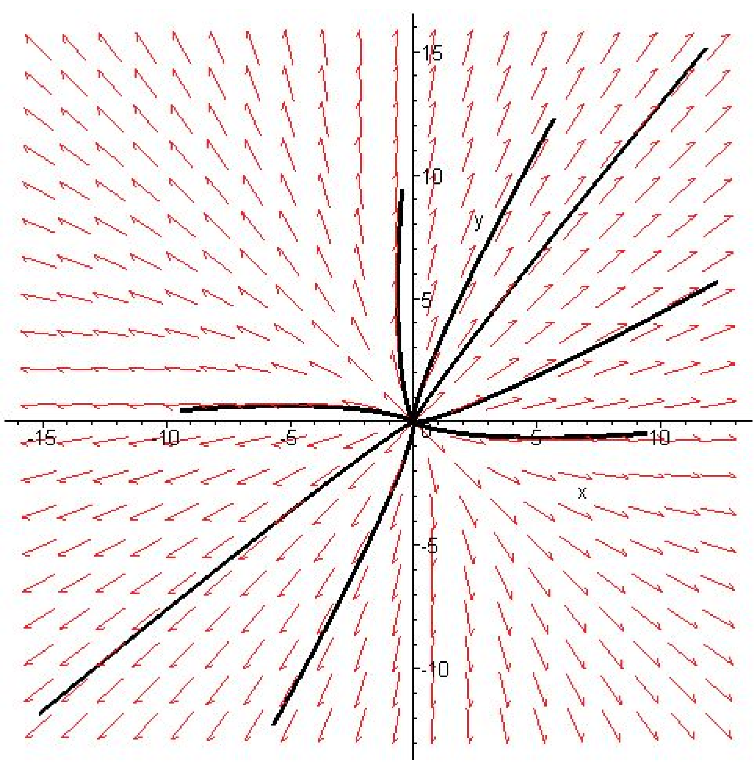
On est alors ramené à des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants. La seule solution est la fonction nulle.
Sur ce dessin, on a representé, pour diverses conditions initiales, l'ensemble des extrémités des vecteurs $U(t)$ lorsque t varie de -10 à -5.



Sur ce dessin, on a representé, pour les **mêmes conditions initiales**, l'ensemble des extrémités des vecteurs $U(t)$ lorsque t varie de -10 à 10.



Quelle différence entre les deux dessins ? Considérer l'échelle. Pouvez-vous expliquer cette différence en étudiant la limite de la pente du vecteur $U(t)$ quand t tend vers $-\infty$ ou $+\infty$? Voici un troisième dessin, qui représente, toujours pour les **mêmes conditions initiales**, l'ensemble des extrémités des vecteurs $U(t)$ lorsque t varie de -10 à 5.



Note : Pour tout point du plan de coordonnées (x, y) on a representé par un vecteur d'origine (x, y) la valeur de $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On peut vérifier que les courbes représentées sont tangentes en (x, y) au vecteur $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. En effet, le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$ est le vecteur vitesse au point de coordonnées $(x(t), y(t))$ le long de la courbe paramétrée $t \longmapsto (x(t), y(t))$ tracée dans $\mathbf{R}^2$. Si cette courbe paramétrée est une solution de l'équation différentielle, on a

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$