Épreuve du mercredi 5 janvier 2011
(durée : 2h ; aucun document autorisé)

Corrigé

1.— Soit X un processus d'Itô solution de l'EDS :

$$dX_t = a_t\,dt + \sigma_t\,dW_t,\ \ X_0 \text{ réel donné,}$$

autrement dit :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s\,ds + \int_0^t \sigma_s\,dW_s$$

où a_s et σ_s sont des processus possédant les propriétés de croissance et d'intégrabilité requises pour que les énoncés aient un sens.
On définit le processus $h(t)$, *variation quadratique* de X :

$$h(t) = \int_0^t \sigma_s^2\,ds.$$

On définit le processus U par :

$$U_t = e^{X_t - \frac{1}{2}h(t)}.$$

On définit ensuite le processus V où V_t est calculé comme U_t mais en remplaçant X_t par $-X_t$ dans la formule. Enfin, on pose $Z = 1/V$.
a. Montrer à l'aide de la formule d'Itô que U vérifie l'EDS

$$dU_t = U_t\,dX_t \text{ avec } U_0 = e^{X_0}.$$

En déduire que si X est une martingale alors U est aussi une martingale.
b. Calculer le produit $U_t \times V_t$ en fonction de $h(t)$.
c. Déterminer une EDS vérifiée par Z.
d. Quelle relation entre a_s et σ_s doit être vérifiée pour que Z soit une martingale ?

Solution
a. Avec $f(t,x) = e^{x-\frac{1}{2}h(t)}$, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma_t^2 e^{x-\frac{1}{2}h(t)} = -\frac{1}{2}\sigma_t^2 f(t,x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(t,x) \tag{1}$$

d'où

$$dU_t = \big(-\frac{1}{2}\sigma_t^2 U_t + a_t U_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 U_t\big)dt + \sigma_t U_t dW_t = U_t\,dX_t. \tag{2}$$

En particulier, si X est une martingale alors $a_t = 0$ et U_t est aussi une martingale.
b. On a $U_t V_t = e^{-h(t)}$.
c. On a $Z_t = 1/V_t = e^{h(t)}U_t = g(t, U_t)$ avec $g(t,x) = e^{h(t)}x$. On trouve alors

$$dZ_t = \big(\sigma_t^2 e^{h(t)} U_t + e^{h(t)} a_t U_t\big)dt + e^{h(t)}\sigma_t U_t dW_t = Z_t\big((\sigma_t^2 + a_t)dt + \sigma_t dW_t\big) \tag{3}$$

et la relation cherchée est

$$\sigma_t^2 + a_t = 0. \tag{4}$$

2.— Un trader, opérant sur un marché sans arbitrage, fait le pari suivant concernant l'actif risqué S : si à la date future T fixée on a $S_T \geq K$ où K est un réel positif donné, alors il recevra la somme de S_T €; dans le cas contraire, le trader paiera la somme S_T € à sa contrepartie.

On désigne par Y le prix d'arbitrage de ce pari ; c'est un processus : $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$.

a. Montrer l'égalité :

$$Y_0 = S_0 \times \big(2\mathbf{P}^S(S_T \geq K) - 1\big)$$

où $\mathbf{P}^S$ désigne la probabilité pour laquelle tous les actifs du marché, *actualisés par* S, sont des martingales. (*voir* le rappel en fin d'exercice)

`Dans la question suivante, on se place dans les conditions du modèle de marché` (B, S) `de Black-Scholes-Merton, dont on reprend les notations habituelles. L'actif risqué` S `ne rend pas de dividende. Sa dynamique est donnée par` $dS_t/S_t = \mu\, dt + \sigma\, dW_t$ `où` W `désigne un brownien standard. En particulier la variable` $\log S_t$ `suit une loi normale d'espérance` $\log S_0 + (\mu - \sigma^2/2)t$ `et de variance` $\sigma^2 t$.
`Le taux sans risque` r `est supposé constant et la dynamique de l'actif non-risqué` B `est` $dB_t = rB_t\, dt$ `avec` $B_0 = 1$ `(autrement dit,` $B_t = e^{rt}$`). On a par ailleurs fixé une échéance finie` T.

b. Déterminer à l'aide de la formule d'Itô appliquée à B/S la valeur de μ, en fonction de r et σ, pour laquelle les actifs du marché actualisés par S sont des $\mathbf{P}^S$-martingales.

c. On désigne par N la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée et réduite. Montrer l'égalité

$$Y_0 = S_0 \times \big(2N(d) - 1\big)$$

où d est un réel qu'il faudra exprimer en fonction des paramètres σ, T, S_0, K et r.

Solution

a. En utilisant le sous-jacent comme numéraire on trouve

$$\frac{Y_0}{S_0} = \mathbf{E}^S\Big(\frac{Y_T}{S_T}\Big). \tag{5}$$

Par ailleurs

$$Y_T = S_T \mathbf{1}_{\{S_T \geq K\}} - S_T \mathbf{1}_{\{S_T < K\}} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}^S\big(\mathbf{1}_{\{S_T \geq K\}}\big) = \mathbf{P}^S(S_T \geq K) \tag{6}$$

d'où l'égalité cherchée

$$\frac{Y_0}{S_0} = 2\mathbf{P}^S(S_T \geq K) - 1. \tag{7}$$

b. La formule d'Itô avec le changement de variable $Z = B/S = h(t, S_t)$ où $h(t,x) = \dfrac{e^{rt}}{x}$ donne

$$\frac{dZ}{Z} = (r + \sigma_t^2)dt - \frac{dS}{S} \tag{8}$$

Sous la probabilité $\mathbf{P}^S$ le drift de dZ/Z s'annule (*i.e.* le prix du bon B est une $\mathbf{P}^S$-martingale) donc le drift de dS/S est

$$\mu = r + \sigma_t^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{dS}{S} = (r + \sigma_t^2)dt + \sigma_t^2 dW_t^\star \tag{9}$$

où $W_t^\star$ est un brownien sous la probabilité $\mathbf{P}^S$.

c. On sait que dans les formules de Black-Scholes pour les calls européens, le facteur $N(d_1)$ représente la probabilité $\mathbf{P}^S(S_T \geq K)$. Dans ce terme N désigne la fonction de répartition d'une variable normale standard et d_1 est donné par

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\Big\{\log\frac{S_0}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T)\Big\}. \tag{10}$$

On peut d'ailleurs retrouver cette formule par un calcul direct à partir de l'égalité (9) ci-dessus qui montre en particulier que sous $\mathbf{P}^S$ la variable S_T est log-normale avec les paramètres ci-dessous :

$$\log S_T \sim N\big(\log S_0 + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)T\,;\,\sigma^2 T\big). \tag{11}$$

On déduit des égalités (7) et (10) ci-dessus le prix à $T = 0$ du pari Y :

$$Y_0 = S_0 \times \big(2N(d_1) - 1\big). \tag{12}$$

RAPPEL sur le principe du *changement de numéraire :* soit U un actif du marché (sans arbitrage) dont les prix restent toujours strictement positifs, il existe alors une probabilité pour laquelle le prix Y/U de tout autre actif du marché Y actualisé par rapport à U est une martingale. On a en particulier, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = U_t\,\mathbf{E}^U\big(Y_T/U_T \mid \mathcal{F}_t\big)$$

où l'espérance est calculée sous la probabilité $\mathbf{P}^U$ associée au nouveau numéraire U.
Le changement de probabilité correspond à un changement du drift de l'actif risqué S. Lorsque $U = B$ la probabilité $\mathbf{P}$ associée est la probabilité *risque-neutre*.

---

barème approximatif : 10 points par exercice