

Épreuve du mercredi 5 janvier 2011
(durée : 2h ; aucun document autorisé)

1.— Soit X un processus d'Itô solution de l'EDS :

$$dX_t = a_t dt + \sigma_t dW_t, \quad X_0 \text{ réel donné,}$$

autrement dit :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

où a_s et σ_s sont des processus possédant les propriétés de croissance et d'intégrabilité requises pour que les énoncés aient un sens.

On définit le processus $h(t)$, *variation quadratique* de X :

$$h(t) = \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

On définit le processus U par :

$$U_t = e^{X_t - \frac{1}{2}h(t)}.$$

On définit ensuite le processus V où V_t est calculé comme U_t mais en remplaçant X_t par $-X_t$ dans la formule. Enfin, on pose $Z = 1/V$.

a. Montrer à l'aide de la formule d'Itô que U vérifie l'EDS

$$dU_t = U_t dX_t \text{ avec } U_0 = e^{X_0}.$$

En déduire que si X est une martingale alors U est aussi une martingale.

b. Calculer le produit $U_t \times V_t$ en fonction de $h(t)$.

c. Déterminer une EDS vérifiée par Z .

d. Quelle relation entre a_s et σ_s doit être vérifiée pour que Z soit une martingale ?

2.— Un trader, opérant sur un marché sans arbitrage, fait le pari suivant concernant l'actif risqué S : si à la date future T fixée on a $S_T \geq K$ où K est un réel positif donné, alors il recevra la somme de S_T € ; dans le cas contraire, le trader paiera la somme S_T € à sa contrepartie.

On désigne par Y le prix d'arbitrage de ce pari ; c'est un processus : $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$.

a. Montrer l'égalité :

$$Y_0 = S_0 \times (2\mathbf{P}^S(S_T \geq K) - 1)$$

où \mathbf{P}^S désigne la probabilité pour laquelle tous les actifs du marché, *actualisés par S* , sont des martingales. (voir le rappel en fin d'exercice)

Dans la question suivante, on se place dans les conditions du modèle de marché (B, S) de Black-Scholes-Merton, dont on reprend les notations habituelles. L'actif risqué S ne rend pas de dividende. Sa dynamique est donnée par $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t$ où W désigne un brownien standard. En particulier la variable $\log S_t$ suit une loi normale d'espérance $\log S_0 + (\mu - \sigma^2/2)t$ et de variance $\sigma^2 t$.

Le taux sans risque r est supposé constant et la dynamique de l'actif non-risqué B est $dB_t = rB_t dt$ avec $B_0 = 1$ (autrement dit, $B_t = e^{rt}$). On a par ailleurs fixé une échéance finie T .

b. Déterminer à l'aide de la formule d'Itô appliquée à B/S la valeur de μ , en fonction de r et σ , pour laquelle les actifs du marché actualisés par S sont des \mathbf{P}^S -martingales.

c. On désigne par N la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée et réduite. Montrer l'égalité

$$Y_0 = S_0 \times (2N(d) - 1)$$

où d est un réel qu'il faudra exprimer en fonction des paramètres σ , T , S_0 , K et r .

RAPPEL sur le principe du *changement de numéraire* : soit U un actif du marché (sans arbitrage) dont les prix restent toujours strictement positifs, il existe alors une probabilité pour laquelle le prix Y/U de tout autre actif du marché Y actualisé par rapport à U est une martingale. On a en particulier, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = U_t \mathbf{E}^U(Y_T/U_T \mid \mathcal{F}_t)$$

où l'espérance est calculée sous la probabilité \mathbf{P}^U associée au nouveau numéraire U .

Le changement de probabilité correspond à un changement du drift de l'actif risqué S . Lorsque $U = B$ la probabilité \mathbf{P} associée est la probabilité *risque-neutre*.

barème approximatif : 10 points par exercice