Théorème de Girsanov

I. Changement de mesure.

Soient un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, une variable aléatoire X normale centrée réduite et un réel α positif. On pose, pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E}\Big(\mathbf{1}_A \exp\Big(\alpha X - \frac{\alpha^2}{2}\Big)\Big) = \int_\Omega \mathbf{1}_A \exp\Big(\alpha X - \frac{\alpha^2}{2}\Big)\, d\mathbf{P}.$$

On veut montrer le résultat suivant :
la fonction $\mathbf{Q}$ *définit une mesure de probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *pour laquelle la variable aléatoire* X *suit la loi* $\mathcal{N}(\alpha, 1)$ *; en outre* $\mathbf{Q}$ *et* $\mathbf{P}$ *sont équivalentes, i.e.* $\mathbf{Q}(A) = 0$ *si et seulement si* $\mathbf{P}(A) = 0$.

On pourra alors écrire, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{Q}(A) = \int_\Omega \mathbf{1}_A \, d\mathbf{Q}$, autrement dit $d\mathbf{Q} = \exp\Big(\alpha X - \frac{\alpha^2}{2}\Big)\, d\mathbf{P}$. On aura aussi, pour toute variable aléatoire Z

$$\int_\Omega Z\, d\mathbf{Q} = \int_\Omega Z \exp\Big(\alpha X - \frac{\alpha^2}{2}\Big)\, d\mathbf{P}.$$

a. Montrer que $\mathbf{Q}(\Omega) = 1$ et que $\mathbf{Q}(A^c) = 1 - \mathbf{Q}(A)$.
b. Montrer que $\mathbf{Q}$ est σ-additive. On pourra remarquer que si (A_n) désigne une suite d'événements disjoints deux à deux dont la réunion est A alors $\mathbf{1}_A = \sum_n \mathbf{1}_{A_n}$; on utilisera ensuite le théorème de Beppo-Levi :

si (f_n) *est une suite de fonctions mesurables positives alors* $\int_\Omega (\sum_n f_n)\, d\mathbf{P} = \sum_n \int_\Omega f_n \, d\mathbf{P}$.

c. Montrer que les mesures $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ sont équivalentes (remarquer que $\mathbf{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{1}_A = 0$ $\mathbf{P}$-ps).
d. Montrer, en utilisant le théorème de transfert, que pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$ on a

$$\mathbf{Q}(X \in I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_I \exp\big(-\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\big)\, dx.$$

En déduire que la densité sous $\mathbf{Q}$ de X est celle d'une loi $\mathcal{N}(\alpha, 1)$.

Notations :

– dérivée de Radon-Nikodym

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \exp\Big(\alpha X - \frac{\alpha^2}{2}\Big).$$

– espérance sous la probabilité $\mathbf{Q}$: $\mathbf{E}_\mathbf{Q}$; par exemple :

$$\mathbf{E}_\mathbf{Q}(Z) = \mathbf{E}(LZ) \quad \text{avec} \quad L = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}.$$

II. Processus de changement de mesure (pour un brownien généralisé).

Soit X le processus défini par

$$X_t = \mu t + \sigma W_t$$

où μ et $\sigma > 0$ sont des réels donnés et où $(W_t)_{t \geq 0}$ représente un $\mathbf{P}$-brownien standard.

a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_t.
b. Pour t fixé, on écrit $X_t = \mu t + \sigma\sqrt{t} Y_t$ avec $Y_t \sim \mathcal{N}(0; 1)$. Soit d'autre part un réel positif r fixé.

Montrer qu'il est possible de transformer Y_t en une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\alpha_t; 1)$, où α_t est à déterminer en fonction de μ, σ, r et t, par un changement de la mesure $\mathbf{P}$ en une mesure $\mathbf{Q}_t$ pour laquelle X_t aurait la loi $\mathcal{N}(rt; \sigma^2 t)$.
Indication : on commencera par déterminer α_t puis on choisira le processus des $L_t = \frac{d\mathbf{Q}_t}{d\mathbf{P}}$ défini par

$$L_t = \exp\Big(-\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t\Big) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

en justifiant ce choix.
c. Montrer que le processus $(L_t)_t$ est une $\mathbf{P}$-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_t)$ associée au brownien (W_t).

III. Annulation du drift d'un brownien généralisé.

On se place dans un intervalle temporel borné $t \in [0, T]$ avec $T > 0$ fixé. Avec les notations du II on pose

$$W_t^* = W_t + \lambda t$$

et on désigne par $\mathbf{Q}$ la mesure de probabilité équivalente à $\mathbf{P}$ telle que

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = L_T.$$

a. Montrer, par un calcul direct, que $L_t W_t^*$ définit une $\mathbf{P}$-martingale.
b. En déduire que W_t^* est une $\mathbf{Q}$-martingale. On montrera d'abord, en utilisant les propriétés générales de l'espérance conditionnelle, que pour $s \le t$ on a

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(W_t^* \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}\Big(\frac{L_t}{L_s} W_t^* \mid \mathcal{F}_s\Big).$$

On rappelle à cet égard la formule de Bayes générale pour les espérances conditionnelles : si $L = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ on a

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(X \mid \mathcal{F}) = \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(LX \mid \mathcal{F})}{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(L \mid \mathcal{F})}.$$

c. Déterminer W_0^*. Les trajectoires de W_t^* sont-elles continues ?

On admet pour la suite que W_t^* définit un brownien standard pour $\mathbf{Q}$ (on peut utiliser une caractérisation du brownien due à P. Lévy : outre les propriétés montrées aux deux questions précédentes, il resterait à établir que la variation quadratique de W_t^* est finie, propriété qui ne dépend que des trajectoires et qui résulte donc de la propriété analogue pour W_t).
Les conclusions des points II et III représentent un cas particulier du **théorème de Girsanov.** Dans le contexte du modèle de Black-Scholes pour les marchés financiers, il permet entre autres de prouver l'existence d'une probabilité de martingale, dont il découle que ce modèle de marché ne présente pas d'opportunité d'arbitrage.

IV. Application aux marchés financiers.

Soit S le processus des prix d'un actif risqué caractérisé par l'EDS

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \ , \ S_0 \text{ prix initial donné}$$

où μ et $\sigma > 0$ sont des réels donnés et (W_t) est un $\mathbf{P}$-brownien standard.

a. Quelle est l'EDS vérifiée par $\log(S_t/S_0)$?
b. En déduire l'égalité

$$S_t = S_0 \exp\Big(\big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\big)t + \sigma W_t\Big).$$

On se donne en outre un actif non-risqué de rentabilité (composée continue) annuelle r. On définit alors le processus des prix actualisés $\widetilde{S}$ par

$$\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t = S_0 \exp\Big((\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}) t + \sigma W_t \Big).$$

c. Quelle est l'EDS vérifiée par $\widetilde{S}$? (considérer la fonction $F(t,x) = e^{-rt}x$)
d. On pose

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

qui définit un processus d'Itô : exprimer $d\widetilde{S}_t$ en fonction de $\widetilde{S}_t$, σ et W_t^*.
e. D'après le théorème de Girsanov, W_t^* est un brownien standard pour une mesure de martingale **Q** : avec les notations des points II et III, préciser λ et le processus L_t des dérivées de Radon-Nikodym.
f. Déduire de ce qui précède que **le processus des prix actualisés est une Q-martingale** et que l'on a

$$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 \exp\Big(-\sigma W_t^* - \frac{\sigma^2}{2} t \Big).$$