

## Espaces euclidiens, orthogonalité, longueur. Moindres carrés.

On travaille avec le *corps* des réels, noté  $\mathbf{R}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on considère l'ensemble des  $n$ -uplets de réels que l'on désigne par  $\mathbf{R}^n$  : ainsi, un élément  $\vec{x}$  de  $\mathbf{R}^n$  est une *famille de réels*  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Noter que  $\mathbf{R}^0$  ne contient qu'un élément, la famille vide, que l'on note 0. L'ensemble  $\mathbf{R}^1$  se ramène à  $\mathbf{R}$ .

On appelle souvent  $\vec{x}$  un *vecteur* en référence à la structure d'espace vectoriel sur  $\mathbf{R}^n$ . (Voir 10.1 pour la définition de cette structure).

### 1. PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathbf{R}^n$ .

Étant donnés deux vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de  $\mathbf{R}^n$ , on considère le nombre réel

$$x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i$$

que l'on appelle *produit scalaire* de  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  et que l'on note  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ . On vérifie très facilement les propriétés suivantes : pour tous  $\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', \vec{y}, \vec{y}', \vec{y}''$  de  $\mathbf{R}^n$ , pour tout  $\lambda$  scalaire réel, on a

#### (1) Le produit scalaire est bilinéaire

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}' + \vec{x}'' | \vec{y} \rangle &= \langle \vec{x}' | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}'' | \vec{y} \rangle \\ \langle \vec{x} | \vec{y}' + \vec{y}'' \rangle &= \langle \vec{x} | \vec{y}' \rangle + \langle \vec{x} | \vec{y}'' \rangle \\ \langle \lambda \vec{x} | \vec{y} \rangle &= \lambda \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle \\ \langle \vec{x} | \lambda \vec{y} \rangle &= \lambda \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle\end{aligned}$$

#### (2) Le produit scalaire est symétrique.

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle$$

#### (3) Le produit scalaire est défini positif.

$$\begin{aligned}\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle &\geq 0 \text{ et} \\ \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0 &\implies \vec{x} = 0.\end{aligned}$$

La troisième propriété permet de définir la *norme euclidienne* d'un vecteur (on peut dire aussi sa *longueur*) par la formule

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$$

Cette même propriété montre que la norme d'un vecteur est nulle si et seulement si le vecteur est nul.

Pour tout  $\lambda$  réel on a :

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|.$$

1.1. **Théorème** (Inégalité de Cauchy-Schwarz). : Pour  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  vecteurs de  $\mathbf{R}^n$  on a

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

avec égalité si et seulement si  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont colinéaires.

*Démonstration.* Considérons deux vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de  $\mathbf{R}^n$ . Si  $\vec{x}$  est le vecteur nul, le théorème est vrai. Supposons donc  $\vec{x} \neq 0$  et, pour  $\lambda$  réel, considérons la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \lambda &= \|\lambda\vec{x} + \vec{y}\|^2. \end{aligned}$$

En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire on trouve

$$\varphi(\lambda) = \langle \lambda\vec{x} + \vec{y} \mid \lambda\vec{x} + \vec{y} \rangle = \lambda^2\|\vec{x}\|^2 + 2\lambda\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2.$$

Comme le produit scalaire est défini positif, la fonction  $\varphi$  est toujours positive ou nulle. Comme c'est une fonction polynôme du second degré, son discriminant  $4\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle^2 - 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$  est négatif ou nul. On a donc

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$$

et l'inégalité demandée.

S'il y a égalité, c'est que le discriminant s'annule. C'est le seul cas où  $\varphi$  a une racine (double)  $\lambda_0$ . Dire que  $\varphi(\lambda_0) = 0$ , c'est dire que  $\|\lambda_0\vec{x} + \vec{y}\|^2 = 0$ , donc (produit scalaire défini positif) que le vecteur  $\lambda_0\vec{x} + \vec{y}$  est nul, soit encore que  $\vec{y}$  est proportionnel à  $\vec{x}$ .

Réciproquement, si  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont colinéaires et que  $\vec{x}$  n'est pas nul, il existe un  $\lambda_0$  tel que le vecteur  $\lambda_0\vec{x} + \vec{y}$  est nul. On a alors

$$|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| = |\langle \vec{x} \mid -\lambda_0\vec{x} \rangle| = |-\lambda_0|\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

□

**1.2. Corollaire** (Inégalité du triangle). *Pour  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  vecteurs de  $\mathbf{R}^n$ , on a :*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

*avec égalité si et seulement si l'un des vecteurs est nul ou si'ils sont proportionnels avec un coefficient de proportionnalité positif.*

*Démonstration.* On calcule

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient que

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle \leq |\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$$

et donc la majoration

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$$

qui est celle recherchée. Pour avoir égalité il est nécessaire et suffisant que

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

En particulier on est dans le cas où l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité, les deux vecteurs sont donc colinéaires avec un coefficient de proportionnalité positif (voir la preuve de 1.1). □

**1.3. Commentaire.** On remarque que les preuves de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de ses conséquences utilisent seulement les trois propriétés énoncées d'abord pour le produit scalaire : bilinéarité, symétrie et positivité et non la formule explicite qui définit le produit scalaire (le vérifier).

Encouragé par ce constat, on va désormais appeler **produit scalaire** sur un espace vectoriel  $E$  sur le corps  $\mathbf{R}$  toute application bilinéaire

$$\begin{aligned}\phi : E \times E &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto \phi(\vec{x}, \vec{y})\end{aligned}$$

qui est bilinéaire, symétrique et définie positive. Pour une telle application, il y a un analogue de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de ses conséquences. Par exemple, l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour  $\phi$  s'énonce ainsi :

Pour  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  vecteurs de  $E$  on a

$$|\phi(\vec{x}, \vec{y})| \leq \sqrt{\phi(\vec{x}, \vec{x})} \sqrt{\phi(\vec{y}, \vec{y})}$$

avec égalité si et seulement si  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont colinéaires.

On définit également une *norme* associée à  $\phi$  sur  $E$  : pour tout vecteur  $\vec{x}$  de  $E$ ,

$$\|\vec{x}\|_{\phi} := \sqrt{\phi(\vec{x}, \vec{x})}$$

(voir ici les énoncés généraux pour les produits scalaires 10.9, les normes 10.10 et l'inégalité du triangle 3).

**1.4. Exemples d'espaces vectoriels euclidiens.** . On peut considérer l'exemple suivant d'application :

$$\begin{aligned}\phi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto 2x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n\end{aligned}$$

qui est un produit scalaire sur  $\mathbf{R}^n$  (le vérifier). Si  $n \geq 2$ , on a  $\phi((1, 1, 0, \dots, 0), (1, -1, 0, \dots, 0)) = 1$ , alors que le produit scalaire usuel de ces deux vecteurs est nul. Il y a donc, en général, plusieurs produits scalaires sur un même espace vectoriel réel.

**Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel.** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien  $E$  (donc muni d'un produit scalaire  $\phi$ ), la restriction de  $\phi$  à  $F \times F$  induit un produit scalaire sur  $F$ . Autrement dit, pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs de  $F$ , on calcule leur produit scalaire dans  $E$ .

Dans la suite on considèrera donc un espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire que nous noterons  $\langle | \rangle$ . L'exemple privilégié, que l'on doit garder en tête, est celui de  $\mathbf{R}^n$  muni du produit scalaire usuel.

**Polynômes orthogonaux.** C'est un autre exemple très important et très utilisé dans les applications. Voir Feuille 2, Exercice 4.

## 2. ORTHOGONALITÉ

**2.1. Définition.** On dira que deux vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de  $\mathbf{R}^n$  sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul.

Remarquer que le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Le calcul de  $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2$  ci-dessus (1.2) prouve le résultat suivant :

2.2. **Théorème** (Pythagore). Deux vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de  $\mathbf{R}^n$  sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

2.3. **Théorème.** Une famille libre de vecteurs de  $E$  qui sont tous non nuls et orthogonaux deux à deux est une famille libre.

*Démonstration.* On rappelle qu'une famille  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_d)$  est libre si toute combinaison linéaire  $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_d\vec{v}_d$  qui donne le vecteur nul est la combinaison linéaire triviale : celle où tous les scalaires  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$  sont nuls.

Considérons donc des réels  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$  et la combinaison linéaire

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_d\vec{v}_d = \sum_{i=1}^d \lambda_i\vec{v}_i.$$

Supposons que le résultat est le vecteur nul et faisons le produit scalaire par le vecteur  $\vec{v}_i$  pour  $i$  de 1 à  $d$ . On obtient, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire

$$0 = \langle \vec{v}_i | \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_d\vec{v}_d \rangle = \lambda_1\langle \vec{v}_i | \vec{v}_1 \rangle + \dots + \lambda_d\langle \vec{v}_i | \vec{v}_d \rangle.$$

Comme le vecteur  $\vec{v}_i$  est orthogonal à tous les autres, on en déduit

$$0 = \langle \vec{v}_i | \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_d\vec{v}_d \rangle = \lambda_i\langle \vec{v}_i | \vec{v}_i \rangle = \lambda_i\|\vec{v}_i\|^2.$$

Mais  $\vec{v}_i$  n'est pas le vecteur nul, donc sa longueur n'est pas nulle. C'est donc que  $\lambda_i = 0$ .  $\square$

2.4. **Définition.** Une famille finie  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_d)$  de vecteurs de  $E$  qui sont tous non nuls et orthogonaux deux à deux (et qui est donc libre d'après le théorème) est appelée **famille orthogonale**. Si de plus les vecteurs de la famille sont tous de norme 1, on dit alors que la famille est **orthonormée** (on dit parfois **orthonormale**). On abrège **base orthonormée** en **b.o.n.**

2.5. **Définition.** On dira qu'un vecteur  $\vec{v}$  de  $E$  est **orthogonal à une partie**  $A$  de  $E$  s'il est orthogonal à tous les vecteurs de  $A$ . On définit l'orthogonal  $A^\perp$  comme l'ensemble des vecteurs de  $E$  orthogonaux à  $A$ . Un vecteur  $\vec{v}$  de  $E$  est dit orthogonal à  $A$  si

$$\forall \vec{y} \in A \quad \langle \vec{v} | \vec{y} \rangle = 0.$$

2.6. **Lemme.** On considère un espace vectoriel  $E$  et une partie  $A$  de  $E$ . Alors  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , même si  $A$  n'en est pas un.

L'intersection  $A \cap A^\perp$  contient au plus le vecteur nul.

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , un vecteur  $\vec{v}$  de  $E$  est orthogonal à  $F$  si et seulement s'il est orthogonal à une partie génératrice de  $F$  (par exemple une base de  $F$ ).

*Démonstration.* Exercice.  $\square$

### 3. ALGORITHME DE GRAM-SCHMIDT

C'est l'outil essentiel.

3.1. **Théorème.** On considère un espace vectoriel  $E$  et une **famille libre**  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ . Il existe une **famille orthonormée**  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$  de  $E$  telle que, pour tout  $j$  de 1 à  $p$ ,

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j) = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j).$$

Voir la définition de sous-espace vectoriel et du symbole  $\text{Vect}(\ )$  ici 10.3.

*Démonstration.* La preuve se fait par récurrence sur  $p$ . Pour  $p = 0$ , on ne fait rien. Considérons alors un entier  $p > 0$  et une famille libre  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ . Par hypothèse de récurrence, on sait trouver une famille orthonormée  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{p-1})$  telle que, pour tout  $j$  de 1 à  $p - 1$ ,  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j) = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j)$ . On considère alors le vecteur

$$\vec{\varepsilon}_p = \vec{v}_p - \sum_{j=1}^{p-1} \langle \vec{e}_j | \vec{v}_p \rangle \vec{e}_j.$$

Il a deux propriétés importantes

- (1) *Il est non nul.*

Sinon,  $\vec{v}_p$  serait combinaison linéaire de  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{p-1}$ , donc dans  $\text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{p-1})$  qui est égal, toujours par hypothèse de récurrence, à  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1})$ . On aurait donc  $\vec{v}_p$  combinaison linéaire de  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1})$ , ce qui est impossible puisque la famille  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  est libre.

- (2) *Il est orthogonal à  $\vec{e}_i$  pour  $i$  de 1 à  $p - 1$ .*

En effet, on a

$$\langle \vec{e}_i | \vec{\varepsilon}_p \rangle = \langle \vec{e}_i | \vec{v}_p \rangle - \sum_{j=1}^{p-1} \langle \vec{e}_j | \vec{v}_p \rangle \langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle$$

et le produit scalaire  $\langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle$  vaut 0 si  $i \neq j$  et 1 si  $i = j$ . On en conclut que  $\langle \vec{e}_i | \vec{\varepsilon}_p \rangle = 0$  pour  $i$  de 1 à  $p - 1$ .

Pour terminer la construction de la famille orthonormée  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ , il suffit de prendre

$$\vec{e}_p = \frac{1}{\|\vec{\varepsilon}_p\|} \vec{\varepsilon}_p.$$

□

Les conséquences du résultat précédent sont importantes. On considère un espace vectoriel hermitien (resp. euclidien)  $E$ , c'est-à-dire un espace vectoriel sur  $\mathbf{C}$  (resp.  $\mathbf{R}$ ) muni d'un produit scalaire hermitien (resp. euclidien) et un sous-espace vectoriel  $F$  de dimension finie  $p$  dans  $E$ .

- (1) **Bases orthonormées.** Le sous-espace  $F$ , qui est de dimension finie, a au moins une b.o.n.  
 (2) **Projection orthogonale.** Si  $\vec{x}$  est un vecteur de  $E$  et  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$  une b.o.n. de  $F$ , alors le vecteur

$$\vec{x}' := \sum_{j=1}^p \langle \vec{e}_j | \vec{x} \rangle \vec{e}_j$$

est dans  $F$  et la différence  $\vec{x} - \vec{x}'$  est orthogonale à  $F$ . C'est le seul vecteur qui a cette propriété. On appelle  $\vec{x}'$  la projection orthogonale de  $\vec{x}$  sur  $F$  et on la note  $\text{pr}_F^\perp(\vec{x})$ . On définit ainsi une application de  $E$  dans  $E$  qui est linéaire. Voir Feuille 2. Exercice 1.

- (3) **Supplémentaire orthogonal.** Si  $E$  est lui-même de **dimension finie**  $n$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  dans  $E$ , alors  $F^\perp$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie  $n - p$  et tout vecteur  $\vec{x}$  de  $E$  se décompose de manière unique en

$$\vec{x} = \text{pr}_F^\perp(\vec{x}) + \text{pr}_{F^\perp}(\vec{x}).$$

Autrement dit, si on connaît l'une des deux projections orthogonales, on déduit l'autre par différence. On appelle  $F^\perp$  le **supplémentaire orthogonal** de  $F$  dans  $E$ .

- (4) **Optimisation.** À cause du théorème de Pythagore, la projection orthogonale sur  $F$  a la propriété caractéristique suivante : pour tout vecteur  $\vec{y}$  de  $F$ ,

$$\|\vec{x} - \text{pr}_F^\perp(\vec{x})\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

avec égalité seulement si  $y = \text{pr}_F^\perp(\vec{x})$ .

Autrement dit, la fonction  $\vec{y} \mapsto \|\vec{x} - \vec{y}\|$ , définie sur  $F$ , a un minimum unique qui est atteint pour  $\vec{y} = \text{pr}_F^\perp(\vec{x})$ . Ceci est un moyen efficace de résoudre certains problèmes d'optimisation qui se ramènent ainsi à un calcul de projection orthogonale.

- (5) **Moindres carrés.** Voir Feuille 3. Exercice 2.

## 10. DÉFINITIONS, COMMENTAIRES

10.1. **Espace vectoriel.** On se donne un corps  $\mathbf{K}$  et un ensemble  $E$  muni d'une addition notée  $+$ . On dit que  $E$  a une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$  si

- (1)  $E$  est un groupe abélien pour la loi  $+$ . On note  $0$  l'élément neutre de cette loi.
- (2) Il existe une action de  $\mathbf{K}$  sur  $E$  (appelée multiplication par un scalaire). Pour tout élément  $\lambda$  de  $\mathbf{K}$ , et tout vecteur  $x$  de  $E$ ,  $\lambda x$  est un élément de  $E$ . Cette multiplication a les propriétés suivantes
  - pour  $x$  dans  $E$  on a  $1x = x$ .
  - pour  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbf{K}$ , et  $x$  dans  $E$  on a  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ .
  - pour  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbf{K}$ , et  $x$  dans  $E$  on a  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ .
- (3) pour  $\alpha$  dans  $\mathbf{K}$ ,  $x$  et  $y$  dans  $E$ , on a  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ .

10.2. **Sous-espace vectoriel.** On considère un espace vectoriel  $E$  sur un corps  $\mathbf{K}$  et un sous-ensemble  $F$  de  $E$ . On dit que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si  $F$  contient  $0$  et stable par combinaison linéaire.

10.3. **Sous-espace vectoriel engendré.** On considère un espace vectoriel  $E$  sur un corps  $\mathbf{K}$  et une famille  $(v_1, \dots, v_p)$  de  $p$  vecteurs de  $E$ . Le **sous-espace vectoriel engendré** par la famille  $(v_1, \dots, v_p)$  est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  scalaires de  $\mathbf{K}$ . Vérifier que c'est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ . On le note  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_j)$ .

On convient que la famille vide engendre le sous-espace réduit à  $0$ .

10.4. **Bases, dimension.** On se donne un espace vectoriel  $E$  sur un corps  $\mathbf{K}$ . Une famille  $\mathcal{B} := (e_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est une base de  $E$  si tout vecteur  $x$  de  $E$  se décompose de manière unique comme combinaison linéaire finie d'éléments de  $\mathcal{B}$ .

Lorsque  $E$ , espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ , peut être engendré par un ensemble fini, alors il possède une base finie et toutes ses bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé **dimension** de  $E$ . Lorsque  $E$  n'a aucune base finie, on dit que  $E$  est de dimension infinie. L'espace vectoriel  $\mathbf{K}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbf{K}$  est dans ce dernier cas.

On considère  $E$  espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbf{K}$ , avec une base  $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ . Tout vecteur  $x$  de  $E$  a une décomposition unique

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

Par exemple, la seule façon d'écrire le vecteur nul est de prendre tous les coefficients égaux à  $0$ .

10.5. **Théorème de la base incomplète :** On se donne un espace vectoriel  $E$  sur un corps  $\mathbf{K}$  et une **famille libre** de vecteurs de  $E$ . On peut compléter cette famille en une **base** de  $E$ .

10.6. **Application linéaire.** On travaille sur un corps  $\mathbf{K}$ . On se donne deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sur  $\mathbf{K}$  et une application  $f : E \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est  **$\mathbf{K}$ -linéaire** (linéaire s'il n'y a pas d'ambiguïté) si

- (1)  $f$  est compatible avec l'addition : pour  $x$  et  $y$  vecteurs de  $E$

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

(2)  $f$  est compatible avec la multiplication par un scalaire : pour  $x$  vecteur de  $E$  et  $\lambda$  scalaire

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

On appelle **noyau de  $f$** , l'**ensemble des solutions** dans  $E$  de l'équation  $f(x) = 0$ . On le note  $\ker f$  :

$$\ker f := \{x \in E \mid f(x) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On appelle **image de  $f$**  et on note  $f(E)$ , le sous-ensemble des vecteurs de  $F$  qui ont au moins un antécédent :

$$f(E) := \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**10.7. Image inverse.** On se donne une application  $f : E \longrightarrow E$ . L'image inverse d'une partie  $G$  de  $F$  est l'ensemble des antécédents des éléments de  $G$ , c'est-à-dire

$$f^{-1}(G) := \{x \in E \mid f(x) \in G\}.$$

On voit que  $f^{-1}(G)$  est une partie de  $E$  et non un élément.

On considère alors  $E$  et  $F$ , espaces vectoriels sur  $\mathbf{K}$  et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Lorsque  $G$  est réduit à l'élément 0 de  $F$ , l'image inverse  $f^{-1}(0)$  qui est alors le noyau de  $f$ , contient en général plus d'un élément de  $E$ . On voit donc que écrire  $f^{-1}(0)$  ne suppose pas que  $f$  est bijective, ou que l'application inverse de  $f$  existe.

**10.8. Polynômes, racines.** On considère un corps  $\mathbf{K}$  et un polynôme  $P$  à coefficients dans  $\mathbf{K}$  de degré  $d$ . Un tel polynôme a une écriture unique

$$P(T) = a_d T^d + a_{d-1} T^{d-1} + \dots + a_0 \text{ avec } a_d \neq 0.$$

On dit qu'un scalaire  $\lambda$  de  $\mathbf{K}$  est une **racine** de  $P$  si  $P(\lambda) = 0$  dans  $\mathbf{K}$ , autrement dit si

$$P(\lambda) = a_d \lambda^d + a_{d-1} \lambda^{d-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Un théorème classique est le suivant :  $\lambda$  est racine de  $P$  si et seulement si  $T - \lambda$  divise  $P(T)$  dans  $\mathbf{K}[T]$ .

On désigne par  $r$  un entier. On dit que  $\lambda$  est **racine de multiplicité  $r$**  de  $P$  si et seulement si  $(T - \lambda)^r$  divise  $P(T)$  dans  $\mathbf{K}[T]$  et  $(T - \lambda)^{r+1}$  ne divise pas  $P(T)$  dans  $\mathbf{K}[T]$ .

On dit qu'un polynôme de  $\mathbf{K}[T]$  est **scindé** dans  $\mathbf{K}[T]$  s'il est produit dans  $\mathbf{K}[T]$  de facteurs de degré 1.

Le **théorème de d'Alembert-Gauss** affirme que : *un polynôme de degré  $d$  de  $\mathbf{C}[T]$  est scindé dans  $\mathbf{C}[T]$ . C'est-à-dire : il existe des entiers  $m_1, \dots, m_k$  tels que  $m_1 + \dots + m_k = d$  et des complexes distincts deux à deux  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , racines de  $P$  de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_k$ . On a donc*

$$P(T) = a_d \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{m_i}.$$

En particulier, un polynôme de degré non nul a au moins une racine complexe.

10.9. **Produit scalaire euclidien.** On considère un espace vectoriel  $E$  sur le corps des réels  $\mathbf{R}$ . et une application

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x | y \rangle \end{aligned}$$

qui, pour mériter le nom de produit scalaire euclidien, doit vérifier les propriétés suivantes : pour tous  $x$  et  $y$  de  $E$ , pour tout  $\lambda$  scalaire réel, on a

(1) **Elle est bilinéaire**

$$\begin{aligned} \langle x' + x'' | y \rangle &= \langle x' | y \rangle + \langle x'' | y \rangle \\ \langle x | y' + y'' \rangle &= \langle x | y' \rangle + \langle x | y'' \rangle \\ \langle \lambda x | y \rangle &= \lambda \langle x | y \rangle \\ \langle x | \lambda y \rangle &= \lambda \langle x | y \rangle \end{aligned}$$

(2) **Elle est symétrique.**

$$\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$$

(3) **Elle est définie positive.**

$$\begin{aligned} \langle x | x \rangle &\geq 0 \text{ et} \\ \langle x | x \rangle = 0 &\implies x = 0. \end{aligned}$$

10.10. **Norme.** On considère un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbf{R}$ . Une application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

est une norme si elle vérifie les axiomes suivants :

(1) **Homogénéité** : pour  $\lambda$  scalaire et  $x$  vecteur,

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

(2) **Positivité stricte** : pour  $x$  dans  $E$ ,  $\|x\| \geq 0$  et  $\|x\| = 0 \implies x = 0$ .

(3) **Inégalité triangulaire** : pour tous  $x$  et  $y$  vecteurs de  $E$ ,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Un produit scalaire euclidien (voir 10.9) définit une norme, dite euclidienne. Pour  $x$  vecteur de  $E$ , on pose

$$\|x\| := \sqrt{\langle x | x \rangle}.$$

Il existe cependant des normes qui ne proviennent pas d'un produit scalaire : par exemple sur l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^2$  on considère l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \sup |x_1|, |x_2| \end{aligned}$$

est une norme (le vérifier).